МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1980

УДК 539.3.01

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПОЛОСУ С ДВУМЯ ОДИНАКОВЫМИ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

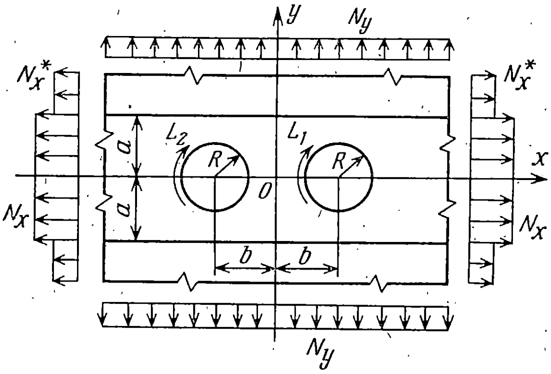
Н. И. МИРОНЕНКО

(Алма-Ата)

Исследуется напряженное состояние кусочно-однородной плоскости в зависимости от соотношения модулей сдвига полуплоскостей и полосы, скрепленных между собой. Рассматривается также предельный случай однородной плоскости с двумя одинаковыми круговыми отверстиями; последняя задача исследовалась многими авторами в том числе и Д. И. Шерманом [1, 2], метод которого [2, 3] (в сочетании с интегральным преобразованием Фурье) применяется здесь. На основании полученных теоретических результатов проведен численный анализ напряженного состояния кусочно-однородной и однородной плоскостей. В последнем случае наблюдается очень хорошее совпадение с результатами [1, 2] и других авторов.

1. Пусть напряженное состояние плоскости на бесконечности таково: N_x, N_x^* и N_y, где N_x, N_y — напряжения в полосе (см. фигуру), N_x^*, N_y — напряжения в полуплоскостях, причем все эти величины предполагаются постоянными; N_x и N_x^*, как увидим дальше, связаны некоторой зависимостью.

Для решения задачи расчленим плоскость на отдельные элементы: полоса ($|y|\leqslant a$), верхняя ($y>a$) и нижняя ($y<-a$) полуплоскости. В силу



симметрии будем рассматривать только верхнюю полуплоскость и полосу. Граничные условия для верхней полуплоскости на линии $y=a$ таковы ($X_x^{(1)}$, $Y_y^{(1)}$, $X_y^{(1)}$ — напряжения в верхней полуплоскости):

$$Y_y^{(1)}=N_y+Y_y^{(2)}, \quad X_y^{(1)}=X_y^{(2)} \tag{1.1}$$

где $Y_y^{(2)}$ и $X_y^{(2)}$ определяются из условий на линии контакта и стремятся к нулю (а $X_x^{(1)} \to N_x^*$) при $x \to \pm\infty$, $y \to \infty$:

$$\int_0^\infty X_y^{(2)} dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^\infty X_y^{(2)} dx = \int_{-\infty}^\infty Y_y^{(2)} dx = 0$$

Так как полоса скреплена с полуплоскостями, то для нее граничные условия (касающиеся напряжений) выглядят так:

$$Y_y^{(0)} = N_y + Y_y^{(2)}, \quad X_y^{(0)} = X_y^{(2)} \text{ при } y = \pm a, \quad X_x^{(0)} \to N_x \text{ при } x \to \pm\infty \tag{1.2}$$

где $X_x^{(0)}$, $X_y^{(0)}$, $Y_y^{(0)}$ — напряжения в полосе.

Отверстия свободны от нагрузок; G_0, σ_0, $\varkappa_0 = 3 - 4\sigma_0$ — упругие постоянные полосы (G_0 — модуль сдвига, σ_0 — коэффициент Пуассона), G_1, σ_1, $\varkappa_1$ — упругие постоянные полуплоскостей.

