

«ИЗБРАННЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ»

(Рецензия на книгу Н. Ф. Морозова. Изд-во ЛГУ, 1978)

Издательством Ленинградского государственного университета выпущена книга Н. Ф. Морозова «Избранные двумерные задачи теории упругости». Во многих отношениях книга примечательна и заслуживает специального разбора. При первом знакомстве может показаться, что в ней нет единого стержневого вопроса. Между тем это не так. В книге действительно собраны, если можно так выразиться, научные новеллы по нескольким проблемам математической теории упругости, и их отбор в большой степени продиктован научными интересами самого автора. Вместе с тем вся книга пронизана единой идеей: рассмотреть методами строгого математического анализа ряд сложных проблем теории упругости. Сложных в том плане, что полученные здесь результаты отнюдь не очевидны и для исследователя с сильной интуицией.

Книга имеет четыре главы. Первая из них «Общая часть» содержит изложение основ нелинейной теории упругости. Приводятся соотношения для элементов конечной деформации, поворотов, дается решение вопроса о восстановлении вектора перемещений по конечным деформациям. В общем, здесь излагается геометрия конечной деформации, и следует отметить большую простоту и наглядность в изложении этого довольно сложного вопроса. Обычно традиционное изложение затруднено стремлением авторов обязательно использовать общие криволинейные координаты. Н. Ф. Морозов строит изложение материала на основе декартовой системы координат, чем достигается большая прозрачность, и последующий переход к общим криволинейным координатам не вызывает больших затруднений. Здесь же введено понятие напряжений и трактуется вопрос об определяющих уравнениях для произвольного нелинейно-упругого тела.

Во второй главе «Плоская деформация» разбирается ряд вопросов двумерной нелинейной теории упругости. Здесь изучаются некоторые нетрадиционные проблемы, в частности, подробно исследуется постановка краевых задач для областей с углами. Этот вопрос в последние годы приобрел большое значение в связи с численными методами, теорией разрушения и т. д. Подробно исследуется поведение решений в окрестности угловых точек, в частности, для многих задач рассчитаны коэффициенты интенсивности напряжений. Специальный раздел посвящается моментной теории упругости. И здесь подробно исследуется постановка краевых задач для негладких контуров, даются асимптотические представления решений в окрестности углов. Весь этот материал используется для уточнения критериев хрупкого разрушения. Целесообразность применения моментных соотношений для уточнения критериев разрушения в свое время была отмечена В. В. Новожиловым. Последние две главы посвящены изгибу и колебаниям пластин. В большей части они посвящены собственным результатам автора. Третья глава — «Изгиб пластин» начинается с краткого изложения гипотез Кирхгофа, и затем автор приводит интегральные оценки погрешностей этой теории по сравнению с точными решениями соответствующих трехмерных задач. Подробно излагается уточненная теория толстых пластин Рейсснера и постановка краевых задач для этой теории. Большой интерес представляет исследование особенности в углах на базе теории Рейсснера. Для основных членов соответствующих асимптотик приводятся коэффициенты интенсивности.

Основное же содержание третьей главы составляет математический анализ нелинейных статических задач теории пластин.

Известно, что нелинейная теория пластин начала развиваться в известных трудах И. Г. Бубнова. Полная формулировка краевых задач для теории среднего изгиба была дана Карманом. С точки зрения механики наибольший интерес представляют те явления, которые имеют место при существенно больших деформациях, что связано с глубокой нелинейностью задач. В соответствии с этим особенно полезны математические рассуждения, которые не ограничены малостью параметров задачи. Именно в этом направлении и проводится исследование этого круга задач в рецензируемой книге. Автором без всякого предположения о малости сил, деформаций устанавливается разрешимость основных краевых задач теории Кармана. Для получения достаточно полных исчерпывающих результатов приходится использовать метод Лере — Шаудера. Механическое значение результатов следующее. Известно, что краевые задачи устойчивости пластин не всегда разрешимы даже при естественных условиях (задача находится на «спектре»). Теорема о разрешимости уравнений Кармана показывает, что основные допущения теории среднего изгиба устраняют этот недостаток. Особое внимание в этой главе уделено обоснованию приближенных методов в нелинейной теории пластин.

Разобраны метод Бубнова — Галеркина, метод Ньютона — Канторовича и др. Интересны теоремы о единственности осесимметричной формы равновесия для круг-

лых пластин при осесимметричной нагрузке. Такие теоремы доказаны при неотрицательности цепных усилий на контуре, или при неотрицательных на контуре продольных смещениях.

Последняя глава — «Колебания тонких пластин» посвящена динамическим задачам теории пластин.

Здесь в первую очередь рассматриваются начально-краевые задачи для динамических уравнений Кармана. Вводятся обобщенные решения для этих уравнений, устанавливается их существование и классы единственности. Аналогичный анализ приведен и для уточненных уравнений с оператором С. П. Тимошенко, когда учитывается инерция вращения, а также для уравнений, содержащих диссипативные члены, пропорциональные скорости.

Особый интерес представляет исследование периодических режимов для уравнения Кармана, если внешняя нагрузка сама периодична. Так, примечательна теорема о существовании по крайней мере одного периодического режима и теорема о диссипативности этих уравнений. Диссипативность — весьма важное свойство краевых задач теории пластин, впервые в этом круге вопросов изученное автором.

Другое важное свойство — конвергентность также впервые в нелинейной теории оболочек было изучено Н. Ф. Морозовым. Грубо говоря, конвергентность системы означает наличие единственного устойчивого в большом периодического режима. Приводится доказательство этого замечательного свойства для круглой пластины с учетом линейного демпфирования. Вообще, в этой части исследования автор перенес многие понятия и методы из качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и динамических систем в нелинейную теорию пластин. Перенос этот весьма непросто и очень перспективен, ибо помогает глубже проникнуть в целый ряд явлений как математического, так и механического характера.

Заканчивая обзор этой во многом интересной монографии, хотелось бы отметить одно обстоятельство. Начиная с некоторого периода зрелости точных наук неоднократно возникали дискуссии об эвристической роли строгого математического исследования в естествознании. Хотя история науки в целом неоднократно положительно его решала, распространено мнение, что строгий математический анализ проблемы наводит лишь определенный «блеск» на вещи, хорошо изученные и осознанные на уровне численного анализа и естественно-научной интуиции. Книга Н. Ф. Морозова лишней раз показывает, что строгий математический анализ сам по себе является мощным средством познания, вскрытия отнюдь не очевидных и для сильной интуиции фактов и явлений, и в этой части может сравниться с экспериментальным методом. Просто мы имеем разные и часто переплетающиеся пути. Монография Н. Ф. Морозова весьма полезна широкому кругу читателей, к которому можно отнести специалистов в области механики, математиков, интересующихся приложениями, специалистов-вычислителей и др. Особенно же она полезна молодым исследователям.

И. И. Ворович