МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1980

УДК 531.55:521.1

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ СПУТНИКА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

А. А. АНЧЕВ, А. А. МЕЛИКЯН

(София, Москва)

Рассмотрена задача об оптимальном управлении математическим маятником, которая описывает также управляемый поворот спутника в плоскости круговой орбиты. В работах [1–5] для достаточно больших значений управляющего момента исследованы программная задача и оптимальный синтез приведения системы в начало координат как на всей фазовой плоскости, так и на фазовом цилиндре. В работе [6] при помощи развитого в ней метода осреднения для управляемых систем упомянутая задача рассмотрена при малых значениях момента.

В публикуемой работе проведено численное и качественное исследование программной задачи о переориентации спутника для малых значений управляющего момента, построены зависимости времени быстродействия и числа переключений от момента.

1. Вращение спутника вокруг собственной оси в плоскости круговой орбиты под действием внешнего или внутреннего управляющего момента описывается безразмерным дифференциальным уравнением и ограничением [2, 3, 7]:

$$x^{\cdot\cdot}+\sin x=au,\quad |u|\leqslant 1,\quad a>0 \tag{1.1}$$

Величины, использованные в (1.1), имеют следующий смысл:

$$t=\sqrt{3\frac{A-C}{B}}\,\omega t',\quad a=\frac{2}{3}\frac{M^*}{\omega^2(A-C)},\quad x=2\vartheta,\quad u=\frac{M}{M^*} \tag{1.2}$$

Здесь ω — угловая скорость движения спутника по орбите; A, B, C — главные центральные моменты инерции спутника; ϑ — угол между осью C спутника и его радиус-вектором; M и M^* — управляющий момент и его максимальная величина, $|M|\leqslant M^*$; t' — реальное время. По предположению $A>C$. Дифференцирование в (1.1) проводится по безразмерному времени t. Отметим, что управляющий момент M может быть как внешним, создаваемым реактивным двигателем, так и внутренним, возникающим благодаря наличию вращающихся внутренних масс (случай спутника-гиростата [3]).

Рассмотрим задачу об оптимальном по быстродействию переводе спутника из положения $\vartheta=\pi$, $\vartheta^{\cdot}=0$ в положение $\vartheta=0$, $\vartheta^{\cdot}=0$. Оба положения соответствуют устойчивому вращению спутника по орбите [7]. При помощи соотношений (1.1), (1.2) указанная задача запишется в виде следующей задачи оптимального управления ([8]):

$$x^{\cdot}=y,\quad y^{\cdot}=-\sin x+au,\quad |u|\leqslant 1 \tag{1.3}$$

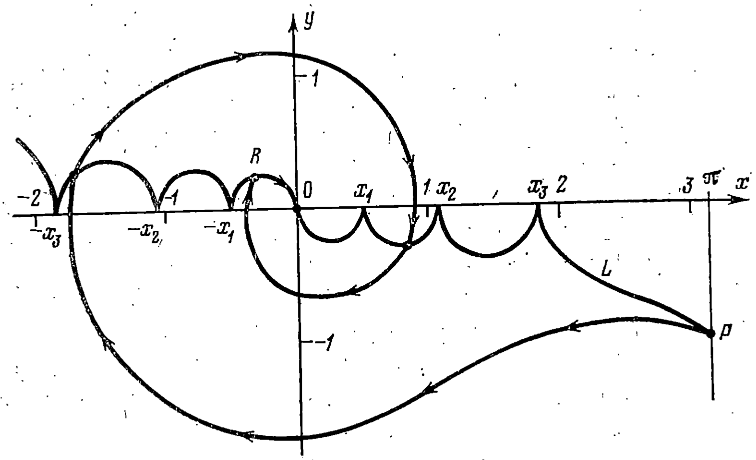
с граничными условиями

$$x(0)=2\pi,\quad y(0)=0,\quad x(t_1)=y(t_1)=0,\quad T=\min t_1 \tag{1.4}$$

Существование решения $\{T, x(t), u(t),\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ задачи (1.3), (1.4) следует из результата работы [9] с учетом того, что, например, синтез $u=-\operatorname{sgn} x^{\cdot}$ дает решение задачи о приведении системы (1.1) в начало координат из любой начальной точки фазовой плоскости $(x, x^{\cdot})$. Используя (1.3), (1.4), можно показать, что решение рассматриваемой задачи обладает симметрией вида

$$2\pi-x(t)=x(T-t),\quad u(t)=-u(T-t),\quad 0\leqslant t\leqslant {}^1/_2T \tag{1.5}$$