2. Граничные условия для полосы, согласно (1.2), заданы (будем временно считать $X_y^{(2)}$ и $Y_y^{(2)}$ известными). Введем потенциалы Колосова — Мусхелишвили [4], определяющие напряженное состояние полосы

$$\varphi_0(z) = \Gamma_0 z + \varphi_1(z) + \varphi_2(z), \qquad \psi_0(z) = \Gamma_0' z + \psi_1(z) + \psi_2(z) \tag{2.1}$$

$$\Gamma_0 = (N_x + N_y)/4, \qquad \Gamma_0' = -(N_x - N_y)/2$$

В (2.1) первое и третье слагаемые относятся к сплошной полосе, второе — результат влияния отверстий. Потенциалы $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$ определяются напряжениями $Y_y^{(2)}$, $X_y^{(2)}$ (1.2). Искомые напряжения в полосе представим также в виде нескольких слагаемых в соответствии с (2.1)

$$X_x^{(0)} = N_x + X_x + X_x^*, \qquad Y_y^{(0)} = N_y + Y_y + Y_y^*$$

$$X_y^{(0)} = X_y + X_y^*; \qquad X_y^* = X_y^{(2)}, \qquad Y_y^* = Y_y^{(2)}$$

$$\text{при} \quad y = \pm a, \qquad X_x^* \to 0 \text{ при } x \to \pm\infty$$

где X_x, Y_y, X_y характеризуют влияние отверстий, при $x \to \pm\infty$ они стремятся к нулю; кроме того, очевидно, $Y_y - iX_y = 0$ при $y = \pm a$.

Поскольку $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$ — потенциалы, описывающие напряженное состояние сплошной полосы при действии по ее граням напряжений $Y_y^{(2)}$ $X_y^{(2)}$, то их (эти потенциалы) нетрудно найти используя интегральное преобразование Фурье [5]:

$$\varphi_2(z) = -i \int_{-\infty}^\infty H_1(\mu) e^{-iz\mu/a} \frac{d\mu}{\mu}$$

$$\psi_2(z) = i \int_{-\infty}^\infty \left[\left(1 - \frac{iz\mu}{a}\right) H_1(\mu) + 2H_2(\mu) \right] e^{-iz\mu/a} \frac{d\mu}{\mu} \tag{2.2}$$

$$H_1(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[-T_s(\mu)Y_y^{**}+iT_c(\mu)X_y^{**}]$$

$$H_2(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{[T_s(\mu)+\mu T_c(\mu)]Y_y^{**}-i\mu T_s(\mu)X_y^{**}\}$$

$$T_s(\mu)=\operatorname{sh}\mu/S(\mu),\qquad T_c(\mu)=\operatorname{ch}(\mu)/S(\mu),\qquad S(\mu)=2\mu+\operatorname{sh}2\mu$$

$$Y_y^{**}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Y_y^{(2)}e^{i\lambda x}dx,\qquad X_y^{**}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}X_y^{(2)}e^{i\lambda x}dx,\qquad \mu=\lambda a$$

Теперь можно написать граничные условия для потенциалов $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ (им соответствуют напряжения X_x, X_y, Y_y):

$$\varphi_1'(t)+\overline{\varphi_1'(t)}+t\overline{\varphi_1''(t)}+\overline{\psi_1'(t)}=0\quad\text{при}\quad t=x\pm ia \tag{2.3}$$

$$\varphi_1(t)+t\overline{\varphi_1'(t)}+\overline{\psi_1(t)}=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{kj}^{*}\left(\frac{t-b_j}{R}\right)^k\ \text{на}\ L_j\quad (j=1,2)$$

$$2\delta_{1j}^{*}=-\delta_{1j}^{(1)}-\overline{\delta_{1j}^{(1)}}-2\Gamma_0R,\qquad 2\delta_{kj}^{*}=-\delta_{kj}^{(1)}\quad (k\geqslant 2)$$

$$2\delta_{-k,\,j}^{*}=-(k+1)\,b_jR^{-1}\overline{\delta_{k+1,\,j}^{(1)}}-(k+2)\,\overline{\delta_{k+2,\,j}^{(1)}}-\delta_{kj}^{(2)}-p_k\Gamma_0'R$$

$$\delta_{kj}^{(1)}=-(-i)^{k-1}\frac{\varepsilon_1^k}{k!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu^{k-1}H_1(\mu)\,e^{-ib_j\mu/a}\,d\mu$$

$$\delta_{kj}^{(2)}=i^{k-1}\frac{\varepsilon_1^k}{k!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu^{k-1}\left\{\left(k+1+i\frac{b_j}{a}\mu\right)H_1(\mu)+2H_2(\mu)\right\}e^{ib_j\mu/a}\,d\mu$$

$$b_1=-b_2=b,\qquad \varepsilon_1=R/a,\qquad p_1=1,\qquad p_k=0\quad\text{при}\quad k\geqslant 2$$

Здесь необходимо отметить, что $H_1(\mu)$ и $H_2(\mu)$ — четные вещественные функции, поэтому $\delta_{kj}^{(1)}$ и $\delta_{kj}^{(2)}$ вещественны.

