УДК 531.3

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ МАЯТНИКА

НГУЕН ВАН ДИНЬ

(Ханой)

Рассматривается задача об оптимальном по быстродействию перемещении маятника ограниченной силой; некоторые результаты исследования этой задачи были изложены в [1].

1. Рассмотрим управляемую систему, описываемую дифференциальными уравнениями

$$x^{\cdot\cdot}+\frac{\chi}{1+\chi}\varphi^{\cdot\cdot}=u(t),\qquad \varphi^{\cdot\cdot}+x^{\cdot\cdot}+\varphi=0 \tag{1.1}$$

Систему (1.1) можно представить в виде

$$x^{\cdot}=y,\quad y^{\cdot}=\chi\varphi+(1+\chi)u(t),\quad \varphi^{\cdot}=\omega,\quad \omega^{\cdot}=-(1+\chi)(\varphi+u(t)) \tag{1.2}$$

Здесь χ – положительное число, $u(t)$ – управление с ограничением $|u(t)|\leqslant 1$. В векторной форме имеем

$$\mathbf{z}^{\cdot}=\mathbf{A}\mathbf{z}+\mathbf{B}u(t) \tag{1.3}$$

$$\mathbf{z}=\begin{Vmatrix} x\\ y\\ \varphi\\ \omega \end{Vmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \chi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -(1+\chi) & 0 \end{Vmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{Vmatrix} 0\\ 1+\chi\\ 0\\ -(1+\chi) \end{Vmatrix}$$

Задача заключается в отыскании оптимального по быстродействию управления $u(t)$, переводящего рассматриваемую систему из начального состояния равновесия

$$t=0,\quad x(0)=-a,\quad x^{\cdot}(0)=\varphi(0)=\varphi^{\cdot}(0)=0 \tag{1.4}$$

в конечное состояние равновесия

$$t=T,\quad x(T)=x^{\cdot}(T)=\varphi(T)=\varphi^{\cdot}(T)=0 \tag{1.5}$$

Здесь a – положительное заданное число, T – неизвестное минимальное время. Составим функцию Гамильтона

$$H=p_x y+p_y[\chi\varphi+(1+\chi)u(t)]+p_\varphi\omega-p_\omega(1+\chi)(\varphi+u(t))$$

и систему сопряженных переменных

$$p_x^{\cdot}=0,\quad p_y^{\cdot}=-p_x,\quad p_\varphi^{\cdot}=-\chi p_y+(1+\chi)p_\omega,\quad p_\omega^{\cdot}=-p_\varphi \tag{1.6}$$

По принципу Понтрягина [2] находим

$$u(t)=\operatorname{sign}(p_y-p_\omega)=\begin{cases}+1 & \text{при}\ p_y-p_\omega>0\\ -1 & \text{при}\ p_y-p_\omega<0\end{cases} \tag{1.7}$$

Интегрируя систему (1.6), нетрудно получить

$$p_x=-A(1+\chi),\quad p_\varphi=\sqrt{1+\chi}\,C\cos\sqrt{1+\chi}\,(t+\psi)$$
$$p_y=(1+\chi)(At+B),\quad p_\omega=\chi(At+B)-C\sin\sqrt{1+\chi}\,(t+\psi) \tag{1.8}$$

где A, B, C, ψ – неопределенные постоянные.

Отсюда

$$p_y-p_\omega=At+B+C\sin\sqrt{1+\chi}\,(t+\psi) \tag{1.9}$$

Итак, оптимальное управление является кусочно-постоянной функцией, поочередно равной +1 и –1. Заметим, что условие $H\geqslant 0$ в момент T здесь удовлетворяется.

2. Возможный вид оптимального управления (в предположении, что оптимальное управление существует и единственно) определим в п. 3 на основе замечаний, излагаемых в п. 2. Для удобства через $u[t, (t_0t_*)]$ обозначим управление $u(t)$ на интервале времени (t_0t_*); $(t, x, x^{\cdot}, \varphi, \varphi^{\cdot})$ – состояние системы;

$$(t_0x_0x_0^{\cdot}\varphi_0\varphi_0^{\cdot})\xrightarrow{u[t,(t_0t_*)]}(t_*x_*x_*^{\cdot}\varphi_*\varphi_*^{\cdot})$$

переход системы за время t_*-t_0 управлением $u(t)$ из состояния $(t_0x_0x_0^{\bullet}\varphi_0\varphi_0^{\bullet})$ в состояние $(t_*x_*x_*^{\bullet}\varphi_*\varphi_*^{\bullet})$; n и $(t_1t_2\dots t_n)$ — число и длины интервалов постоянства оптимального управления.

