МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1980

УДК 531.133.2

ВЛИЯНИЕ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ НА ТЕНЗОР ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Н. Е. ЕГАРМИН

(Москва)

Известно, что при исследовании движения быстро вращающихся твердых тел (например, роторов гироскопов с неконтактным подвесом) возникает необходимость учета отличия их реальных физико-механических свойств от свойств абсолютно твердого тела. В частности, важен учет их упругой податливости. Влияние упругой податливости на движение Земли изучалось в работах многих авторов (см., например, [1, 2]). Для указанных исследований характерно то, что задачи теории упругости и динамики тела решаются фактически независимо. Такая постановка вполне допустима в задачах геофизики (малые угловые скорости, сильные гравитационные поля), но неприемлема при изучении движения быстро вращающихся роторов гироскопов. В публикуемой работе рассматривается свободное движение линейно-упругого твердого тела около центра масс, причем задачи теории упругости и динамики тела решаются совместно. Получены уравнения движения типа уравнений Эйлера. Установлено, что влияние упругих деформаций на движение твердого тела сводится к появлению квадратичных по компонентам угловой скорости поправок к тензору инерции, для которых получены аналитические выражения и исследованы их свойства.

1. Будем рассматривать достаточно жесткое твердое тело, деформации которого малы, а частоты собственных колебаний намного больше угловой скорости вращения. Последнее допущение позволяет решать задачу теории упругости квазистатически. Введем жестко связанную с твердым телом в его недеформированном состоянии декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$. В качестве осей удобно (но не обязательно) взять главные оси тензора инерции, а в качестве точки O — центр инерции недеформированного тела. Положение точки тела в недеформированном состоянии задается радиус-вектором $\mathbf{r}$, а в деформированном — радиус-вектором $\mathbf{R}=\mathbf{r}+\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$; причем вектор перемещения $\mathbf{u}$ зависит от времени t как явно, так и опосредованно (например, через вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ и его производную по времени $\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)$).

Будем считать тело однородным и изотропным. Поэтому вектор перемещения $\mathbf{u}$ определяется из уравнения Навье — Коши [3]:

$$\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+\nabla^2\mathbf{u}+\frac{\rho}{\mu}\mathbf{K}=0$$

$$\mathbf{K}=-[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})+\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}}\times\mathbf{r}+\mathbf{w}_0+\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}}] \tag{1.1}$$

где ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига, $\mathbf{K}$ — массовая плотность силы инерции, $\mathbf{w}_0$ — ускорение точки O.

Первые три слагаемые в выражении для $\mathbf{K}$ представляют собой переносное ускорение, четвертое слагаемое — относительное ускорение, а последнее — кориолисово ускорение. Точка над вектором означает частную производную по времени в системе $Ox_1x_2x_3$.

Граничные условия для уравнения (1.1) при отсутствии поверхностных сил имеют вид

$$\mathbf{n}\cdot T^{\vee}|_S=0,\quad T^{\vee}=2\mu\left[\frac{\nu}{1-2\nu}E^{\vee}\operatorname{div}\mathbf{u}+\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\nabla^*\mathbf{u})\right] \tag{1.2}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности тела S, $T^{\vee}$ — тензор напряжений, $E^{\vee}$ — единичный тензор второго ранга, звездочкой отмечено транспонирование. Вообще говоря, необходимо задать еще и начальные условия для $t=t_0$.

При отсутствии внешних сил уравнения движения тела в системе $Ox_1x_2x_3$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{G}^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{G}=0,\quad \mathbf{G}=\iiint\limits_V \rho_V\{\mathbf{R}\times[\mathbf{R}^{\cdot}+(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})]\}dV \tag{1.3}$$

где $\mathbf{G}$ — кинетический момент тела, ρ_V — его плотность в деформированном состоянии, dV — элемент деформированного объема. Для тела в недеформированном состоянии будем обозначать эти величины ρ_v и dv соответственно.