Используя методику, развитую в [6–8] (и основанную на методе Д. И. Шермана [2, 3]), представим решение задачи (2.3) в таком виде

$$\varphi_1(z)=\varphi(z)-\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{*}\left[\left(\frac{R}{z-b}\right)^{k+1}+(-1)^k\left(\frac{R}{z+b}\right)^{k+1}\right]$$

$$\psi_1(z)=\psi(z)-\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k^{(1)}\left[\left(\frac{R}{z-b}\right)^{k+1}+(-1)^k\left(\frac{R}{z+b}\right)^{k+1}\right] \tag{2.4}$$

$$\beta_k^{(1)}=\beta_k^{*}+k\varepsilon_3^{-1}\alpha_{k-1}^{*}+(k-1)\alpha_{k-2}^{*},\qquad \alpha_{-1}^{*}=\alpha_{-2}^{*}=0,\qquad \varepsilon_3=R/b$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются формулами (2.2) для $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$ соответственно, только в последних необходимо $H_1(\mu)$ заменить на $K_1(\mu)$, а $H_2(\mu)$ — на $K_2(\mu)$. Причем имеем

$$K_1(\mu)=\sum_{j=0}A_j(\mu)\,\{\alpha_j^{*}[a_j(\mu)+\gamma(\mu)]-\beta_j^{*}\} \tag{2.5}$$

$$K_2(\mu)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j(\mu)\{\alpha_j{}^*[2\mu^2-b(\mu)a_j(\mu)]+\beta_j{}^*b(\mu)\}$$

$$A_j(\mu)=\frac{(\varepsilon_1\mu)^{j+1}}{j!}\frac{\cos(^1/_2j\pi+\varepsilon_2\mu)}{S(\mu)},\qquad a_j(\mu)=j+\frac{(\varepsilon_1\mu)^2}{j+2}$$

$$\gamma(\mu)=1-2\mu+e^{-2\mu},\qquad 2b(\mu)=2-\gamma(\mu),\qquad \varepsilon_2=b/a$$

Заметим, что $K_1(\mu)$, $K_2(\mu)$, так же как и $H_1(\mu)$, $H_2(\mu)$, являются четными вещественными функциями, поэтому здесь приведены их значения только для $\mu>0$.

Коэффициенты $\alpha_j{}^*$, $\beta_j{}^*$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}{}^*x_j=s_k\quad{\scriptstyle(k=1,2,3,\ldots)},\qquad x_{2j+1}=\alpha_j{}^*,\qquad x_{2j+2}=\beta_j{}^*\tag{2.6}$$

$$s_k=-2\overset{*}{\delta}_{-(k+1)/2,1}\quad{\scriptstyle(k=1,3,5\ldots)},\qquad s_k=-2\tau_{k/2}\overset{*}{\delta}_{k/2,1}\quad{\scriptstyle(k=2,4,6,\ldots)},\qquad \tau_1={}^1/_2,\qquad \tau_{n\geqslant2}=1$$

Матрица системы (2.6) имеет вид (δ_{ij} — символы Кронекера):

$$\begin{aligned}\overset{*}{a}_{2m+1,2n+1}&=\delta_{2m+1,2n+1}-\int_0^\infty T_{mn}{}^*(\mu)[e^{-4\mu}\Omega_{mn}(-\mu)+2e^{-2\mu}S(\mu)]d\mu+\\&+(n+1)E_{mn}\left[\left(\frac{\varepsilon_3}{2}\right)^2C_{r+3}^{m+2}-C_{r+1}^{m+1}\right]\\\overset{*}{a}_{2m+2,2n+2}&=\tau_{n+1}\delta_{2m+2,2n+2}-\int_0^\infty T_{mn}{}^*(\mu)d\mu\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\overset{*}{a}_{2m+1,2n+2}=\int_0^\infty T_{mn}{}^*(\mu)\Omega_m{}^*(\mu)d\mu+Z_{mn},\qquad \overset{*}{a}_{2m+2,2n+1}=\int_0^\infty T_{mn}{}^*(\mu)\Omega_n{}^*(\mu)d\mu+Z_{mn}$$

