

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ ОРТОТРОПНЫХ ТЕЛ ПРИ ПОМОЩИ ЧИСЛЕННОЙ
РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

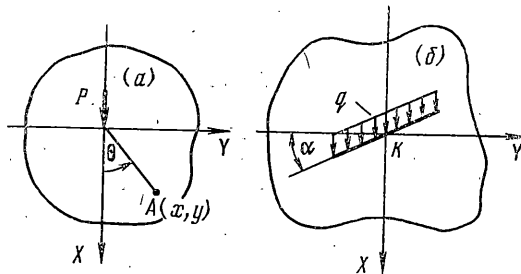
В. К. КОСЕНЮК

(Новосибирск)

Способ решения основных задач теории упругости методом интегральных уравнений без использования этих уравнений в явном виде применительно к случаю изотропных и однородных тел произвольной формы рассматривался в [1]. В публикуемой работе используемый в [1] метод применяется к решению плоской задачи теории упругости для ортотропных однородных тел. При этом предполагается, что деформации являются упругими и малыми, а материал следует обобщенному закону Гука.

Для решения задач по предлагаемой в [1] схеме необходимо иметь выражения напряжений и смещений в бесконечной ортотропной пластинке от сосредоточенной силы, действующей внутри этой плоскости по одному из главных направлений упругости, и соответствующие выражения от действия распределенных нагрузок.

1. Определение напряжений и перемещений от сосредоточенной силы. Рассмотрим случай, когда сосредоточенная сила P действует в направлении оси X (фиг. 1, а). Будем считать, что за направления осей X и Y берутся главные направления упругости. Для упругих постоянных бесконечной ортотропной плоскости примем следующие обозначения: E_1, E_2 —



Фиг. 1

модули Юнга по главным направлениям упругости X и Y , G — модуль сдвига, $\nu_1 = \nu_{xy}$, $\nu_2 = \nu_{yx}$ — коэффициенты Пуассона.

Используя подход, предложенный в [2] при решении аналогичной задачи для изотропной среды, получим формулы для определения напряжений и перемещений

$$\sigma_x = -\frac{Px}{2\pi} \frac{(\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2 - \nu_2\mu_1^2\mu_2^2)x^2 - \mu_1^2\mu_2^2(1 + \nu_2\mu_1\mu_2)y^2}{i(\mu_1 + \mu_2)(x^2 - \mu_1^2y^2)(x^2 - \mu_2^2y^2)}$$

$$\sigma_y = -\frac{Px}{2\pi} \frac{(1 + \nu_2\mu_1\mu_2)x^2 + \mu_1\mu_2[1 - \nu_2(\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)]y^2}{i(\mu_1 + \mu_2)(x^2 - \mu_1^2y^2)(x^2 - \mu_2^2y^2)}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{Py}{2\pi} \frac{\mu_1^2 \mu_2^2 (1 + \nu_2 \mu_1 \mu_2) y^2 - (\mu_1^2 + \mu_1 \mu_2 + \mu_2^2 - \nu_2 \mu_1^2 \mu_2^2) x^2}{i(\mu_1 + \mu_2) (x^2 - \mu_1^2 y^2) (x^2 - \mu_2^2 y^2)} \\ u &= \frac{P}{4\pi E_1} \left[\frac{\mu_1 \mu_2 \nu_2 (\mu_1 \mu_2 + \nu_2 E_1 E_2^{-1}) + \nu_2 E_1 E_2^{-1} - (\mu_1^2 + \mu_1 \mu_2 + \mu_2^2)}{i(\mu_1 + \mu_2)} \ln(x^2 - \mu_1^2 y^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\mu_2 (1 - \nu_2 \mu_1^2) (\mu_2^2 - \nu_2 E_1 E_2^{-1})}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \ln \frac{x^2 - \mu_1^2 y^2}{x^2 - \mu_2^2 y^2} \right] \\ v &= \frac{P}{2\pi E_2} \frac{(1 - \nu_2 \mu_2^2) (1 - \nu_2 \mu_1^2)}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{i(\mu_1 - \mu_2) xy}{x^2 - \mu_1 \mu_2 y^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где x, y — координаты точки, в которой определяются соответствующие величины, u, v — перемещения точки соответственно в направлении осей X и Y . Параметры μ_1 и μ_2 являются корнями характеристического уравнения

$$E_1^{-1} \mu^4 + (G^{-1} - 2\nu_1 E_1^{-1}) \mu^2 + E_2^{-1} = 0$$

которое имеет попарно равные корни $\mu_1, \bar{\mu}_1$ и $\mu_2, \bar{\mu}_2$.