Замечание 1. Пусть имеем

$$(t_0x_0x_0^{\bullet}\varphi_0\varphi_0^{\bullet})\xrightarrow{u[t,\,(t_0,\,t_*)]}(t_*x_*x_*^{\bullet}\varphi_*\varphi_*^{\bullet}). \tag{2.1}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix}t_1,\ x_1,\ x_*^{\bullet}\\ -\varphi_*,\ \varphi_*^{\bullet}\end{pmatrix}\xrightarrow{v[\tau,\,(t_1,\,t_1+\Delta t)]=-u[\tau=t_1+t_*-t,\,(t_1,\,t_1+\Delta t)]}\begin{pmatrix}t_1+\Delta t,\ x_1+\Delta x_1x_0^{\bullet}\\ -\varphi_0,\ \varphi_0^{\bullet}\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Здесь $\Delta t=t_*-t_0$, $\Delta x=x_*-x_0$.

Действительно, линейным преобразованием

$$X-x_1=x_*-x,\quad \Phi=-\varphi,\quad \tau-t_1=t_*-t \tag{2.3}$$

система дифференциальных уравнений (1.1) с управлением $u(t)$ преобразуется к соответствующей системе с управлением $v(\tau)$; при этом граничные условия $(t_0x_0x_0^{\bullet}\varphi_0\varphi_0^{\bullet})$, $(t_*x_*x_*^{\bullet}\varphi_*\varphi_*^{\bullet})$ преобразуются к $(t_1+\Delta t,\ x_1+\Delta x,\ x_0^{\bullet},\ -\varphi_0,\ \varphi_0^{\bullet})$, $(t_1,\ x_1,\ x_*^{\bullet},\ -\varphi_*,\ \varphi_*^{\bullet})$. В этом состоит доказательство.

Замечание 2. В плоскости $(t,\ u)$ точка $(t=\frac{1}{2}T,\ u=0)$ является центром симметрии оптимального управления $u[t,\ (0,\ T)]$, т. е.

$$n=2k,\quad t_j=t_{2k-j+1}\quad (j=1,\ 2,\dots k,\ k=1,\ 2\dots) \tag{2.4}$$

Действительно, имеем

$$(0,\ x(0)=-a,\quad x_0^{\bullet}(0)=0,\quad \varphi(0)=0,\quad \varphi^{\bullet}(0)=0)\xrightarrow{u[t,\,(0,\,T)]}(T,\ x(T)=0,$$
$$x^{\bullet}(T)=0,\quad \varphi(T)=0,\quad \varphi^{\bullet}(T)=0) \tag{2.5}$$

Ясно, что $x^{\bullet}(0)=x^{\bullet}(T)$, $\varphi(0)=-\varphi(T)$, $\varphi^{\bullet}(0)=\varphi^{\bullet}(T)$, следовательно, в силу первого замечания также имеем

$$(0,\ x(0)=-a,\quad x^{\bullet}(0)=0,\quad \varphi(0)=0,\quad \varphi^{\bullet}(0)=0)\xrightarrow{v[\tau,\,(0,\,T)]=-u[\tau=T-t,\,(0,\,T)]}$$
$$\to(T,\ x(T)=0,\quad x^{\bullet}(T)=0,\quad \varphi(T)=0,\quad \varphi^{\bullet}(T)=0) \tag{2.6}$$

Сравнивая (2.5) и (2.6), из единственности оптимального управления следует, что

$$v[\tau,\ (0,\ T)]=u[t,\ (0,\ T)] \tag{2.7}$$

т. е. в развернутом виде получим (2.4).