Из (1.5) следует, в частности, что $x({}^1/_2T)=\pi$. Нетрудно видеть, что время ${}^1/_2T$ является оптимальным временем быстродействия в задаче приведения системы (1.3) из многообразия (прямой) $x=\pi$ в начало координат, а функции (1.5) $x(t)$, $u(t)$, взятые на интервале ${}^1/_2T\leqslant t\leqslant T$, дают решение



Фиг. 1

этой задачи. В силу автономности рассматриваемой системы формулировка последней задачи может быть дана в виде

$$x^{\cdot}=y,\quad y^{\cdot}=-\sin x+au,\quad |u|\leqslant 1 \tag{1.6}$$
$$x(0)=\pi,\quad x(t_1)=y(t_1)=0,\quad T'={}^1/_2T=\min t_1$$

Задача (1.6) является задачей оптимального быстродействия с нефиксированным концом. Обозначим через $p(t)$, $q(t)$, $0\leqslant t\leqslant T'$ переменные, сопряженные к x и y соответственно. Из условий трансверсальности [8] для задачи (1.6) следует, что вектор (p, q) в начальный момент ортогонален многообразию $x=\pi$ в плоскости (x, y) : $p(0)=\lambda$, $q(0)=0$. Вычисляя максимум гамильтониана $H=py-q\sin x+qau$ по u на отрезке $-1\leqslant u\leqslant 1$, получаем для оптимального управления выражение $u(t)=\operatorname{sgn} q(t)$.

Таким образом, соотношения принципа максимума [8] для задачи (1.6) приводят к следующей краевой задаче четвертого порядка:

$$x^{\cdot}=y,\quad y^{\cdot}=-\sin x+a\operatorname{sgn} q$$
$$p^{\cdot}=q\cos x,\quad q^{\cdot}=-p,\quad 0\leqslant t\leqslant T' \tag{1.7}$$
$$x(0)=\pi,\quad q(0)=0,\quad x(T')=y(T')=0$$

2. Задача (1.7) для различных значений параметра $a<1$ решалась численно; в алгоритме были использованы некоторые качественные особенности оптимального синтеза в задаче о приведении системы (1.1) в начало координат [1, 2, 4, 5]. Кратко опишем их. При всех значениях $a>0$ существует односвязная ветвь L кривой переключения, проходящая через начало координат, обладающая центральной симметрией и уходящая в бесконечность в II и IV квадрантах плоскости (x, y). Для значений $a>a_1=0.7246$ кривая L является гладкой (при $a>1$ также монотонной). При $a_{k+1}<a\leqslant a_k$ кривая L имеет $2k$ изломов в точках $y=0$, $x=\pm x_i(a)$ $(i=1, 2, \ldots, k,\ k=1, 2, \ldots)$ (фиг. 1). Величины a_k, x_k являются корнями трансцендентных уравнений

$$\pi-\arcsin a+2(x_0+x_1(a)+\ldots+x_{k-1}(a))=(1+\sqrt{1-a})/a, \quad 0<a<a_{k-1} \tag{2.1}$$

$$x+2(x_0+x_1(a)+\ldots+x_{k-1}(a))=(1-\cos x)/a \tag{2.2}$$

$$x_{k-1}<x<\pi-\arcsin a_k \quad (k=1, 2, \ldots), \quad x_0=0, \quad a_0=\infty$$

полученных из анализа соотношений принципа максимума. Значения a_k имеют следующий механический смысл: если момент a в (1.1) лежит в интервале $a_{k+1}<a\leqslant a_k$ $(k=0, 1, \ldots)$ то для того, чтобы привести математический маятник, находящийся в нижнем положении равновесия, в верхнее вертикальное положение, необходимо использовать не менее чем k переключений. Уравнения (2.1), (2.2) решались совместно; ниже приведены результаты численного счета для первых десяти a_k.

Из граничного условия $q(0)=0$ в (1.7) видно, что конец искомой оптимальной программной траектории, соответствующий начальному моменту $t=0$, лежит на кривой переключения упомянутого выше оптимального синтеза, т. е. является точкой пересечения этой кривой с прямой $x=\pi$. На фиг. 1 изображена одна из траекторий такого типа, начинающаяся в точке P.

В работе [1] показано, что кроме центральной ветви кривой переключения существует еще счетное множество ветвей, уходящих в бесконечность. Каждая из этих дополнительных ветвей кривой переключения непрерывно смыкается с ветвью другой особой кривой — рассеивающей (терминология [10]), из точек которой исходят две оптимальные траектории. Отметим, что в [1] точки рассеивающей кривой без должного обоснования выделялись по признаку обращения в нуль сопряженной переменной, а не по равенству функционала (времени быстродействия) на двух траекториях. Так, данные фиг. 7, а ([1], стр. 32, участок рассеивающей кривой в нижней полуплоскости) противоречат теореме [4, 5] о чередовании корней у функций $x^{\cdot}(t)$ и сопряженной с ней $q(t)$ на оптимальном движении; отсюда следует, что, по крайней мере, на упомянутом участке рассеивающей кривой $q\neq0$.