Подставляя выражение для $\mathbf{R}$ в формулу (1.3) и пренебрегая членами, квадратичными по $\mathbf{u}$, получим

$$\mathbf{G}=\iiint\limits_v \rho_v[\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})]dv+\iiint\limits_v \rho_v[\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u})+\mathbf{u}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})]dv+ \tag{1.4}$$

$$+\iiint\limits_v \rho_v(\mathbf{r}\times\mathbf{u}^{\cdot})dv=\mathbf{G}^{(0)}+\mathbf{G}^{(1)}+\mathbf{G}^{(2)},\ \mathbf{G}^{(0)}=I^{\vee}\boldsymbol{\omega}$$

где $\mathbf{G}^{(0)}$ — кинетический момент недеформированного тела, $I^{\vee}$ — его тензор инерции, а $\mathbf{G}^{(1)}$ и $\mathbf{G}^{(2)}$ — поправки к кинетическому моменту, возникающие вследствие деформируемости тела. Вектор $\mathbf{G}^{(1)}$ можно представить в виде

$$\mathbf{G}^{(1)}=I^{\vee(1)}\boldsymbol{\omega}=\iiint\limits_v \rho_v[2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{u})E^{\vee}-\mathbf{ur}-\mathbf{ru}]dv\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{1.5}$$

где $\mathbf{ur}$ и $\mathbf{ru}$ — внешние произведения векторов. Однако в отличие от $I^{\vee}$ тензор $I^{\vee(1)}$ будет посредством вектора перемещения $\mathbf{u}$ зависеть, вообще говоря, от $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}^{\cdot}$ и t.

Выражение (1.4) для вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ позволяет переписать уравнения движения (1.3) в виде

$$I^{\vee}\boldsymbol{\omega}^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times I^{\vee}\boldsymbol{\omega}=\mathbf{m},\quad \mathbf{m}=-\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{G}^{(1)}-\mathbf{G}^{\cdot(1)}-\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{G}^{(2)}-\mathbf{G}^{\cdot(2)} \tag{1.6}$$

Для определения движения упругого тела надо решить сначала задачу линейной теории упругости (1.1), (1.2) и определить вектор перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{r},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}^{\cdot},t)$, который сложным образом зависит от неизвестных заранее угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ и углового ускорения $\boldsymbol{\omega}^{\cdot}(t)$, затем вычислить интегралы (1.4) для векторов $\mathbf{G}^{(1)}$ и $\mathbf{G}^{(2)}$ и составить уравнения (1.6).

Прежде чем перейти к составлению уравнений движения, сделаем несколько дополнительных упрощений исходной задачи.

Решая задачу Навье — Коши (1.1), (1.2), будем пренебрегать в выражении для силы $\mathbf{K}$ малыми членами $\mathbf{u}^{\cdot\cdot}$ и $2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^{\cdot}$. Это означает, что решение задачи теории упругости ищем в виде ряда по степеням малого параметра $1/\mu$ и ограничиваемся определением первого приближения. Тем самым пренебрегаем собственными колебаниями упругого тела, что является, в силу оговоренной ранее высокой их частоты и отсутствия резонансов, вполне приемлемым.

Так как рассматривается свободное движение тела, то абсолютное ускорение центра инерции деформированного тела равно нулю. Покажем, что тогда и $\mathbf{w}_0=0$. Если абсолютное ускорение центра инерции деформированного тела равно нулю, то

$$\mathbf{w}_0=-[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_C)+\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{r}_C+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_C^{\cdot}+\mathbf{r}_C^{\cdot\cdot}]$$

где $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра инерции деформированного тела относительно точки O. Но

$$\iiint\limits_v \rho_v \mathbf{r}\,dv=0$$

так как O — центр инерции недеформированного тела. Тогда

$$\mathbf{r}_C=\iiint\limits_V \rho_V \mathbf{R}\,dV=\iiint\limits_v \rho_v(\mathbf{r}+\mathbf{u})\,dv=\iiint\limits_v \rho_v \mathbf{u}\,dv=0$$

Таким образом $\mathbf{w}_0=0$, что означает тождественность задач о свободном движении упругого тела и о движении упругого тела вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром масс.

