УДК 531.55:521.1

МЕТОД РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ НАПРАВЛЯЮЩИХ КОСИНУСОВ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В АТМОСФЕРЕ

Г. Г. СКИБА

(*Москва*)

Рассматривается метод расчета элементов матрицы перехода от земной к связанной с движущимся телом системе координат, обеспечивающий условия ортогональности с высокой точностью, безотносительно к величине шага интегрирования. Рассмотрен пример конкретного применения метода.

1. При решении различных навигационных задач, уравнения которых представлены в том или ином виде, возникают определенные трудности при расчете элементов матрицы **C** перехода от связанной с Землей системы координат к системе координат, связанной с телом [1–5]. Эти трудности обусловлены применением кинематического уравнения (зависимой системы)

$$d\mathbf{C}/dt=\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0^*-\boldsymbol{\omega}^*\mathbf{C} \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\omega}_0$ – вектор абсолютной угловой скорости вращения Земли в проекциях на связанные с Землей оси координат, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости вращения тела относительно начала связанной с телом системы координат в проекциях на оси этой системы; звездочки означают, что рассматривается кососимметрическая матрица

$$\mathbf{a}^*=\begin{Vmatrix} 0 & -a_Z & a_Y \\ a_Z & 0 & -a_X \\ -a_Y & a_X & 0 \end{Vmatrix}$$

соответствующая вектору $\mathbf{a}=\{a_i\}$, $i=X, Y, Z$.

При численном интегрировании отличия от единицы значений детерминанта матрицы **C** (уход нормы кватерниона [1]) обусловливают необходимость ортогонализации матрицы **C**. Для обеспечения точности в работе [2] рассматривается процедура нормировки. В работе [3] предложены выражения для ошибок некоммутативности вычисления параметров Родрига – Гамильтона при произвольном движении тела, которые дополняют кватернионные выражения ошибок, приведенные в [1, 2]. В работе [4] предлагается метод, требующий одновременного вычисления направляющих косинусов с двумя различными шагами, а в [5] для оценки ошибок вычислений направляющих косинусов предлагается использовать эмпирическую кривую.

В данной работе вместо кинематического уравнения (1.1) применены два уравнения

$$d(\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0)/dt=(\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0-\boldsymbol{\omega})^*\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0, \qquad d(\mathbf{CR})/dt=\mathbf{V}+(\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0-\boldsymbol{\omega})^*\mathbf{CR}$$

где **V** – вектор скорости движения начала (точки O) связанной с телом системы координат[1] (X, Y, Z) относительно геоцентрической системы координат (X_0, Y_0, Z_0) в проекциях на оси системы (X, Y, Z), **R** – вектор, характеризующий положение начала координат (X, Y, Z) в проекциях на оси геоцентрической системы координат (X_0, Y_0, Z_0). Ось Y_0 связанной с Землей системы (X_0, Y_0, Z_0) направлена на север.

После определения вектора $\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0$ сразу могут быть определены три элемента C_{12}, C_{22}, C_{32} матрицы **C**, а определив вектор **CR**, получаем еще три соотношения, связывающие подлежащие определению элементы. Замыкающие три соотношения – условия ортогональности. Шаг интегрирования Δt при этом будет определяться только градиентами искомых функций.

Ниже дан пример конкретного применения метода расчета элементов матрицы направляющих косинусов.

2. При известных предположениях (в том числе: Земля – шар, поле тяготения – центральное) и при необходимости сохранения всех нелинейных связей между параметрами движение тела в атмосфере целесообразно характеризовать следующей системой уравнений[2]:

$$d\mathbf{V}_c/dt=qS\mathbf{C}_R/m-\pi_0(\mathbf{CR}+\mathbf{r}_c)/|\mathbf{R}+\mathbf{C}^{-1}\mathbf{r}_c|^3-(\boldsymbol{\omega}+\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0)^*\mathbf{V}_c-(\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0)^*(\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0)^*(\mathbf{CR}+\mathbf{r}_c)$$

[1] Все системы координат, вводимые ниже в рассмотрение, декартовые правые.
[2] Система уравнений выведена из общих уравнений механики.

