МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1980

УДК 531.8

ОДНА ЗАДАЧА УГЛОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВУНОГОЙ ХОДЬБЫ

П. С. ЧУДИНОВ

(Москва)

В работе [1] рассмотрена задача управления плоским движением шагающего аппарата, состоящего из весомого корпуса и пары невесомых двузвенных ног, подвешенных в одной точке корпуса. Построен алгоритм управления, осуществляющий полную (угловую, вертикальную и продольную) стабилизацию движения аппарата. Наряду с этим представляет самостоятельный интерес задача угловой стабилизации. В публикуемой работе эта задача решена для случая движения аппарата [1] по горизонтальной поверхности. Создан алгоритм угловой стабилизации, выводящий аппарат на предельный периодический режим. Все параметры найденного режима получены в явном аналитическом виде, причем большая часть этих параметров (длина и продолжительность шага, амплитуда колебаний корпуса и его угловая скорость в начале шага) инвариантна относительно начального возмущенного состояния. Приведен пример.

1. В предположении о малости отклонений корпуса от вертикали плоское одноопорное движение аппарата описывается следующими уравнениями [1]:

$$Mx^{\cdot\cdot}=\frac{R_x}{I}[I_0+M\rho(y-y_\nu)]-R_y\frac{M\rho}{I}(x-x_\nu+\rho\theta)$$
$$My^{\cdot\cdot}=R_y-Mg \tag{1.1}$$
$$I\theta^{\cdot\cdot}=R_y(x-x_\nu+\rho\theta)-R_x(y-y_\nu+\rho)$$

Моменты сил управления q и u соответственно в бедренном и коленном шарнирах опорной ноги даются соотношениями

$$q=R_x(y-y_\nu)-R_y(x-x_\nu),\qquad u=R_x(y_k-y_\nu)-R_y(x_k-x_\nu) \tag{1.2}$$

Моменты в шарнирах переносимой ноги в силу ее невесомости равны нулю.

В уравнениях (1.1) и соотношениях (1.2) введены обозначения: x, y – декартовы координаты точки подвеса ног O, θ – угол отклонения корпуса, отсчитываемый от вертикали по направлению движения (в сторону положительного направления оси x), R_x, R_y — составляющие реакции в точке опоры, M – масса корпуса, I – момент инерции корпуса относительно оси z, проходящей через центр масс (ось z перпендикулярна плоскости $x-y$), I_0 – момент инерции корпуса относительно оси z, проходящей через точку подвеса ног, x_ν, y_ν – координаты точки опоры (для горизонтальной поверхности $y_\nu=0$), x_k, y_k – координаты колена опорной ноги, g – ускорение силы тяжести, $\nu=1, 2, 3, \ldots$ – номер шага аппарата, ρ – расстояние от точки подвеса ног до центра масс корпуса.

В [1] построен алгоритм управления аппаратом, движение которого описывается уравнениями (1.1)—(1.2). В качестве возмущений рассмот-

[1] *Белецкий В. В., Чудинов П. С.* Управление двуногой ходьбой. М., Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1977, препринт № 10.

рены отклонения фазовых координат аппарата (θ, $\theta^{\cdot}$, x, $x^{\cdot}$, y, $y^{\cdot}$) от номинальных значений и отклонения (за счет неровности поверхности) вертикальной координаты точки опоры y_ν от горизонтальной поверхности $y_\nu=0$. Без ограничения общности предполагается, что возмущения действуют на аппарат в момент начала шага. Движение аппарата считается стабилизированным, если точка подвеса ног перемещается с заданной постоянной скоростью V на заданной высоте h от горизонтальной поверхности, а колебания корпуса периодичны и непрерывны по углу и угловой скорости.

В качестве управлений в [1] приняты опорные реакции R_x, R_y, длина l и продолжительность шага T; если R_x, R_y, l, T известны, моменты в шарнирах вычисляются по формулам (1.2). Показано, что если управления в уравнениях (1.1) выбраны в виде

$$R_x=M\alpha^2(x-x_\nu+\rho\theta), \qquad R_y=Mg \tag{1.3}$$
$$\alpha^2=M\rho g/[I_0+M\rho(h-y_\nu)]$$

то в отсутствие возмущений по координатам $x^{\cdot}$, y, $y^{\cdot}$ движение аппарата описывается формулами

$$\begin{gathered} x(t)=x_0+Vt, \qquad y(t)=h=\text{const} \\ \rho\theta(t)=c_1\exp(\alpha t)+c_2\exp(-\alpha t)+x_\nu-x(t) \\ c_1={}^1/_2[\rho\theta_0-S+\alpha^{-1}(\rho\theta_0^{\cdot}+V)] \\ c_2={}^1/_2[\rho\theta_0-S-\alpha^{-1}(\rho\theta_0^{\cdot}+V)] \end{gathered} \tag{1.4}$$

