

ВЛИЯНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ ВИБРАЦИИ НА ПОГРЕШНОСТИ
ГИРОСКОПА С УПРУГИМИ ШАРИКОПОДШИПНИКАМИ
ГЛАВНОЙ ОСИ

М. А. ПАВЛОВСКИЙ, В. Е. ПЕТРЕНКО

(Киев)

Влияние поступательной вибрации на погрешности гироскопов изучалось в работах [1, 2 и др.].

Рассматриваемая задача посвящена анализу пространственных колебаний гироскопа, возникающих в силу нелинейных связей между координатами, обусловленных контактной зависимостью Герца, которая описывает деформации опор главной оси. В отличие от известных работ [3, 4] по анализу резонансных колебаний гироскопа¹ учитывается трение гистерезисного типа, проявляющееся при упругих деформациях элементов конструкции [5].

1. В качестве исследуемой модели гироскопического прибора примем гироскоп, вращающийся в шариковых опорах конечной жесткости; кольцо карданова подвеса будем считать абсолютно жестким, а его опору безлюфтовой. Для описания движения прибора введем следующие системы координат: $O\xi\eta\zeta$, $Oxyz$, $Cx_1y_1z_1$, связанные с основанием, кольцом карданова подвеса и главными центральными осями инерции ротора соответственно. Оси системы координат $Cx_0y_0z_0$ направим параллельно осям $Oxyz$. В силу динамической симметрии ротора система координат $Cx_1y_1z_1$ выбирается так, чтобы она не участвовала в собственном вращении ротора, заданном угловой скоростью γ . Точка O совпадает с точкой подвеса гироскопа. Взаимное положение систем координат показано на фиг. 1, где β — угол поворота кольца относительно корпуса, δ_1 и δ_2 — углы поворота ротора относительно кольца, ρ — вектор упругих смещений центра масс (точка C), проекции которого на оси системы координат $Oxyz$ равны x , y и z , W_η и W_ζ — проекции линейного ускорения основания на оси системы координат $O\xi\eta\zeta$.

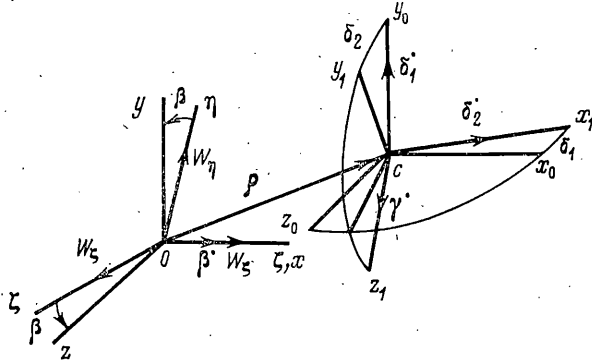
Будем считать, что в местах контакта шариков с кольцами развиваются упругие силы, описываемые контактной теорией Герца [6, 7], а рассеяние энергии в приборе происходит за счет сил гистерезисного и вязкого трения [5]. При составлении выражений для упругих сил и моментов воспользуемся методикой работы [7], удерживая в разложениях члены второго и третьего порядка относительно произведения координат. Гистерезисное трение опишем зависимостью Н. Н. Давиденкова, которую представим в виде [5]:

$$\Phi_j^\pm = -q_j v_j + q_{1j} v_j^* \quad (j=1, \dots, 6) \quad (1.1)$$

где $q_j = q_{j0} (v_j) \rho_j^{m_j-1}$, $q_{1j} = q_{1j0} (v_j) \rho_j^{m_j-1}$ — коэффициенты гармонической линеаризации [5], ω — частота колебаний, v_j и m_j — параметры петли гистерезиса, $v_1 = x$, $v_2 = y$, $v_3 = z$, $v_4 = \delta_1$, $v_5 = \delta_2$, $v_6 = \beta$.

¹ См. также: Журавлев В. Ф. Теория вибрации гироскопов. М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1972, препринт № 22.