$$T_{mn}{}^*(\mu)=\frac{2\varepsilon_1}{(m+1)!n!}\frac{(\varepsilon_1\mu)^r}{S(\mu)}\cos\left(m\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2\mu\right)\cos\left(n\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2\mu\right)$$

$$\Omega_j(\mu)=e^{-2\mu}[a_j(\mu)+\gamma(-\mu)],\qquad \Omega_j{}^*(\mu)=e^{-2\mu}\Omega_j(-\mu),\qquad \Omega_{mn}(\mu)=\Omega_m(\mu)\Omega_n(\mu)$$

$$E_{mn}=\left(\frac{\varepsilon_3}{2}\right)^{r+1}\cos r\pi,\quad r=m+n+1,\quad Z_{mn}=E_{mn}C_r^{m+1},$$

$$C_k^j=\frac{k!}{j!(k-j)!}\quad{\scriptstyle(m,n=0,1,2,\ldots)}$$

Между элементами матрицы существует зависимость

$$\overset{*}{a}_{\alpha,\beta}/\overset{*}{a}_{\beta,\alpha}=(n+1)/(m+1)\quad{\scriptstyle(\alpha=2m+1,2m+2;\beta=2n+1,2n+2)}\tag{2.8}$$

Поскольку напряжения $Y_y^{(2)}$ и $X_y^{(2)}$ неизвестны, то правые части s_k в (2.6) также неизвестны. Следовательно, в полученном решении (2.1), (2.2), (2.4) для полосы необходимо еще определить $H_1(\mu)$ и $H_2(\mu)$, а также α_j^* и β_j^*. Для этого рассмотрим верхнюю полуплоскость.

3. Учитывая симметрию (по координате x) граничных условий (1.1) и используя интегральное преобразование Фурье [5], получим решение для верхней полуплоскости ($y>a$):

$$\varphi_3(z)=-i\int_0^\infty M_1(\mu)e^{\mu_1}\frac{d\mu}{\mu}+\Gamma_1 z \tag{3.1}$$

$$\psi_3(z)=i\int_0^\infty\left[\left(2+\frac{iz}{a}\right)\mu M_1(\mu)+M_2(\mu)\right]e^{\mu_1}\frac{d\mu}{\mu}+\Gamma_1' z$$

$$M_1(\mu)=(2\pi)^{-1/2}(Y_j^{**}+iX_y^{**}),\quad M_2(\mu)=-(2\pi)^{-1/2}(Y_y^{**}-iX_y^{**})$$

$$\Gamma_1={}^1/_4(N_x^*+N_y),\qquad \Gamma_1'=-{}^1/_2(N_x^*-N_y),\qquad \mu_1=i(z-ia)\mu/a$$

Здесь по-прежнему Y_y^{**} и X_y^{**} неизвестны.

Теперь можно учесть взаимодействие полосы с полуплоскостями не только в напряжениях, но и в перемещениях

$$u_0'+iv_0'=u_1'+iv_1' \text{ при } y=\pm a \tag{3.2}$$

где штрихами обозначено дифференцирование по x; u_0, v_0 — перемещения в полосе, u_1, v_1 — перемещения в полуплоскостях.

Выпишем выражения для сумм, входящих в (3.2)

$$2G_0(u_0'+iv_0')=\varkappa_0\varphi_0'(z)-\overline{\varphi_0'(z)}-z\overline{\varphi_0''(z)}-\overline{\psi_0'(z)} \tag{3.3}$$

$$2G_1(u_1'+iv_1')=\varkappa_1\varphi_3'(z)-\overline{\varphi_3'(z)}-z\overline{\varphi_3''(z)}-\overline{\psi_3'(z)} \tag{3.4}$$

Далее необходимо проделать следующее: интегралы, входящие в (2.1), преобразовать таким образом, чтобы интегрирование выполнялось от нуля до ∞; суммы в (2.4) преобразовать используя формулы

$$\frac{1}{(z-z_0)^n}=\frac{(\pm i)^n}{(n-1)!}\int_0^\infty\lambda^{n-1}e^{\mp i\lambda(z-z_0)}d\lambda$$

где верхние знаки относятся к случаю $\operatorname{Im}(z-z_0)<0$, нижние — к случаю $\operatorname{Im}(z-z_0)>0$.