Таким образом, начало оптимальной траектории задачи (1.7) может лежать на пересечении прямой $x=\pi$ как с центральной ветвью кривой переключения (точка P, фиг. 1), так и с другой ветвью (точка Q, фиг. 2). В соответствии с указанными случаями будем различать траектории первого и второго типов.

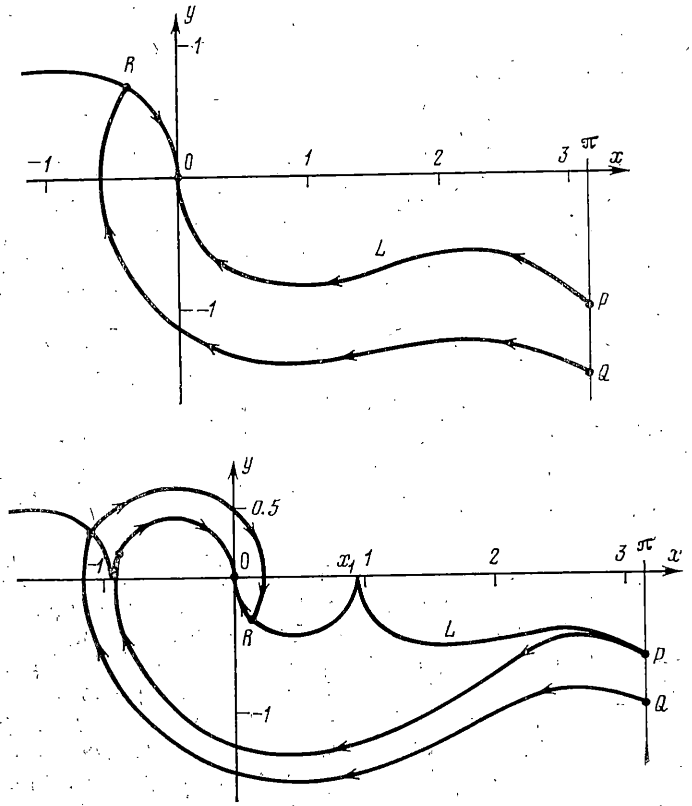
Для расчета траектории первого типа в обратном времени была использована итеративная процедура. При выбранном фиксированном a по приведенным данным

a_1	0.7246	a_6	0.1516
a_2	0.4223	a_7	0.1304
a_3	0.2934	a_8	0.1144
a_4	0.2240	a_9	0.1019
a_5	0.1809	a_{10}	0.0918

определялось число переключений на траектории. Если $k=0$, то искомая траектория является просто участком линии переключения (кривая $0P$, фиг. 2, а) и может быть построена интегрированием системы дифференциальных уравнений

$$x^{\cdot}=-y,\quad y^{\cdot}=\sin x+(-1)^k a,\quad x(0)=y(0)=0 \tag{2.3}$$

до выполнения равенства $x=\pi$. Для $k\geqslant 1$ на каждой итерации менялась точка R переключения и схода траектории с дуги $0R$ кривой переключения

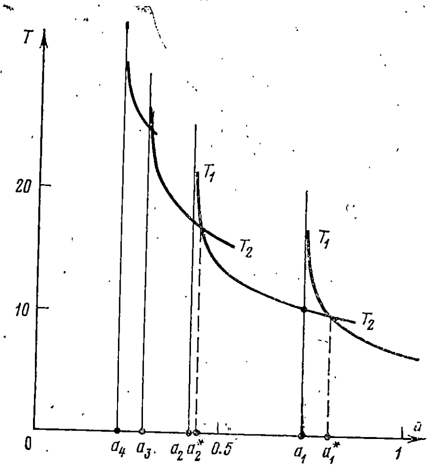


Фиг. 2

(фиг. 1). Сначала система (2.3) интегрировалась до момента t_1: $x(t_1)=(-1)^k x_1(a)$, т. е. до пересечения траектории с осью x. Затем на первом шаге в качестве момента схода с дуги $0R$ брался момент $t_2={}^1/_2 t_1$. Интегрировалась система (1.7) в обратном времени. Причем остановка производилась в момент k-го (считая точку R) обращения в нуль сопряженной переменной $q(t)$. В качестве следующего приближения для точки схода R бралась середина отрезка $[t_3, t_2]$ или $[t_2, t_1]$ (на первом шаге $t_3=0$) в зависимости от того, оказалась ли последняя точка траектории правее вертикали $x=\pi$ или левее ее. Сходимость итераций определялась по близости к π координаты x в момент остановки. Исследовалась зависимость $T=T(a)$ времени оптимального быстродействия от момента a. Функция $T(a)$, очевидно, является монотонно убывающей с ростом a. Расчеты показали, что при $a\to a_k+0$ имеет место $T_1\to\infty$ (см. фиг. 3); через $T_1(T_2)$ будем обозначать время перехода на траекториях первого (второго) типа. Следовательно, для значений a в некоторой окрестности справа от a_k оптимальными являются траектории второго типа. Для значений $a>a_k$, достаточно близких к a_k, рассчитывались траектории второго типа и вычислялось время