Замечание 3. В оптимальном движении выполняются равенства

$$x(\tfrac{1}{2}T)=-\tfrac{1}{2}a,\quad \varphi(\tfrac{1}{2}T)=0 \tag{2.8}$$

Действительно, имеем

$$(0,\ -a,\ 0,\ 0,\ 0)\xrightarrow{u[t,\,(0,\,\frac{1}{2}T)]}(\tfrac{1}{2}T,\ x(\tfrac{1}{2}T),\ x^{\bullet}(\tfrac{1}{2}T),\ \varphi(\tfrac{1}{2}T),\ \varphi^{\bullet}(\tfrac{1}{2}T)) \tag{2.9}$$

$$(\tfrac{1}{2}T,\ x(\tfrac{1}{2}T),\ x^{\bullet}(\tfrac{1}{2}T),\ \varphi(\tfrac{1}{2}T),\ \varphi^{\bullet}(\tfrac{1}{2}T))\xrightarrow{u[t,\,(\frac{1}{2}T,\,T)]}$$
$$\to(T,\ x(T)=0,\quad x^{\bullet}(T)=0,\quad \varphi(T)=0,\quad \varphi^{\bullet}(T)=0) \tag{2.10}$$

В силу первого замечания из (2.10) следует, что

$$(0,\ -a,\ 0,\ 0,\ 0)\xrightarrow{v[\tau,\,(0,\,\frac{1}{2}T)]=-u[\tau=T-t,\,(\frac{1}{2}T,\,T)]}$$
$$\to(T-\tfrac{1}{2}T=\tfrac{1}{2}T,\ -a-x(\tfrac{1}{2}T),\ x^{\bullet}(\tfrac{1}{2}T),\ -\varphi(\tfrac{1}{2}T),\ \varphi^{\bullet}(\tfrac{1}{2}T)) \tag{2.11}$$

На основании симметрии оптимального управления (замечание 2) имеем

$$u[t,\ (0,\ \tfrac{1}{2}T)]\equiv-u[\tau=T-t,\ (\tfrac{1}{2}T,\ T)] \tag{2.12}$$

Следовательно

$$(\tfrac{1}{2}T,\ x(\tfrac{1}{2}T),\ x^{\bullet}(\tfrac{1}{2}T),\ \varphi(\tfrac{1}{2}T),\ \varphi^{\bullet}(\tfrac{1}{2}T))\equiv(\tfrac{1}{2}T,\ -a-x(\tfrac{1}{2}T),\ x^{\bullet}(\tfrac{1}{2}T),\ -\varphi(\tfrac{1}{2}T),$$
$$\varphi^{\bullet}(\tfrac{1}{2}T)) \tag{2.13}$$

Отсюда следует (2.8).

3. На основании приведенных замечаний оптимальное управление попытаемся искать в виде (фиг. 1):

$$\begin{aligned}&u(t)=+1\ \text{ при }\ 0\leqslant t\leqslant t_1;\quad u(t)=-1\ \text{ при }\ t_1<t\leqslant\tfrac{1}{2}T\\&u(t)=+1\ \text{ при }\ \tfrac{1}{2}T<t\leqslant T-t_1;\quad u(t)=-1\ \text{ при }\ T-t_1<t\leqslant T\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $^1/_2T\geqslant t_1>0$, $T>0$ – неизвестные

Из (3.1) и (1.4), интегрируя систему (1.1), получим при $0\leqslant t\leqslant t_1$:

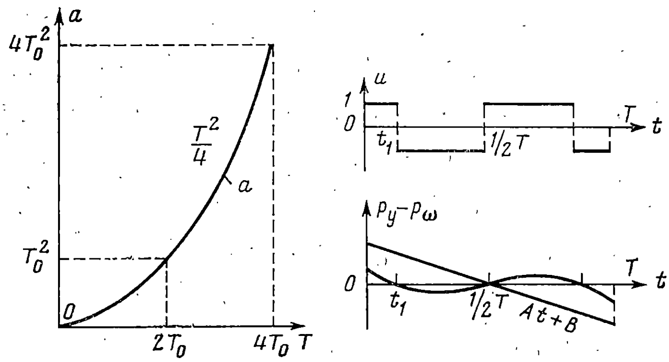
$$\varphi=\cos(\sqrt{1+\chi}\,t)-1,\qquad x=\frac{t^2}{2}+\frac{\chi}{1+\chi}[1-\cos(\sqrt{1+\chi}\,t)]-a$$

$$\varphi^\bullet=-\sqrt{1+\chi}\sin(\sqrt{1+\chi}\,t),\qquad x^\bullet=t+\frac{\chi}{\sqrt{1+\chi}}\sin(\sqrt{1+\chi}\,t) \tag{3.2.1}$$