После этого, подставив (2.1) в (3.3), а (3.1) — в (3.4) и используя (3.2), получим выражение (его выписать нетрудно), из которого сразу следует система двух уравнений для Y_y^{**} и X_y^{**}. Используя это выражение (или, что то же, (3.2)) при $x\to\pm\infty$, получим

$$\frac{\varkappa_0+1}{G_0}N_x+\frac{\varkappa_0-3}{G_0}N_y=\frac{\varkappa_1+1}{G_1}N_x^*+\frac{\varkappa_1-3}{G_1}N_y$$

Отсюда

$$\frac{\varkappa_0-3}{G_0}=\frac{\varkappa_1-3}{G_1},\quad N_x^*=\frac{\lambda_1}{\lambda_0}N_x,\quad \lambda_j=\frac{\sigma_j}{1-\sigma_j}$$

Подставив найденные Y_y^{**} и X_y^{**} в $H_1(\mu)$ и $H_2(\mu)$, будем иметь

$$H_1(\mu)=\frac{1}{\Delta(\mu)}\sum_{j=0}^{\infty}\{\alpha_j^* P_j^{(1)}(\mu)+\beta_j^* P_j^{(2)}(\mu)\} \tag{3.5}$$

$$H_2(\mu)=\frac{1}{\Delta(\mu)}\sum_{j=0}^{\infty}\{\alpha_j^* R_j^{(1)}(\mu)+\beta_j^* R_j^{(2)}(\mu)\},\quad \mu>0$$

$$P_j^{(1)}(\mu)=-A_j(\mu)e^{-2\mu}[\varkappa_{21}\Omega_j(\mu)+\varkappa_{11}\Omega_j(-\mu)],\quad P_j^{(2)}(\mu)=A_j(\mu)(\varkappa_{11}+\varkappa_{21}e^{-4\mu})$$

$$R_j^{(1)}(\mu)={}^1/_2A_j(\mu)e^{-2\mu}\{[\varkappa_{21}(1-2\mu)-\varkappa_{23}e^{2\mu}]\Omega_j(\mu)+$$
$$+[\varkappa_{11}(1+2\mu)-\varkappa_{22}e^{-2\mu}]\Omega_j(-\mu)\}$$

$$R_j^{(2)}(\mu)={}^1/_2A_j(\mu)\{-\varkappa_{11}(1+2\mu)+(\varkappa_{22}+\varkappa_{23})e^{-2\mu}-\varkappa_{21}(1-2\mu)e^{-4\mu}\}$$

$$\Delta(\mu)=\varkappa_{11}+\varkappa_{21}e^{-4\mu}+\varkappa_{11}\varkappa_{21}\varkappa_{13}^{-1}t_1(\mu),\quad t_1(\mu)=1+4\mu e^{-2\mu}-e^{-4\mu}$$
$$\varkappa_{11}=1+\varkappa_1G_0/G_1,\ \varkappa_{13}=1+\varkappa_0$$
$$\varkappa_{21}=G_0/G_1-1,\ \varkappa_{22}=\varkappa_{11}-\varkappa_{13},\ \varkappa_{23}=\varkappa_{13}+\varkappa_{21}$$

Проделав то же самое с $M_1(\mu)$ и $M_2(\mu)$, приходим к следующим выражениям:

$$M_1(\mu)=\frac{1}{\Delta(\mu)}\sum_{j=0}^{\infty}[\alpha_j^*B_j^{(1)}(\mu)+\beta_j^*B_j^{(2)}(\mu)]$$

$$M_2(\mu)=\frac{1}{\Delta(\mu)}\sum_{j=0}^{\infty}[\alpha_j^*C_j^{(1)}(\mu)+\beta_j^*C_j^{(2)}(\mu)]$$

$$B_j^{(1)}(\mu)=e^{\mu}A_j(\mu)\{-[\varkappa_{13}+\varkappa_{21}t_1(\mu)]\Omega_j(\mu)+\varkappa_{13}e^{-4\mu}\Omega_j(-\mu)\}$$

$$C_j^{(1)}(\mu)=e^{-\mu}A_j(\mu)\{\varkappa_{13}\Omega_j(\mu)-[\varkappa_{11}t_1(\mu)+\varkappa_{13}e^{-4\mu}]\Omega_j(-\mu)\}$$

$$B_j^{(2)}(\mu)=\varkappa_{21}e^{-\mu}t_1(\mu)A_j(\mu),\quad C_j^{(2)}(\mu)=\varkappa_{11}e^{\mu}t_1(\mu)A_j(\mu)$$