Для приложений наибольший интерес представляет исследование движения упругого тела при малых значениях углового ускорения $\boldsymbol{\omega}^{\cdot}$, что обеспечивается в двух практически важных случаях: при вращении тела вокруг оси, близкой к одной из главных центральных осей инерции, и при вращении тела, близкого по своим динамическим характеристикам к шару. При этом в выражении для силы инерции $\mathbf{K}$ можно пренебречь членом $\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{r}$, а в выражении (1.4) для $\mathbf{G}$ — членом $\mathbf{G}^{(2)}$ в сравнении с $\mathbf{G}^{(1)}$.

Суммируя все сделанные предположения, приводим задачу к следующему виду:

$$L(\mathbf{u})\equiv\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+\nabla^2\mathbf{u}\right)=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \tag{1.7}$$

$$I^{\vee}\boldsymbol{\omega}^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times I^{\vee}\boldsymbol{\omega}=\mathbf{m},\quad \mathbf{m}=-\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{G}^{(1)}-\mathbf{G}^{\cdot(1)} \tag{1.8}$$

где $\mathbf{G}^{(1)}$ определяется формулой (1.5), а уравнение (1.7) дополняется граничными условиями (1.2) для тензора $T^{\vee}$.

2. Пусть ω_i — проекции вектора угловой скорости на оси Ox_i, а $\mathbf{e}_i$ — орты этих осей ($i=1, 2, 3$). Будем искать решение уравнения (1.7) с граничными условиями (1.2) в виде

$$\mathbf{u}={}^1/_2\mathbf{V}_{ij}\omega_i\omega_j \quad (i, j=1, 2, 3) \tag{2.1}$$

где по повторяющимся индексам i и j проводится суммирование, а $\mathbf{V}_{ij}$ — некоторые новые неизвестные функции.

Нетрудно видеть, что если функции $\mathbf{V}_{ij}$ удовлетворяют краевым задачам

$$L(\mathbf{V}_{ij}=\mathbf{e}_i\times(\mathbf{e}_j\times\mathbf{r})+\mathbf{e}_j\times(\mathbf{e}_i\times\mathbf{r})\equiv-\mathbf{f}_{ij},\quad \mathbf{n}\cdot T^{\vee}(\mathbf{V}_{ij})\,|_S=0 \tag{2.2}$$

то функция $\mathbf{u}$ из (2.1) удовлетворяет уравнению (1.7) и условиям на границе (1.2). Краевая задача (2.2) для функций $\mathbf{V}_{ij}$ зависит от формы тела и параметров ρ, μ, ν и не зависит от величин, характеризующих его движение.

Так как $\mathbf{f}_{ij}=\mathbf{f}_{ji}$, то $\mathbf{V}_{ij}=\mathbf{V}_{ji}$ и решение задачи (1.7), (1.2) сводится к решению шести линейных стационарных краевых задач (2.2) для функций $\mathbf{V}_{ij}$, которые, используя индексные обозначения, можно представить так:

$\mathbf{V}_{ij}=V_{kij}$. Это позволяет переписать равенство (2.1) следующим образом: $u_i={}^1/_2 V_{ikl}\omega_k\omega_l$.

Подставляя u_i в выражение (1.5) для вектора $\mathbf{G}^{(1)}$, получим

$$G_i^{(1)}=\frac{1}{2}\iiint\limits_v \rho_v(2V_{pkl}x_p\delta_{ij}-V_{jkl}x_i-V_{ikl}x_j)\,dv\,\omega_j\omega_k\omega_l\equiv E_{ijkl}\omega_j\omega_k\omega_l \tag{2.3}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Выпишем выражение для работы деформирующей силы $\mathbf{f}_{ij}$ на перемещениях, порождаемых деформирующей силой $\mathbf{f}_{kl}$:

$$\iiint\limits_v \rho_v\mathbf{f}_{ij}\cdot\mathbf{V}_{kl}dv=-\iiint\limits_v \rho_v\mathbf{V}_{kl}\cdot[\mathbf{e}_i\times(\mathbf{e}_j\times\mathbf{r})+\mathbf{e}_j\times(\mathbf{e}_i\times\mathbf{r})]dv= \tag{2.4}$$
$$=\iiint\limits_v \rho_v(2V_{pkl}x_p\delta_{ij}-V_{ikl}x_j-V_{jkl}x_i)\,dv$$