Для ортотропной пластинки, хотя μ_1 и μ_2 являются комплексными числами, тем не менее величины $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u, v$ — вещественные [3]. Предельным переходом, полагая $\mu_1 = \mu_2 = i$, получим распределение напряжений и перемещений в изотропной среде (ν — коэффициент Пуассона)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{4\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \left[-(3 + \nu) + 2(1 + \nu) \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{P}{4\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \left[1 - \nu - 2(1 + \nu) \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right] \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{4\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \left[1 - \nu + 2(1 + \nu) \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right] \\ u &= -\frac{P}{8\pi G} \left[\frac{3 - \nu}{2} \ln(x^2 + y^2) + (1 + \nu) \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right] \\ v &= \frac{P}{8\pi G} (1 + \nu) \frac{xy}{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

2. Определение напряжений и перемещений от распределенных нагрузок. Найдем напряжения в точке K (фиг. 1, б) бесконечной плоскости от действия нагрузки q , равномерно распределенной вдоль отрезка прямой, лежащего внутри этой плоскости и образующего с осью Y угол α . В этом случае напряжения в точке K определяются суммированием напряжений, найденных отдельно от нагрузок, действующих вне точки, и от нагрузок, действующих вблизи самой точки. Слагаемые от нагрузок, расположенных вне точки K , можно заменить напряжениями в точке K , вычисленными по формуле (1.1), от системы сосредоточенных сил, статически эквивалентных заданной равномерно распределенной нагрузке.

Проведя рассуждения, аналогичные [4], получим формулы для определения напряжений от нагрузки, распределенной вблизи самой точки K :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \pm \frac{q}{2} \cos \alpha \frac{\mu_1^2 \mu_2^2 - (\mu_1^2 + \mu_1 \mu_2 + \mu_2^2 - \nu_2 \mu_1^2 \mu_2^2) \sin^2 \alpha}{(\sin^2 \alpha - \mu_1^2 \cos^2 \alpha) (\sin^2 \alpha - \mu_2^2 \cos^2 \alpha)} \\ \sigma_y &= \mp \frac{q}{2} \cos \alpha \frac{\sin^2 \alpha - \nu_2 \mu_1^2 \mu_2^2 \cos^2 \alpha}{(\sin^2 \alpha - \mu_1^2 \cos^2 \alpha) (\sin^2 \alpha - \mu_2^2 \cos^2 \alpha)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\tau_{xy} = \pm \frac{q}{2} \sin \alpha \frac{\sin^2 \alpha - \nu_2 \mu_1^2 \mu_2^2 \cos^2 \alpha}{(\sin^2 \alpha - \mu_1^2 \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \mu_2^2 \cos^2 \alpha)}$$

Очевидно, что для изотропной среды ($\mu_1 = \mu_2 = i$) получим известные выражения

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \pm \frac{q}{2} \cos \alpha [1 + (1 + \nu) \sin^2 \alpha] \\ \sigma_y &= \mp \frac{q}{2} \cos \alpha (\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha) \\ \tau_{xy} &= \pm \frac{q}{2} \sin \alpha (\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha) \end{aligned} \quad (2.2)$$

С достаточной степенью точности величина перемещения точки K определяется по формулам (1.1) от суммарного действия системы сосредоточенных сил, эквивалентно заменяющих заданную равномерно распределенную нагрузку q .

3. Схема решения. Сущность метода заключается в том, что в общем случае решение исходной задачи разбивается на сумму двух решений — основного и компенсирующего. При построении обоих решений вместо заданной области рассматривается расширенная область — неограниченная сплошная плоскость.

Основное решение удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению и граничным условиям для расширенной области.

Компенсирующее решение рассматривается при этом как результат действия некоторых распределенных нагрузок, приложенных на границе тела, занимающего неограниченную плоскость.

Рассматриваемые краевые задачи при помощи функции Грина приводятся к симметричным интегральным уравнениям Фредгольма первого рода

$$L[q] = \int K(x, y, \xi, \eta) q(s) ds = f(s) \quad (3.1)$$

В качестве функции Грина используется фундаментальное решение для сосредоточенной силы, действующей внутри упругой плоскости. Симметричность функции Грина $K(x, y, \xi, \eta) = K(\xi, \eta, x, y)$ вытекает непосредственно из формулы Грина и физически выражает принцип взаимности.