Остается определить α_j^* и β_j^*, через которые выражаются искомые потенциалы. Для этого подставим (3.5) в δ_{kj}^*, а последние — в s_k. В результате получим

$$s_k=-\sum_{j=1}^{\infty}a_{kj}^{**}x_j+b_k^*\ \ {\scriptstyle (k=1,2,\ldots)};\quad b_1^*=\Gamma_0'R,\ b_2^*=\Gamma_0R,\ b_{k\geqslant3}^*=0 \tag{3.6}$$

Матрицу a_{kj}^{**} запишем так ($m, n=0, 1, 2, \ldots$):

$$a_{2m+1,2n+1}^{**}=\int_0^{\infty}T_{mn}^{**}(\mu)\{\varkappa_{21}\Omega_{mn}(\mu)+\varkappa_{11}e^{-4\mu}\Omega_{mn}(-\mu)+2\varkappa_{13}e^{-2\mu}S(\mu)\}d\mu,$$

$$T_{mn}^{**}(\mu)=\frac{1}{\Delta(\mu)}T_{mn}^*(\mu)$$

$$a^{**}_{2m+2,2n+2}=\int\limits_0^\infty T^{**}_{mn}(\mu)(\varkappa_{11}+\varkappa_{21}e^{-4\mu})d\mu,\quad a^{**}_{2m+1,2n+2}=-\int\limits_0^\infty T^{**}_{mn}(\mu)K_m^*(\mu)d\mu \tag{3.7}$$

$$a^{**}_{2m+2,2n+1}=-\int\limits_0^\infty T^{**}_{mn}(\mu)K_n^*(\mu)d\mu,\quad K_j^*(\mu)=e^{-2\mu}[\varkappa_{21}\Omega_j(\mu)+\varkappa_{11}\Omega_j(-\mu)]$$

Между элементами этой матрицы существует та же зависимость (2.8). Подставляя (3.6) в (2.6), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения α_n^* и β_n^*:

$$\sum_{j=1}^\infty a_{kj}x_j=b_k^*,\quad a_{kj}=a_{kj}^*+a_{kj}^{**}\quad (k=1,2,\ldots) \tag{3.8}$$

где a_{kj}^* и a_{kj}^{**} определяются зависимостями (2.7) и (3.7) соответственно, используя которые можно показать, что система (3.8) является по крайней мере квазирегулярной.

Заметим, что результаты этой работы в какой-то мере могут быть использованы в горном деле [9], а также в машиностроении. В последнем случае «полосу между двумя полуплоскостями можно интерпретировать с некоторым приближением как шов сварного соединения» [10].

4. Перейдем к численному анализу напряженного состояния исследуемой плоскости, который проводился для случая плоской деформации. Значения упругих постоянных были взяты из [10], чтобы можно было сравнить численные результаты для одного и двух отверстий (заметим, что результаты для случая одного симметрично расположенного отверстия можно получить из приведенной выше теории). Первый вариант принятых постоянных: $G_0/G_1=1/4$, $\sigma_1=4\sigma_0=0.4$, $\varkappa_0=3-4\sigma_0=2.6$, $\varkappa_1=1.4$, $\lambda_0=\sigma_0/(1-\sigma_0)=1/9$, $\lambda_1=2/3$ – для полосы более «мягкой», чем полуплоскости. Второй вариант постоянных: $G_0/G_1=4$, $\sigma_0=4\sigma_1=0.4$, $\varkappa_0=1.4$, $\varkappa_1=2.6$, $\lambda_0=2/3$, $\lambda_1=1/9$ – для полосы более «жесткой», чем полуплоскости. Кроме того, рассматривался случай однородной плоскости $G_0=G_1$, $\sigma_0=\sigma_1=1/4$.

Часть численного материала приводится в табл. 1–4 (при этом $\varepsilon_1=R/a$ принималось равным 0.1, 0.2, . . ., 0.9, $\varepsilon_2=b/a=1$). Вычисления выполнены на ЭВМ БЭСМ-6.