В этом выражении отсутствует интеграл по поверхности тела, так как для любой функции $\mathbf{V}_{ij}$ выполнены граничные условия (2.2). Сравнивая (2.4) и (2.3), обнаруживаем простой физический смысл элементов объекта чертвертого порядка E_{ijkl}. Элемент E_{ijkl} равен половине работы силы $\mathbf{f}_{ij}$ на перемещениях, порождаемых силой $\mathbf{f}_{kl}$:

$$E_{ijkl}=\frac{1}{2}\iiint\limits_v \rho_v\mathbf{f}_{ij}\cdot\mathbf{V}_{kl}dv \tag{2.5}$$

Если пары индексов i, j и k, l совпадают, то получается выражение для энергии деформации тела, нагруженного силой $\mathbf{f}_{ij}$. Отсюда следует положительность элементов E_{ijij} при любых фиксированных i и j, в то время как остальные элементы могут принимать, вообще говоря, и отрицательные значения.

Очевидно, что подобно элементам тензора инерции, элементы E_{ijkl} для любого наперед заданного тела могут быть вычислены один раз и не зависят от закона его движения. Как и функции $\mathbf{V}_{ij}$, они зависят только от формы тела и параметров ρ, μ, ν.

Отметим ряд свойств объекта E_{ijkl}. Так как E_{ijkl} устанавливает связь между тремя векторами $\boldsymbol{\omega}$ и вектором $\mathbf{G}^{(1)}$, то на основании тензорного признака он является аффинным ортогональным тензором четвертого порядка. Непосредственно из формулы (2.5) следует, что $E_{ijkl}=E_{jikl}$, $E_{ijkl}=E_{ijlk}$. Кроме того, по теореме взаимности теории упругости тензор E_{ijkl} обладает еще одним свойством симметрии: $E_{ijkl}=E_{klij}$.

Тензор E_{ijkl} имеет 81 элемент, но в силу отмеченных свойств симметрии определению подлежит лишь 21 элемент. Нетрудно убедиться, что эти свойства симметрии необходимы и достаточны для существования у уравнения (1.8) интеграла энергии, имеющего вид:

$$^1/_2 I_{ij}\omega_i\omega_j+{}^3/_4 E_{ijkl}\omega_i\omega_j\omega_k\omega_l=\mathrm{const} \tag{2.6}$$

Пусть тело обладает осью симметрии. Не нарушая общности, будем считать, что это ось Ox_3. Тогда при повороте тела на угол π вокруг этой оси оно совместится само с собой. Это означает, что при замене ω_1 на $-\omega_1$, а ω_2 на $-\omega_2$ для любых i, j квадратичная форма $E_{ijkl}\omega_k\omega_l$, являющаяся поправкой к элементу I_{ij} тензора инерции, не меняется. Отсюда следует, что для любых i, j

$$E_{ij13}=E_{ij23}=0 \tag{2.7}$$

Если тело имеет три оси симметрии, то подлежат определению только шесть ненулевых элементов тензора E_{ijkl}.

Пусть тело имеет плоскость симметрии. Не нарушая общности, будем считать, что это плоскость Ox_1x_2. Тогда при зеркальном отражении относительно этой плоскости тело совмещается само с собой. Это означает, что при замене ω_3 на $-\omega_3$ форма $E_{ijkl}\omega_k\omega_l$ не должна измениться. Отсюда вновь получаются условия (2.7).

Рассмотрим случай, когда тело является телом вращения. Не умаляя общности, полагаем, что осью вращения служит ось Ox_3. Тогда при повороте тела вокруг этой оси на любой угол тело совмещается само с собой. Величину угла поворота примем равной $\pi/2$. Тогда при замене ω_1 на ω_2, а ω_2 на $-\omega_1$ форма $E_{ijkl}\omega_k\omega_l$ также не изменится. Отсюда в дополнение к (2.7) получаем для любых i, j следующие свойства: $E_{ij12}=0$, $E_{ij11}=E_{ij22}$.