Нуликом в индексе обозначены значения фазовых координат в момент начала шага, $S=x_\nu-x_0$ — опорный отрезок (расстояние между точкой опоры и проекцией точки подвеса ног на горизонтальную плоскость в момент начала шага). Формулы (1.4) описывают движение с постоянной скоростью V, с постоянной высотой точки подвеса h над горизонтальной поверхностью, и с колебаниями корпуса, которые могут быть сделаны периодическими в процессе стабилизации при определенном выборе длины и продолжительности шага. Назовем движение (1.4) комфортабельным.

Напомним, что правые части уравнений (1.1) разрывны: координаты x_ν, y_ν меняются от шага к шагу скачком, представляя собой кусочно-постоянные функции времени. Поэтому непрерывность решения (1.4) обеспечивается «склейкой» функций x, y, θ в начальные моменты каждого шага. Склейка производится выбором значений констант S, c_1, c_2 сообразно с новыми значениями x_ν, y_ν и новыми начальными данными.

2. В предлагаемой работе решается следующая задача. Пусть аппарат совершал невозмущенное движение по горизонтальной поверхности согласно формулам (1.4) с заданными параметрами V, h и с периодическими колебаниями корпуса. В момент начала очередного ν-го шага аппарат подвергался воздействию возмущений по координатам θ, $\theta^{\cdot}$, x и перешел в возмущенное фазовое состояние $X_0^\nu(\theta_0, \theta_0^{\cdot}, x_0; V, h, 0)$. Требуется возвратить аппарат на периодический по углу и угловой скорости корпуса режим: $\theta(0)=\theta(T)$, $\theta^{\cdot}(0)=\theta^{\cdot}(T)$.

Для решения данной задачи используются связи, существующие между параметрами невозмущенного периодического движения. Как известно [2], условия периодичности колебаний при комфортабельном движении со скоростью V и длиной шага l_N имеют вид

$$\rho\theta_0^N=S-\frac{1}{2}l_N, \quad \rho\theta_0^{\cdot N}=\frac{1}{2}\alpha l_N\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}\alpha T_N\right)-V, \quad T_N=\frac{l_N}{V} \tag{2.1}$$

где θ_0^N, $\theta_0^{\cdot N}$ — значения угла и угловой скорости корпуса в момент начала шага. Следовательно, для того, чтобы добиться периодичности колебаний, необходимо связать параметры θ_0, $\theta_0^{\cdot}$, S, l_N, V соотношениями (2.1). Это достигается при помощи ν-го шага.

Параметры l, T ν-го шага выбираются так, чтобы конечные значения θ, $\theta^{\cdot}$ на этом шаге равнялись начальным значениям периодического движения (2.1) с заданной длиной шага l_N:

$$\theta(T)=\theta_0^N, \quad \theta^{\cdot}(T)=\theta_0^{\cdot N} \tag{2.2}$$

Уравнения (2.2) относительно неизвестных l, T записываются так:

$$\begin{gathered} F_1(l, T)=2[c_1 \exp(\alpha T)+c_2 \exp(-\alpha T)]+l_N-2l=0 \\ F_2(T)=2[c_1 \exp(\alpha T)-c_2 \exp(-\alpha T)]-l_N \operatorname{cth}(\alpha l_N/2V)=0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

Таким образом, задача угловой стабилизации аппарата свелась к определению параметров l, T из системы (2.3). Имеем

$$\begin{gathered} l={}^1/_2 l_N+\sqrt{G^2+4c_1c_2} \\ T=\alpha^{-1}\ln\left[\frac{1}{2c_1}(G+\sqrt{G^2+4c_1c_2})\right] \\ G(l_N)={}^1/_2 l_N \operatorname{cth}(\alpha l_N/2V) \end{gathered} \tag{2.4}$$

Из формул (2.4) следует, что для заранее заданного значения l_N переходный ν-й шаг существует только в том случае, если выполнены условия

$$G^2+4c_1c_2\geqslant 0, \quad G+\sqrt{G^2+4c_1c_2}>2c_1, \quad (c_1>0) \tag{2.5}$$