при $t_1<t\leqslant {}^1/_2T$

$$\varphi=1+\cos(\sqrt{1+\chi}t)-2\cos\sqrt{1+\chi}\,(t-t_1)$$

$$\varphi^\bullet=-\sqrt{1+\chi}\,[\sin(\sqrt{1+\chi}t)-2\sin\sqrt{1+\chi}\,(t-t_1)]$$



Фиг. 1-3

$$x=-\frac{\chi}{1+\chi}\varphi-\frac{t^2}{2}+2t-t_1^2-a,\qquad x^\bullet=-\frac{\chi}{1+\chi}\varphi^\bullet-t+2t_1 \tag{3.2.2}$$

Подставляя (3.2.2) в (2.8), находим следующую систему уравнений:

$$a={}^1/_4T^2-2\theta^2,\quad \cos(\sqrt{1+\chi}\theta)=\cos^2(\sqrt{1+\chi}\,{}^1/_4T) \tag{3.3}$$

$$^1/_2T>\theta={}^1/_2T-t_1\geqslant 0$$

Из системы (3.3) имеем

$$0\leqslant\theta\sqrt{1+\chi}=\arccos[\cos^2(\sqrt{1+\chi}\,{}^1/_4T)]\leqslant{}^1/_2\pi$$

$$a={}^1/_4T^2-\frac{2}{1+\chi}\{\arccos[\cos^2(\sqrt{1+\chi}\,{}^1/_4T)]\}^2 \tag{3.4}$$

Заметим, что

$$\frac{d\theta}{dT}=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos^2(\sqrt{1+\chi}\,{}^1/_4T)}{1+\cos^2(\sqrt{1+\chi}\,{}^1/_4T)}\right]^{-1/2}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}} \tag{3.5}$$

Следовательно

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{T}{2\sqrt{2}}<\frac{T}{2},\qquad a=\frac{T^2}{4}-2\theta^2\geqslant\frac{T^2}{4}-2\frac{T^2}{8}=0 \tag{3.6}$$

$$\frac{da}{dT}=\frac{T}{2}-4\theta\frac{d\theta}{dT}\geqslant\frac{T}{2}-4\frac{T}{2\sqrt{2}}\frac{1}{2\sqrt{2}}=0$$

Можно доказать еще, что в последних двух неравенствах только при $T=0$ имеет место знак равенства. Следовательно, $a(T)$ – однозначная положительная и возрастающая функция (фиг. 2). При $T=k2T_0=4k\pi/\sqrt{1+\chi}$ (k – натуральное число, $T_0=2\pi(1+\chi)^{-1/2}$ – собственная частота) приходим к уже полученному в [1] результату.

Наконец, проверим следующие утверждения.

1. $u(t)\equiv 0$ – внутренняя точка области управления;
2. $\det(A^3B,\ A^2B,\ AB,\ B)=(1+\chi)^3\neq 0$ – условие общности положения;
3. Существуют ненулевые непрерывные функции p_x, p_y, p_φ, p_ω, соответствующие функциям (3.1) и (3.2).

Первое и второе утверждения, очевидно, удовлетворяются. Третье условие доказывается следующим образом. Из структуры функции $u(t)$ вытекает, что:

а) в плоскости $(t,\ p_y-p_\omega)$ точка $(t={}^1/_2T,\ p_y-p_\omega=0)$ является центром симметрии функции p_y-p_ω;

б) на интервале $(0,\ T)$ уравнение

$$p_y-p_\omega=At+B+C\sin\left[\sqrt{1+\chi}\,(t+\psi)\right]=0 \tag{3.7}$$

имеет одно и только одно решение $t={}^1/_2T$ при $\theta=0$ и три и только три решения $t={}^1/_2T$, $t={}^1/_2T\pm\theta$ при $\theta\neq 0$;

в) при $t={}^1/_2T$ имеем

$$\frac{d}{dt}(p_y-p_\omega)\leqslant 0 \quad \text{при} \quad \theta=0; \qquad \frac{d}{dt}(p_y-p_\omega)>0 \quad \text{при} \quad \theta\neq 0 \tag{3.8}$$