Получим еще одно свойство элементов тензора E_{ijkl}. В силу линейности задачи (2.2) разность сил $\mathbf{f}_{ij}-\mathbf{f}_{kl}$ порождает решение $\mathbf{V}_{ij}-\mathbf{V}_{kl}$, а сумма $\mathbf{f}_{ij}+\mathbf{f}_{kl}$ определяет решение $\mathbf{V}_{ij}+\mathbf{V}_{kl}$. Но тогда для любых фиксированных значений индексов i, j, k, l будем иметь

$$0\leqslant \iiint\limits_v \rho_v(\mathbf{f}_{ij}-\mathbf{f}_{kl})\cdot(\mathbf{V}_{ij}-\mathbf{V}_{kl})\,dv=E_{ijij}+E_{klkl}-2E_{ijkl}$$

$$0\leqslant \iiint\limits_v \rho_v(\mathbf{f}_{ij}+\mathbf{f}_{kl})\cdot(\mathbf{V}_{ij}+\mathbf{V}_{kl})\,dv=E_{ijij}+E_{klkl}+2E_{ijkl}$$

Отсюда получаем $E_{ijij}+E_{klkl}\geqslant 2|E_{ijkl}|$ (не суммировать!). Так как $\iiint\limits_v \rho_v\mathbf{u}\,dv=0$, а силы $\mathbf{f}_{ij}$ линейны по компонентам радиус-вектора $\mathbf{r}$, то из выражения (2.5) для элементов тензора E_{ijkl} непосредственно следует важное свойство: тензор E_{ijkl} не зависит от выбора O, что существенно отличает его от тензора инерции I_{ij}.

Применим полученные свойства тензора E_{ijkl} к определению вектора $\mathbf{G}^{(1)}$ для простейших геометрических тел. Так, например, шар обладает тремя осями симметрии, поэтому определению подлежат лишь шесть ненулевых элементов E_{ijkl}. Но эти оси симметрии будут одновременно и осями вращения. Поэтому все шесть ненулевых элементов равны между собой. Обозначим их общее значение через α. Тогда для шара получаем

$$\mathbf{G}^{(1)}=\alpha\omega^2\boldsymbol{\omega},\qquad \mathbf{m}=-\alpha(\omega^2\boldsymbol{\omega})^{\boldsymbol{\cdot}},\qquad \alpha\geqslant 0$$

В случае эллипсоида вращения или кругового цилиндра конечной длины будет по-прежнему три оси симметрии, но из них лишь одна является одновременно и осью вращения. Не нарушая общности, считаем, что это есть ось Ox_3. Тогда

$$E_{1111}=E_{1122}=E_{2211}=E_{2222}=a,\qquad E_{1133}=E_{3311}=E_{2233}=E_{3322}=b$$

$$E_{3333}=c,\qquad a\geqslant 0,\qquad c\geqslant 0,\qquad a+c\geqslant 2|b|$$

где a, b, c — краткие обозначения для величин E_{ijkl}.

Вектор $\mathbf{G}^{(1)}$ представляется в виде

$$\mathbf{G}^{(1)}=(a\omega_1^2+a\omega_2^2+b\omega_3^2)\boldsymbol{\omega}+[(b-a)\omega_1^2+(b-a)\omega_2^2+(c-b)\omega_3^2]\omega_3\mathbf{e}_3$$

Таким образом, определив вектор $\mathbf{G}^{(1)}$, для любого упругого тела можно вычислить момент $\mathbf{m}$ и составить уравнения движения (1.8), которые имеют два первых интеграла (энергии и кинетического момента). Если моменты инерции тела существенно различны, то движение упругого тела лишь незначительно отличается от движения Эйлера — Пуансо и может быть найдено методами малого параметра. Если же моменты инерции близки между собой, движение значительно усложняется, приобретая качественные отличия от движения Эйлера — Пуансо.

Автор благодарит Д. М. Климова и В. Ф. Журавлева за постоянное внимание к этой работе.

Поступила 27 XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мельхиор П.* Земные приливы. М., «Мир», 1968.
2. *Мельхиор П.* Физика и динамика планет. М., «Мир», 1975.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.