Выберем $l_N>0$ таким образом, чтобы удовлетворить условиям (2.5). При $c_1c_2<0$ требуемые неравенства будут выполнены, если величину l_N задать в виде [1]

$$l_N=V\delta\alpha^{-1}, \quad \delta=2\alpha V^{-1}\sqrt{-4c_1c_2} \tag{2.6}$$

Пусть возмущенное фазовое состояние X_0^ν в начале ν-го шага таково, что $c_1>0$, $c_2<0$. Рассмотрим движение аппарата по горизонтальной плоскости, когда длина и продолжительность ν-го шага выбираются согласно формулам (2.4), (2.6). Выберем l_N согласно (2.6). Тогда, сделав ν-й шаг длиной и продолжительностью (2.4), аппарат выйдет на периодический по углу и угловой скорости режим с длиной и продолжительностью шага

$$l_N=V\delta\alpha^{-1}, \quad T_N=\delta\alpha^{-1} \tag{2.7}$$

и начиная с $(\nu+1)$-го шага может продолжать движение (в отсутствие новых возмущений) с параметрами (2.7). Фактически задача угловой стабилизации к $(\nu+1)$-му шагу решена. Отметим, что при этом различным фазовым состояниям X_0^ν отвечают в силу (2.6) различные параметры l_N, T_N получаемого периодического движения.

Запишем важные для дальнейшего соотношения. Используя (2.1), получим, что если l, T — параметры периодического по углу и угловой скорости движения, то выполняются условия

$$2c_1=\frac{l}{\exp(\alpha T)-1}>0, \quad 2c_2=\frac{l}{\exp(-\alpha T)-1}<0; \quad 4c_1c_2<0 \tag{2.8}$$

[1] См. подстрочное примечание к стр. 49.

3. Теперь, вместо того чтобы двигаться далее с параметрами (2.7), на $(\nu+1)$-м и последующих шагах будем выбирать длину и продолжительность каждого очередного шага аппарата согласно формулам (2.4), (2.6). Таким образом, шаг со значениями (2.7) параметров l_N, T_N аппарат сделать «не успевает». Поэтому l_N, T_N отвечают неосуществленному периодическому движению, которое назовем «фиктивным». Обозначим единицей в индексе выбираемые в начале ν-го шага параметры $l_N^{(1)}$, $T_N^{(1)}$ фиктивного периодического движения $(\nu+1)$-го шага; двойкой в индексе — выбираемые в начале $(\nu+1)$-го шага параметры $l_N^{(2)}$, $T_N^{(2)}$ фиктивного периодического движения $(\nu+2)$-го шага и т. д. Следовательно, $l_N^{(n)}$, $T_N^{(n)}$ обозначают параметры фиктивного периодического движения, выбираемые в начале $(\nu+n-1)$-го шага. Реализуемое движение происходит с параметрами l_n, T_n, вычисляемыми по $l_N^{(n)}$, $T_N^{(n)}$ при помощи (2.4) $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Обозначим $\delta_1=2d$. Тогда $l_N^{(1)}$, $T_N^{(1)}$ запишутся в виде $l_N^{(1)}=2dV\alpha^{-1}$, $T_N^{(1)}=2d\alpha^{-1}$

Найдем значение δ_2. Согласно (2.6)

$$\delta_2=2\alpha\sqrt{-4c_1^{(1)}c_2^{(1)}/V} \tag{3.1}$$

Поскольку величины $l_N^{(1)}$, $T_N^{(1)}$ являются параметрами периодического движения (хотя и фиктивного), они удовлетворяют условиям (2.8). Подставляя $l_N^{(1)}$, $T_N^{(1)}$ в (2.8), а (2.8) — в (3.1), получим $\delta_2=2d/\operatorname{sh} d$. Аналогично для $(\nu+3)$-го шага имеем: $\delta_3=2d/[\operatorname{sh} d\cdot\operatorname{sh}(d/\operatorname{sh} d)]$ и т. д. Таким образом, для δ_n имеем последовательность $\delta_n=2d_n$, $d_n=d_{n-1}/\operatorname{sh} d_{n-1}$,

$$d_1=d>0 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Используя принцип сжатых отображений [3], получим, что при любом $d>0$ общий член последовательности d_n стремится к значению $w=\ln(1+\sqrt{2})$, где w — корень уравнения $\operatorname{sh} w=1$. При $n\to\infty$, следовательно

$$\delta_n\to a^*=2\ln(1+\sqrt{2})=1.762747 \tag{3.2}$$

При помощи (2.1), (2.4), (2.6), (3.2) определяются предельные значения для параметров l, T, $\theta_0^{\cdot}$ (при $n\to\infty$): $l=Va^*/\alpha$, $T=a^*/\alpha$, $\theta_0^{\cdot}=Vb^*/\rho$, $b^*=a^*/\sqrt{2}-1=0.246450$.