В табл. 1 даны значения напряжения σ_θ (с точностью до множителей N_x или N_y) для контура правого отверстия (угол θ отсчитывается от оси Ox к оси Oy против движения часовой стрелки). Каждому значению ε_1 в таблице соответствуют две строки: верхняя относится к случаю $N_x\neq0$, $N_y=0$, нижняя – к случаю $N_x=0$, $N_y\neq0$ (для табл. 2 – аналогично). Причем первые шесть строк соответствуют случаю более мягкой полосы, поэтому $N_x^*=(\lambda_1/\lambda_0)N_x=6N_x$; для случая более жесткой полосы $N_x^*=N_x/6$.

Если полосу рассматривать как пласт с двумя выработками, то приходим к задаче горного дела [9]. В этом случае $N_y=-P$, $N_x=-\lambda_0P$, $N_x^*=-\lambda_1P$, $P=\gamma h$, где γ – объемный вес, h – глубина заложения выработки. Для определения σ_θ в этом случае также можно воспользоваться табл. 1. Тогда следует верхнее число умножить на λ_0 и сложить с соответствующим нижним числом, результат умножить на $-P$; это и будет σ_θ (заметим, что $\lambda_0=1/9$ для полосы более мягкой и $\lambda_0=2/3$ для полосы более жесткой).

Необходимо отметить, что при указанном выше всестороннем сжатии (при $\varepsilon_1\geqslant0.8$) в окрестностях точки $(0, a)$ – полоса более жесткая – и точки (a, R) – полоса более мягкая – наблюдаются незначительные растягивающие напряжения, которые могут стать причиной разрушений.

Табл. 2 содержит значения σ_θ для однородной плоскости (о структуре таблицы сказано выше). Данными табл. 2 можно пользоваться и при определении σ_θ в случае действия равномерного давления по контурам отверстий. Для этого достаточно сложить соответствующие верхнее и нижнее числа, вычесть единицу и получить искомое напряжение с точностью до множителя, равного абсолютной величине давления.

Таблица 1

ε_1	$\theta°=0$	30	60	90	120	150	180
0.5	−0.699 2.573	0.220 1.660	1.821 0.073	2.327 −0.506	1.462 0.194	0.074 1.751	−0.409 2.506
0.7	−0.657 2.473	0.322 1.491	1.797 0.009	1.971 −0.297	1.217 0.125	−0.050 1.700	−0.128 2.469
0.9	−0.657 2.463	0.423 1.371	1.766 −0.039	1.537 −0.220	1.123 −0.035	−0.142 1.488	−0.134 3.319
0.5	−1.150 3.620	−0.150 2.577	2.110 0.079	3.340 −1.405	1.714 0.430	−0.263 2.726	−0.725 3.388
0.7	−1.190 4.037	−0.313 3.217	2.114 0.507	3.940 −1.997	1.351 1.148	−0.565 3.582	−0.354 4.037
0.9	−1.164 4.472	−0.488 4.043	2.010 1.509	5.211 −2.140	1.015 1.833	−0.647 4.462	−0.769 8.863

Таблица 2

ε_1	$\theta°=0$	30	60	90	120	150	180
0.1	−0.991 3.001	0.003 2.002	1.990 0.006	2.980 −0.990	1.985 0.009	0.002 2.003	−0.989 3.000
0.2	−0.972 3.004	0.011 2.008	1.968 0.020	2.927 −0.964	1.934 0.038	0.004 2.016	−0.948 2.997
0.3	−0.948 3.015	0.024 2.019	1.945 0.036	2.852 −0.931	1.841 0.091	−0.004 2.046	−0.872 2.993
0.4	−0.925 3.034	0.037 2.036	1.927 0.051	2.772 −0.900	1.710 0.161	−0.033 2.104	−0.756 2.994
0.5	−0.908 3.066	0.049 2.062	1.916 0.066	2.703 −0.881	1.558 0.232	−0.095 2.200	−0.609 3.020
0.6	−0.899 3.112	0.057 2.100	1.911 0.083	2.650 −0.878	1.406 0.286	−0.189 2.338	−0.456 3.116
0.7	−0.896 3.174	0.059 2.153	1.909 0.107	2.612 −0.889	1.271 0.302	−0.293 2.503	−0.352 3.381
0.8	−0.901 3.260	0.056 2.228	1.905 0.145	2.586 −0.913	1.155 0.258	−0.376 2.658	−0.378 4.034
0.9	−0.916 3.394	0.044 2.346	1.899 0.209	2.569 −0.953	1.061 0.104	−0.399 2.682	−0.611 5.799