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_c-(\boldsymbol{\omega}-\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0)^*\mathbf{r}_c,\qquad d\boldsymbol{\omega}/dt=\mathbf{I}_c^{-1}[qS(L\mathbf{m}_R-\mathbf{r}_c^*\mathbf{C}_R)-\boldsymbol{\omega}^*\mathbf{I}_c\boldsymbol{\omega}] \tag{2.1}$$

$$d(\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0)/dt=(\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0-\boldsymbol{\omega})^*\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0,\qquad d(\mathbf{CR})/dt=\mathbf{V}+(\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0-\boldsymbol{\omega})^*\mathbf{CR},\qquad d\mathbf{R}/dt=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{V}$$

Здесь $\mathbf{V}_c$ – вектор скорости движения центра масс тела, $\mathbf{C}_R$ – вектор аэродинамических коэффициентов сил, $\mathbf{m}_R$ – вектор аэродинамических коэффициентов моментов, $q={}^1/_2\rho V^2$ – скоростной напор, S – характерная площадь, L – характерный размер, m – масса тела, π_0 – гравитационный параметр, $\mathbf{r}_c$ – вектор, характеризующий положение центра масс тела в системе координат (X, Y, Z), $\mathbf{I}_c$ – матрица моментов инерции тела.

Правая часть последнего уравнения (2.1) определяется значениями элементов вектора $\mathbf{V}$, получаемых в результате интегрирования первого уравнения (2.1), а правая часть первого уравнения (2.1) – значениями элементов остальных искомых векторов. Поэтому представляется возможность эффективного контроля точности результатов численных расчетов с помощью следующего соотношения:

$$\mathbf{R}=\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{CR}) \tag{2.2}$$

Введем скоростную систему координат[1] (X_a, Y_a, Z_a) с началом в точке O: ось X_a направлена вдоль вектора скорости $\mathbf{V}$, ось Z_a перпендикулярна к оси X_a и параллельна плоскости экватора, ось Y_a перпендикулярна плоскости X_aOZ_a.

Ориентация скоростной системы координат относительно земной осуществляется двумя углами последовательного поворота σ и θ. Здесь σ – угол поворота траектории (между проекцией вектора скорости $\mathbf{V}$ на плоскость экватора и осью X_0), θ – угол наклона траектории (между вектором скорости $\mathbf{V}$ и плоскостью экватора).

Ориентация связанной системы координат относительно скоростной осуществляется тремя углами Эйлера последовательного поворота: ν, α, φ; где ν – угол прецессии, α – пространственный угол атаки (угол нутации), φ – угол вращения. В соответствии с введенными углами определяется вид элементов матрицы C:

$$\begin{gathered}
C_{11}=(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta\cos\nu)\cos\sigma+\sin\alpha\sin\nu\sin\sigma\\
C_{12}=\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta\cos\nu\\
C_{13}=-(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta\cos\nu)\sin\sigma+\sin\alpha\sin\nu\cos\sigma\\
C_{21}=-[(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta\cos\nu)\cos\sigma-\cos\alpha\sin\nu\sin\sigma]\cos\varphi+\\
+(\sin\theta\sin\nu\cos\sigma+\cos\nu\sin\sigma)\sin\varphi\\
C_{22}=-(\sin\alpha\sin\theta-\cos\alpha\cos\theta\cos\nu)\cos\varphi-\cos\theta\sin\nu\sin\varphi\\
C_{23}=[(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta\cos\nu)\sin\sigma+\cos\alpha\sin\nu\cos\sigma]\cos\varphi-\\
-(\sin\theta\sin\nu\sin\sigma-\cos\nu\cos\sigma)\sin\varphi\\
C_{31}=[(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta\cos\nu)\cos\sigma-\cos\alpha\sin\nu\sin\sigma]\sin\varphi+\\
+(\sin\theta\sin\nu\cos\sigma+\cos\nu\sin\sigma)\cos\varphi\\
C_{32}=(\sin\alpha\sin\theta-\cos\alpha\cos\theta\cos\nu)\sin\varphi-\cos\theta\sin\nu\cos\varphi\\
C_{33}=-[(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta\cos\nu)\sin\sigma+\cos\alpha\sin\nu\cos\sigma]\sin\varphi-\\
-(\sin\theta\sin\nu\sin\sigma-\cos\nu\cos\sigma)\cos\varphi
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Определив вектор $\mathbf{C}\omega_0$, находим значения трех элементов матрицы $\mathbf{C}$: $C_{i2}=(C\omega_0)_i/\omega_{Y_0}$ $(i=1, 2, 3)$, где ω_{Y_0} – модуль абсолютной угловой скорости Земли.

Значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ известны

$$\sin\alpha=(V_Y^2+V_Z^2)^{1/2}/|\mathbf{V}|,\quad \cos\alpha=V_X/|\mathbf{V}|,\quad \sin\varphi=V_Z/(V_Y^2+V_Z^2)^{1/2},$$

$$\cos\varphi=-V_Y/(V_Y^2+V_Z^2)^{1/2}.$$

Значения $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sin\nu$, $\cos\nu$ определяются следующими соотношениями, полученными из (2.3):

$$\sin\theta=(C_{32}\sin\varphi-C_{22}\cos\varphi)\sin\alpha+C_{12}\cos\alpha,\quad \cos\theta=-(1-\sin^2\theta)^{1/2}$$

$$\sin\nu=-(C_{22}\sin\varphi+C_{32}\cos\varphi)/\cos\theta,\qquad \cos\nu=[C_{12}\sin\alpha-(C_{32}\sin\varphi-C_{22}\cos\varphi)\cos\alpha]/\cos\theta$$

Определив вектор $\mathbf{CR}$, получаем три соотношения, связывающие элементы матрицы $\mathbf{C}$:

$$C_{i1}X_0+C_{i3}Z_0=(CR)_i-C_{i2}Y_0\quad (i=1, 2, 3) \tag{2.4}$$

[1] Иногда эту систему называют полускоростной.

Введем обозначения

$$x_0=\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta\cos\nu,\quad x_1=\sin\alpha\sin\nu$$

$$x_2=\sin\theta\sin\nu\sin\varphi-\sin\alpha\cos\theta\cos\varphi-\cos\alpha\sin\theta\cos\nu\cos\varphi$$

$$x_3=\cos\nu\sin\varphi+\cos\alpha\sin\nu\cos\varphi$$

$$x_4=\sin\alpha\cos\theta\sin\varphi+\cos\alpha\sin\theta\cos\nu\sin\varphi+\sin\theta\sin\nu\cos\varphi$$

$$x_5=\cos\nu\cos\varphi-\cos\alpha\sin\nu\sin\varphi$$

Воспользовавшись соотношениями (2.3) для элементов C_{i1}, C_{i3} ($i=1, 2, 3$), из (2.4) получаем соотношения для определения $\sin\sigma$. В зависимости от значений C_{32} и C_{22} могут быть использованы следующие соотношения:

$$\sin\sigma=-\frac{(Z_0x_1+X_0x_0)[(CR)_2-C_{22}Y_0]-(X_0x_2+Z_0x_3)[(CR)_1-C_{12}Y_0]}{(X_0^2+Z_0^2)C_{32}}$$

при $|(X_0^2+Z_0^2)C_{32}|>10^{-6}$ или

$$\sin\sigma=\frac{(Z_0x_1+X_0x_0)[(CR)_3-C_{32}Y_0]-(X_0x_4+Z_0x_5)[(CR)_1-C_{12}Y_0]}{(X_0^2+Z_0^2)C_{22}}$$

при $|(X_0^2+Z_0^2)C_{22}|>10^{-6}$.

Было учтено, что $C_{32}=x_1x_4-x_0x_3$, $C_{22}=x_0x_5-x_1x_2$.

Определив значение $\cos\sigma=(1-\sin^2\sigma)^{1/2}$, можно найти значения элементов матрицы C.

В рассмотренном примере ортогональность обеспечивается указанным способом вычисления элементов матрицы C на каждом шаге интегрирования.

3. Поставленная задача реализована на ЭВМ. Интегрирование системы уравнений (2.1) осуществлено методом Рунге – Кутта.

Проведены многочисленные контрольные расчеты, в том числе расчеты параметров движения тела вдоль экватора и в меридиональных направлениях, расчеты параметров движения тела при $\omega_X\neq0$, $\omega_Y\neq0$, $\omega_Z\neq0$. Проводились сравнения с аналитическими решениями при соответствующих дополнительных предположениях. Рассмотренные варианты подтвердили работоспособность предложенного метода. Эффективный контроль результатов и выбор шага интегрирования в соответствии с требуемой точностью обеспечен при помощи соотношения (2.2).

Поступила 18 X 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., «Наука», 1973.
2. *Ткаченко А. И.* Погрешности вычисления параметров Родрига – Гамильтона. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1.
3. *Челноков Ю. Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига – Гамильтона по его угловой скорости. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 3.
4. *Боданский Е. Д., Фурман В. Д.* О погрешностях численного интегрирования кинематических уравнений Пуассона. Космические исследования, 1970, т. 8, вып. 6.
5. *Otten D. D.* A look into strap-down guidance design (I—II). Control Engng, 1966, vol. 13.