Данные результаты означают следующее. Если длина и продолжительность каждого очередного шага выбираются согласно формулам (2.4), (2.6), то независимо от значений θ_0, $\theta_0^{\cdot}$, x_0 в начале процесса угловой стабилизации (в начале ν-го шага) аппарат через n шагов (строго говоря, $n\to\infty$) выходит на один и тот же по длине шага, продолжительности шага и начальной угловой скорости корпуса периодический режим. Назовем такой периодический режим инвариантным периодическим режимом. Угол наклона корпуса в начале шага при таком режиме может быть различным. Продолжительность шага найденного режима зависит только от высоты точки подвеса ног $T=T(h)=a^*[(I_0/M\rho+h)/g]^{1/2}$, длина шага определяется высотой точки подвеса ног и поступательной скоростью, а угловая ско-

рость корпуса в момент начала шага определяется только поступательной скоростью: $l=l(h, V)=VT$, $\theta_0^{\cdot}=\theta_0^{\cdot}(V)=Vb^*/\rho$.

Найдем величину опорного отрезка на инвариантном периодическом режиме. Согласно алгоритму угловой стабилизации, выводящему аппарат на инвариантный периодический режим, опорный отрезок вычисляется по формуле

$$S=S_0+\sum_{n=1}^{\infty}(l_n-VT_n) \tag{3.3}$$

где S_0 — величина опорного отрезка в момент начала стабилизации, а l_n, T_n даются формулами (2.4), (2.6). Для значения $n=1$ имеем

$$l_1-VT_1=\frac{V}{\alpha}\ln\left[\exp(d_1+d_2)\sqrt{-\frac{c_1^{(1)}}{c_2^{(1)}}}\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}d_1\right)\right]$$

$$d_1=d,\qquad d_n=d_{n-1}/\mathrm{sh}\,d_{n-1}\quad (n=2,3,4,\ldots) \tag{3.4}$$

Для значений $n=2, 3, 4, \ldots$ получаем формулу

$$l_n-VT_n=\frac{V}{\alpha}\ln\left[\exp(-d_{n-1}+d_n+d_{n+1})\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}d_n\right)\right] \tag{3.5}$$

Найдем S_n для значения $n=m$. Подставляя (3.4), (3.5) в (3.3), получим

$$S_m=S_0+\frac{V}{\alpha}\left\{\ln\left[\sqrt{-\frac{c_1}{c_2}}\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}d_1\right)\prod_{n=2}^{m}\exp(d_n)\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}d_n\right)\right]+d_m+d_{m+1}\right\}$$

Отсюда при $m\to\infty$ находим искомую формулу

$$S=S_0+l+\frac{V}{\alpha}\ln\varkappa,\quad \varkappa=\sqrt{-\frac{c_1^{(1)}}{c_2^{(1)}}}\,\mathrm{th}\frac{d}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\exp(d_n)\,\mathrm{th}\frac{d_n}{2} \tag{3.6}$$

$$d_1=d/\mathrm{sh}\,d,\quad d_n=d_{n-1}/\mathrm{sh}\,d_{n-1},\quad d=(\alpha/V)\sqrt{-4c_1^{(1)}c_2^{(1)}}$$

Формула для амплитуды колебаний корпуса на инвариантном периодическом режиме имеет вид

$$A_k=\max|\theta-\langle\theta\rangle|=Vc^*/\alpha\rho$$

$$c^*=\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{1+[1-(^1/_2a^*)^2]^{1/2}}{1-[1-(^1/_2a^*)^2]^{1/2}}\right\}-\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}a^*\right)^2}=0.040761$$

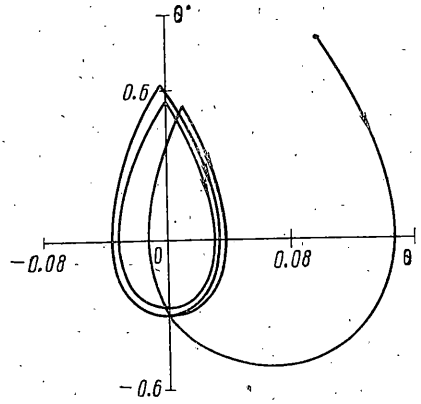
Выпишем полный набор параметров, характеризующих полученный периодический режим,— соответственно длину шага, продолжительность шага, опорный отрезок, угол наклона корпуса и угловую скорость в момент начала шага, амплитуду колебаний:

$$l=\frac{Va^*}{\alpha},\quad T=\frac{a^*}{\alpha},\quad S=S_0+l+\frac{V}{\alpha}\ln\varkappa$$

$$\theta_0=\langle\theta\rangle=\frac{1}{\rho}\left(S-\frac{1}{2}l\right),\quad \theta_0^{\cdot}=\frac{Vb^*}{\rho},\quad A_k=\frac{Vc^*}{\alpha\rho} \tag{3.7}$$