В случае первой основной задачи, когда требуется найти упругое равновесие тела при заданных внешних усилиях на границе, основное решение получается интегрированием функции Грина. При этом определяется значение основного решения $f(s)$ на контуре, которое является граничным условием для компенсирующего решения. Так как компенсирующие нагрузки представлены распределенными нагрузками, приложенными к границе тела, то $f(s) = \alpha q(s)$, где $\alpha > 0$. Тогда очевидно, что оператор $L[q]$ является положительно-определенным:

$$(L[q], q) = (\alpha q, q) = \alpha (q, q) > 0$$

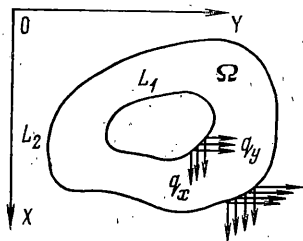
В [5] доказано, что в предположении однозначной разрешимости (3.1), симметричности ядра и положительной определенности $L[q]$ итерационный процесс, определяемый рекуррентным соотношением

$$q_n(s) = q_{n-1}(s) + \lambda [f(s) - f_{n-1}(s)], \quad 0 < \lambda < 2\lambda_1 \quad (3.2)$$

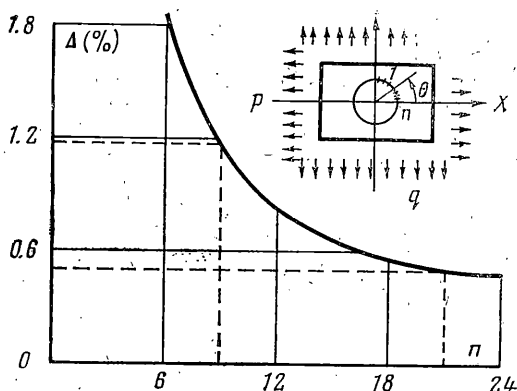
где λ_1 — наименьшее характеристическое число ядра $K(x, y, \xi, \eta)$, сходится к единственному решению (3.1) при любом начальном приближении.

В случае второй основной задачи, когда требуется найти упругое равновесие тела при заданных смещениях точек границы, решение может быть получено непосредственно из (3.1), в котором $f(s)$ — заданные смещения точек границы тела. В этом случае оператор $L[q]$ также положительно-определенный, так как $(L[q], q) = (f(s), q)$ — удвоенная работа, совершаемая силами q на своих смещениях, которая всегда является положительной величиной. Следовательно, решение (3.1) может быть получено методом последовательных приближений по рекуррентным соотношениям (3.2).

Покажем существование и единственность решения (3.1) при любой правой части, поскольку условие сходимости установлено. Известно, что



Фиг. 2



Фиг. 3

(3.1) имеет единственное решение при любой правой части, если соответствующее однородное уравнение $L[q] = Aq = 0$ имеет тривиальное решение. Убедимся, что это так. Умножим скалярное однородное уравнение на q . Тогда получим $(Aq, q) = A(q, q) = 0$. В силу положительной определенности оператора A следует, что $(q, q) = 0$. Это возможно только в случае $q = 0$. Таким образом, (3.1) имеет единственное решение при любой правой части.

Интегральное уравнение (3.1) решается приближенно: заменяется системой линейных уравнений относительно компенсирующих нагрузок, которая записывается для n точек контура тела. Оценка погрешности, получающейся в результате замены интегрального уравнения системой линейных уравнений, рассматривается в [8]. Заметим, что увеличение числа точек, а следовательно, и неизвестных приводит к увеличению точности рассматриваемого решения.

Пусть заданное тело занимает плоскую одно или многосвязную область Ω , ограниченную одним или несколькими контурами L_j (фиг. 2), на которых заданы нагрузки или смещения. Заменяем эту задачу другой, эквивалентной. Будем считать, что область Ω — является частью сплошной плоскости, внутри которой по контурам L_j действуют неизвестные распределенные нагрузки q_x и q_y (фиг. 2). Требуется найти такие значения q_x и q_y , при которых на контурах L_j будут выполняться заданные граничные условия. В этом случае напряженно-деформированное состояние внутри контура для бесконечной пластинки совпадает с напряженно-деформированным состоянием исходной задачи.

Разобьем контуры L_j каждый на n достаточно малых участков и примем, что в пределах каждого участка $q_x = \text{const}$ и $q_y = \text{const}$. Используя решение для сосредоточенной силы, действующей в плоскости, можно инте-

гированием по каждому участку и суммированием по всем участкам най-ти выражения напряжений и смещений в точках области Ω , включая кон-туры L_j . Если в области Ω , включая L_j , действуют сосредоточенные силы, то в эти выражения добавляются соответствующие слагаемые.