Отметим, что при $N_x=0$, $N_y\neq0$ в случае однородной плоскости напряжение σ_θ в точке $\theta=0°$ возрастает с увеличением отверстий, в точке $\theta=180°$ вначале (до $\varepsilon_1\leqslant0.3$) падает, а затем возрастает; в случае более мягкой полосы в первой из упомянутых точек оно падает при $\varepsilon_1\leqslant0.8$, а затем возрастает; во второй точке вначале (при $\varepsilon_1\leqslant0.6$) также падает, потом возрастает; в случае более жесткой полосы в обеих точках σ_θ возрастает с увеличением отверстий.

Табл. 3 и 4 содержат величины напряжения $Y_y^{(0)}$ в сечении $y=0$ (точки *1–5* идут от начала координат с шагом $(a-R)/4$ и находятся на отрезке $0\leqslant x\leqslant a-R$,

Таблица 3

№	$\varepsilon_1=0.5$	0.7	0.9	0.5	0.7	0.9
1	1.259	1.717	2.996	1.537	2.861	8.000
2	1.291	1.753	3.015	1.598	2.924	8.050
3	1.409	1.868	3.072	1.811	3.122	8.203
4	1.706	2.088	3.171	2.290	3.477	8.468
5	2.506	2.469	3.319	3.388	4.037	8.863
6	2.573	2.473	2.463	3.620	4.037	4.471
7	1.209	1.315	1.426	1.391	1.643	1.959
8	1.065	1.111	—	0.981	0.976	—

Таблица 4

№	$\varepsilon_1=0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	1.010	1.046	1.118	1.249	1.469	1.818	2.352	3.261	5.235
2	1.012	1.053	1.136	1.280	1.512	1.869	2.412	3.303	5.268
3	1.021	1.086	1.208	1.398	1.668	2.040	2.571	3.433	5.368
4	1.063	1.229	1.445	1.742	2.048	2.401	2.853	3.667	5.541
5	3.000	2.997	2.993	2.994	3.020	3.116	3.381	4.034	5.799
6	3.001	3.004	3.015	3.034	3.066	3.112	3.174	3.261	3.794
7	1.023	1.078	1.152	1.237	1.329	1.426	1.529	1.643	1.779
8	1.002	1.007	1.014	1.024	1.037	1.053	1.073	1.098	—

остальные точки имеют следующие абсциссы: $x_6=a+R$, $x_7=x_6+0.4a$, $x_8=x_7+1.4a$). Левая половина табл. 3 относится к случаю более мягкой полосы, правая – к случаю более жесткой полосы; табл. 4 характеризует однородную плоскость. В таблицах напряжения даны с точностью до множителя N_y.

Поступила 24 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шерман Д. И.* О напряжениях в плоской весомой среде с двумя одинаковыми симметрично расположенными круговыми отверстиями. ПММ, 1951, т. 15, вып. 6.
2. *Шерман Д. И.* К вопросу о напряженном состоянии весомой полуплоскости с двумя заглубленными круговыми отверстиями. Тр. Ин-та физики Земли АН СССР, 1959, № 2 (169).
3. *Шерман Д. И.* О напряжениях в весомой полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями. ПММ, 1951, т. 15, вып. 3.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
5. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
6. *Мироненко Н. И.* Чистый изгиб полосы с двумя круговыми отверстиями. В сб.: Прикладные проблемы прочности и пластичности, № 8. Изд-во Горьковск. ун-та, 1978.
7. *Мироненко Н. И.* О напряженном состоянии полосы, ослабленной двумя одинаковыми круговыми отверстиями, расположенными в поперечном направлении. ПММ, 1978, т. 42, вып. 5.
8. *Мироненко Н. И.* О чистом изгибе полосы, ослабленной двумя одинаковыми круговыми отверстиями. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6.
9. *Ержанов Ж. С., Айталиев Ш. М., Туебаев М. К.* Устойчивость пластовых горных выработок. Алма-Ата, «Наука», 1977.
10. *Грилицкий Д. В., Опанасович В. К., Мокрик Р. И., Белокур И. П.* О концентрации напряжений возле кругового отверстия в соединенных разнородных пластинах при растяжении. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 10.