Учитывая выражение (1.10), по условию а) выберем

$$A{}^1/_2T+B=0 \quad \text{или} \quad B=-A{}^1/_2T \tag{3.9}$$

$$C\sin\left[\sqrt{1+\chi}\,({}^1/_2T+\varphi)\right]=0 \quad \text{или} \quad \psi=-{}^1/_2T$$

При $\theta=0\,(T=2kT_0,\ a=k^2T_0^2)$ выберем

$$A=-1<0, \quad C=0 \tag{3.10}$$

Тогда условия б) и в) удовлетворяются

$$p_y-p_\omega=A(t-{}^1/_2T)={}^1/_2T-t=0 \quad \text{только при} \quad t={}^1/_2T \tag{3.11}$$

$$\left[\frac{d}{dt}(p_y-p_\omega)\right]_{{}^1/_2T}=A=-1<0$$

При $\theta\neq 0$ $(T\neq 2kT_0,\ a\neq k^2T_0^2)$ выберем

$$C=+1>0, \qquad A=-\frac{\sin\sqrt{1+\chi}\,\theta}{\theta}<0 \tag{3.12}$$

Тогда удовлетворяется условие (в)

$$\left[\frac{d}{dt}(p_y-p_\omega)\right]_{{}^1/_2T}=A+\sqrt{1+\chi}\,C=\sqrt{1+\chi}-\frac{\sin(\sqrt{1+\chi}\,\theta)}{\theta}>0 \tag{3.13}$$

Положив $t={}^1/_2T+\rho$, находим, что условие б) равносильно условию единственности решения уравнения

$$\frac{\sin(\sqrt{1+\chi}\,\rho)}{\sqrt{1+\chi}\,\rho}=\frac{\sin(\sqrt{1+\chi}\,\theta)}{\sqrt{1+\chi}\,\theta} \tag{3.14}$$

Ясно, что при $0\leqslant\sqrt{1+\chi}\,\rho\leqslant{}^1/_2\pi$ функция $f=\sin(\sqrt{1+\chi}\,\rho)/\sqrt{1+\chi}\,\rho$ монотонно убывает от 1 до $2/\pi$; при $\rho\sqrt{1+\chi}>{}^1/_2\pi$ функция $f<(2/\pi)$. Следовательно, уравнение (3.14) имеет одно и только одно решение $0<\sqrt{1+\chi}\,\rho=\sqrt{1+\chi}\,\theta\leqslant{}^1/_2\pi$, т. е. условие (б) удовлетворяется.

В результате получим при $\theta=0$:

$$p_x=1+\chi, \quad p_\varphi=\chi, \quad p_y=-(1+\chi)(t-{}^1/_2T) \tag{3.15}$$

$$p_\omega=-\chi(t-{}^1/_2T), \quad u(t)=\operatorname{sign}(p_y-p_\omega)=\operatorname{sign}({}^1/_2T-t)$$

при $\theta \neq 0$:

$$p_x = (1+\chi)\,\frac{\sin(\sqrt{1+\chi}\,\theta)}{\theta}, \qquad p_y = (1+\chi)\,\frac{\sin(\sqrt{1+\chi}\,\theta)}{\theta}\left(\frac{T}{2} - t\right)$$

$$p_\varphi = \sqrt{1+\chi}\,\cos\sqrt{1+\chi}\,(t - {}^1/{}_2T) + \chi\,\frac{\sin(\sqrt{1+\chi}\,\theta)}{\theta}$$

$$p_\omega = \chi\,\frac{\sin(\sqrt{1+\chi}\,\theta)}{\theta}\left(\frac{T}{2} - t\right) - \sin\sqrt{1+\chi}\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$u(t) = \operatorname{sign}(p_y - p_\omega) = \operatorname{sign}\left[\frac{\sin(\sqrt{1+\chi}\,\theta)}{\theta}\left(\frac{T}{2} - t\right) + \sin\sqrt{1+\chi}\left(t - \frac{T}{2}\right)\right].$$

Поступила 29 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баничук Н. В., Черноусько Ф. Л.* Определение оптимальных и квазиоптимальных управлений в одной колебательной механической системе. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2.
2. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., Гостехиздат, 1961.