Напомним, что значения S_0, c_1, c_2, d в (3.6) вычисляются в момент начала процесса стабилизации. Как показывают расчеты, выход из возмущенного начального состояния X_0^ν на инвариантный периодический режим, соответствующий имеющимся высоте точки подвеса ног и поступательной скорости, осуществляется за пять — десять шагов аппарата в зависимости от X_0^ν.

4. *Пример.* Аппарат с параметрами $M=40$ кг, $\rho=0.4$ м, $I={}^1/_3M\rho^2$ совершал невозмущенное периодическое движение со скоростью $V=1$ м/с, высотой точки подвеса ног $h=0.7$ м и длиной шага $l=0.6$ м. В момент начала третьего шага аппарат подвергался воздействию возмущений по координатам θ, $\theta^\cdot$, x и перешел в возмущенное фазовое состояние $X_0=\{0.1;\ 0.8;\ 0.8;\ 1.0;\ 0.7;\ 0.0\}$. Отклонение координаты θ от номинального значения $\theta_0=0$ составило $\approx 6°$ (≈ 0.1 рад); отклонение $\theta^\cdot$ от номинала $\theta_0^\cdot=0.57$ рад/с составило 40% (0.8 рад/с); координата x уменьшилась относительно номинала $x_0=0.9$ м на 0.1 м (17% длины шага).



Для стабилизации углового движения аппарата использовался изложенный выше алгоритм, полученный на основе линеаризованной системы (1.1). В данном примере этот алгоритм применялся к движению аппарата, описываемому точными нелинейными уравнениями из работы [1]. Влияние нелинейности рассматривалось как постоянное возмущающее воздействие.

Переход от возмущенного начального состояния X_0 к режиму (3.7) показан в таблице. Первые шесть строк — фазовое состояние корпуса аппарата в начале очередного шага, ниже — продолжительность и длина очередного шага, а также величина ε, вычисляемая по формуле $\varepsilon=|\theta(0)-\theta(T)|+\tau|\theta^\cdot(0)-\theta^\cdot(T)|$ ($\tau=1$ с) и характеризующая близость движения корпуса к периодическому, на котором $\varepsilon=0$.

Приведем параметры инвариантного периодического режима, рассчитанные по формулам (3.7): $l=0.625$ м; $T=0.625$ с; $\theta_0^\cdot=0.616$ рад/с; $A_k=2.06°$. По таблице видно,

ν	1	2	3	4	5	6	7	8
θ_0, рад	0.000	0.000	0.100	0.011	−0.001	−0.002	−0.002	−0.002
$\theta_0^\cdot$, рад/с	0.570	0.570	0.800	0.544	0.621	0.621	0.621	0.621
x_0, м	−0.300	0.300	0.800	1.511	2.128	2.755	3.381	4.007
V_0, м/с	1.000	1.000	1.000	1.008	1.007	1.007	1.007	1.007
y_0, м	0.700	0.700	0.700	0.688	0.687	0.687	0.687	0.687
$y_0^\cdot$, м/с	0.000	0.000	0.000	−0.002	−0.001	−0.001	−0.001	0.000
T, с	0.600	0.600	0.689	0.610	0.622	0.622	0.622	0.622
l, м	0.600	0.600	0.614	0.627	0.626	0.626	0.626	0.626
ε	0.000	0.000	0.345	0.089	0.001	0.000	0.000	0.000

что за шесть шагов аппарат выходит на периодический режим, параметры которого вследствие использования точных нелинейных уравнений менее чем на 1% отличаются от рассчитанных по (3.7). Процесс угловой стабилизации представлен на фигуре (значения угла θ даны в рад, угловой скорости $\theta^\cdot$ — в рад/с).

Поступила 19 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В. В., Чудинов П. С.* Управление движением двуногого шагающего аппарата. Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 3.
2. *Белецкий В. В.* Динамика двуногой ходьбы, ч. I и II. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, 4.
3. *Березин И. С., Жидков Н. М.* Методы вычислений, т. 1. М., «Наука», 1966.