$T_2(a)$; отыскивалось критическое значение a_k^*, при котором $T_1=T_2$. Описанный выше алгоритм не давал сходимости для траекторий второго типа, т. е. для значений $a_k<a<a_k^*$ при числе переключений, равном $k+1$. Поэтому траектории второго типа вычислялись минимизацией времени достижения прямой $x=\pi$ по моменту первого схода (в обратном времени) с кривой переключения; число переключений полагалось равным $k+1$. Искомая зависимость имеет вид $T(a)=\min[T_1(a), T_2(a)]$.

Укажем некоторые ее качественные особенности. На интервале $a_{k+1}^*<a<a_k$ оптимальными являются траектории первого типа. В точке $a=a_k$ происходит перестройка фазовой картины оптимального синтеза. Траектория первого типа при $a=a_k-0$ переходит при $a=a_k+0$ в траекторию второго типа с сохранением числа переключений; функция $T(a)$ в окрестности a_k — гладкая. На интервале $a_k<a<a_k^*$ оптимальными являются траектории второго типа. При переходе через точку a_k^* в сторону увеличения a второй тип траектории сменяется первым, число переключений уменьшается на два (для полной траектории), график функции $T(a)$ имеет излом в точке a_k^*, фиг. 3. Таким образом, точка a_k^* является точкой бифуркации, при этом значении a существуют две оптимальные траектории первого и второго типов.



Фиг. 3

На фиг. 2, *а*, *б* приведены результаты расчетов двух оптимальных траекторий для $a=a_1^*$ и $a=a_2^*$.

Из фиг. 3 видно, что для приближенного вычисления a_k^* можно рассчитать ветвь зависимости $T_1(a)$ на интервале (a_{k+1}, a_k) и гладко экстраполировать ее вправо от точки a_k до пересечения с ветвью интервала (a_k, a_{k-1}). Абсцисса точки пересечения является приближенным значением a_k^*. При этом используется только алгоритм расчета траекторий первого типа. Ниже приведены значения пяти a_k^*:

a_1^*	a_2^*	a_3^*	a_4^*	a_5^*
0.80	0.44	0.30	0.23	0.19

Величины a_1^* и a_2^* рассчитывались с использованием траекторий первого и второго типов, последние три значения получены описанным приближенным методом. Число переключений $N=N(a)$ на оптимальной траектории перевода системы из точки $(2\pi, 0)$ в начало координат определяется равенством $N(a)=2k+1$, $a_{k+1}^*<a<a_k^*$, $(k=0, 1, \ldots)$, $a_0^*=\infty$.

В точках a_k^* $(k=1, 2, \ldots)$, функция $N(a)$ принимает два значения $2k+1$ и $2k-1$ в соответствии с существованием двух оптимальных траекторий.

Авторы благодарят Д. Петрову и Л. С. Вишневецкого за помощь при проведении расчетов.

Поступила 26 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Garcia Almuzara J. L., Flügge-Lotz I.* Minimum time control of a nonlinear system. Different. Equat., 1968, vol. 4, No. 1, p. 12–39.

2. *Белецкий В. В.* Об оптимальном приведении искусственного спутника Земли в гравитационно-устойчивое положение. Космические исследования, 1971, т. 9, вып. 3.
3. *Anchev A. A.* Equilibrium attitude transitions of a three-rotor gyrostat in a circular orbit. AIAA Journal, 1973, vol. 11, No. 4, p. 467–472.
4. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М., «Наука», 1972.
5. *Ли Э. Б., Маркус Л.* О необходимых и достаточных условиях оптимальности по быстродействию для нелинейных систем второго порядка. Тр. II Междунар. конгр. ИФАК, Базель 1963., М., «Наука», 1965, стр. 155–166.
6. *Акуленко Л. Д., Черноусько Ф. Л.* Метод осреднения в задачах оптимального управления. ЖВМ и МФ, т. 15, № 4.
7. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М., Изд-во МГУ, 1975.
8. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1976.
9. *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестн. МГУ, Сер. матем., механ., физ., хим., 1959, № 2.
10. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.