Полученные выражения напряжений и смещений, содержащие неиз-вестные значения q_x и q_y , вводятся в краевые условия задачи, записанные для n точек контуров L_j . Таким путем получаем систему уравнений, ли-нейных относительно q_x и q_y . Из решения этой системы линейных уравне-ний определяем q_x и q_y , а далее — значения напряжений и смещений на границе и внутри заданной области Ω , рассматриваемой как часть беско-нечной пластинки. Увеличение порядка решаемых систем линейных урав-нений позволяет лучше удовлетворить граничные усло-вия на контуре тела. При больших n система уравнений решается мето-

θ , рад	0	0.044	0.219	0.349	0.524	0.698	0.873	1.047	1.222	1.396	1.483	1.571
----------------	---	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Пластинка из фанеры с круговым отверстием

σ_θ	-0.707	-0.696	-0.416	-0.138	0.094	0.320	0.590	1.067	2.071	4.115	5.063	5.456
	3.425	3.265	2.539	1.718	1.259	1.074	1.078	1.305	1.955	3.306	3.926	4.086
	4.160	3.960	2.954	1.856	1.165	0.758	0.484	0.238	-0.116	-0.809	-1.137	-1.418

Пластинка из фанеры с жестким ядром $p=1$, $q=0$

σ_r	1.247	1.236	1.182	1.063	0.893	0.693	0.486	0.299	0.152	0.064	0.047	0.039
	0.038	0.045	0.073	0.168	0.313	0.479	0.560	0.714	0.636	0.277	0.091	0.003
	0	-0.070	-0.254	-0.424	-0.542	-0.594	-0.576	-0.487	-0.339	-0.151	-0.051	0

Пластинка из текстолита с дюралюминиевым кольцом $p=1$, $q=0$

σ_r	0.500	0.428	0.270	0.229	0.273	0.351	0.438	0.510	0.547	0.527	0.502	0.496
	0.183	0.141	0.168	0.078	0.182	0.451	0.790	1.062	1.152	1.106	1.090	1.078
	0	-0.026	-0.226	-0.472	-0.665	-0.774	-0.772	-0.675	-0.468	-0.192	-0.061	0

дом последовательных приближений. Существенное значение для скоро-сти сходимости итерационного процесса систем большого порядка имеет задание начального приближения. Учитывая специфику решаемых задач, можно предложить следующий прием. Вначале контуры границы тела раз-биваем на такое количество участков, чтобы система могла быть решена точным методом (например, методом Гаусса). Затем каждый участок гра-ницы дополнительно разбиваем на несколько частей (в зависимости от по-рядка решаемой системы) и в качестве начального приближения исполь-зуем ранее полученное решение для меньшего количества участков. При этом интенсивности компенсирующих распределенных нагрузок между точками середин участков считаем изменяющимися по линейному закону.

В основу изложенного выше подхода к решению плоской задачи поло-жено решение от сосредоточенной силы, действующей внутри упругой плоскости, поэтому рассмотренный метод может применяться для тел ко-нечных размеров, а также для неограниченных тел в случае однородного напряженного состояния на бесконечности.

4. Примеры. В качестве примеров рассмотрены некоторые случаи распреде-ления напряжений в бесконечной ортотропной пластинке, ослабленной круговым отверстием, для которых известны точные аналитические решения [3]. Во всех случаях начало координат помещалось в центр отверстия, а за направление осей X и Y принимались главные направления упругости. Упругие характеристики мате-риала пластинки взяты из [3]. На бесконечности пластинка подвержена действию равномерно распределенных нагрузок p и q соответственно в направлениях X и Y . В таблице приведены значения напряжений σ_θ на контуре отверстия пластинки, полученные для различных случаев нагружений. Первая строка для σ_θ соответст-вует $p=1$ и $q=0$, вторая — $p=1$ и $q=1$, третья — $p=0$, $q=1$.

При решении задач по описанной выше методике рассматривалось влияние числа контурных точек на точность решения сравнением результатов с известными точными решениями. Проведенные сравнения показали достаточную точность решения даже при небольшом числе точек. Для рассмотренных случаев на фиг. 3 приведен график зависимости Δ от числа контурных точек n , Δ — максимальное отклонение от точного решения. Как видно из приведенного графика, с увеличением числа контурных точек точность решения повышается.

Предлагаемый подход может быть применен к решению задач, связанных с контактом нескольких упругих тел, выполненных из различных упругих материалов. В этом случае каждое из тел рассматривается как часть своей бесконечной области. Для иллюстрации сказанного в таблице приводятся результаты решения задачи нагружения ортотропной пластинки с круговым отверстием, в которое впаяно жесткое ядро, а также задача одноосного растяжения ортотропной пластинки из текстолита, ослабленной круговым отверстием радиуса R , контур которого подкреплен дюралюминиевым кольцом постоянного сечения шириной $b=0.2R$.

Поступила 23 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Я. Решение основных задач теории упругости путем численной реализации метода интегральных уравнений. В сб.: Успехи механики деформируемых сред. М., «Наука», 1975, стр. 3–24.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
3. Лезницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1947.
4. Александров А. Я. Об одном приближенном методе решения плоских контактных задач теории упругости. Тр. Новосиб. ин-та инж. ж.-д. трансп., вып. 11, стр. 5–28. Трансжелдориздат, 1955.
5. Фридман В. М. Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Успехи матем. наук, 1956, т. 11, вып. 1 (67).
6. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1941.