Уравнения движения прибора составим для случая включения его по схеме гиротакметра, удержав в этих уравнениях после разложения тригонометрических функций в степенные ряды в окрестности начального положения оси гироскопа ($\beta=0$, $\delta_1=0$ и $\delta_2=0$) члены не выше третьего порядка относительно произведения координат и их производных. Отразив путем введения по методике [3] малого положительного параметра μ малость нелинейных членов, а также линейных членов, описывающих внешнее возмущение, силы демпфирования и простую взаимосвязь между ко-



Фиг. 1

ординатами, возникающую из-за разброса параметров шарикоподшипников, получим

$$\begin{aligned}
 v_j'' + \omega_{j0}^2 v_j &= \mu Q_j \quad (j=1,2,3), \quad \delta_1'' - \Omega(\delta_2' + \beta') + n_1^2 \delta_1 = \mu Q_4 \\
 \delta_2'' + \beta'' + \Omega \delta_1' + n_1^2 \delta_2 &= \mu Q_5, \quad \beta'' + b \delta_2'' + \Omega_1 \delta_1' + n_2^2 \beta = \mu Q_6 \quad (1.2) \\
 Q_1 &= q_1^* x - h_1^0 x' + \frac{1}{2} W_1 \{ \exp[i(\omega_1 t + \varphi_1)] + \\
 &+ \exp[-i(\omega_1 t + \varphi_1)] \} - s_{14} \delta_1 \mp S_{134} \delta_1 z \mp s_{113} x z + \\
 &+ S_{1111} x^3 + S_{1122} x y^2 + S_{1144} x \delta_1^2 + S_{1155} x \delta_2^2 + S_{1133} x z^2 + \dots \\
 Q_2 &= q_2^* y - h_2^0 y' + z \beta'' + y \beta'^2 + 2z \beta' + \\
 &+ \frac{1}{2} W_2 \{ \exp[i(\omega_2 t + \varphi_2)] + \exp[-i(\omega_2 t + \varphi_2)] \} + \\
 &+ s_{25} \delta_2 \pm S_{235} z \delta_2 \mp s_{223} y z + S_{2222} y^3 + S_{2112} x^2 y + S_{2233} y z^2 + S_{2244} y \delta_1^2 + \dots \\
 Q_3 &= q_3^* z - h_3^0 z' - y \beta'' + z \beta'^2 + 2y \beta' + \frac{1}{2} W_3 \{ \exp[i(\omega_3 t + \varphi_3)] + \\
 &+ \exp[-i(\omega_3 t + \varphi_3)] \} \mp (s_{333} z^2 + s_{322} y^2 + s_{311} x^2) \mp \\
 &\mp S_{314} x \delta_1 \pm S_{325} y \delta_2 + S_{3113} x^2 z + S_{3223} y^2 z + S_{3333} z^3 + \dots \\
 Q_4 &= q_4^* \delta_1 - h_4^0 \delta_1' - b_2 (\beta' + \delta_2') (\beta' \delta_1 - \delta_2 \delta_1') - \beta'' \delta_1 \delta_2 - \beta' (\delta_1' \delta_2 + \delta_1 \delta_2') + \\
 &+ \frac{1}{2} \delta_1'' \delta_2^2 + \delta_1' \delta_2' \delta_2 - \frac{1}{2} \Omega \delta_1^2 \beta'' - s_{41} x \mp S_{413} x z \mp s_{434} z \delta_1 + S_{4444} \delta_1^4 + \\
 &+ S_{4455} \delta_1 \delta_2^2 + S_{4114} x^2 \delta_1 + S_{4224} y^2 \delta_1 + S_{4334} z^2 \delta_1 - S_{4125} x y \delta_2 + \dots \\
 Q_5 &= q_5^* \delta_2 - h_5^0 \delta_2' + b_2 \delta_1' (\beta' \delta_1 - \delta_2 \delta_1') - \frac{1}{2} \beta'' \delta_1^2 - \delta_1 \delta_1' \beta' - \\
 &- \Omega (\beta' \delta_1 \delta_2 - \frac{1}{2} \delta_1' \delta_2^2) + s_{52} y \mp s_{535} z \delta_2 \pm S_{523} y z + \\
 &+ S_{5555} \delta_2^3 + S_{5445} \delta_1^2 \delta_2 + S_{5225} y^2 \delta_2 + \dots \\
 Q_6 &= q_6^* \beta - h_6^0 \beta' + b (\beta'' \delta_1^2 + \beta' \delta_1 \delta_1' + \frac{1}{2} \delta_2'' \delta_1^2 - \delta_1'' \delta_1 \delta_2) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -b_1\delta_1(\delta_1\beta^* + \delta_1\beta^{**} - \delta_2\delta_1^* - \delta_2\delta_1^{**}) + b_3\delta_1^*(\delta_1\beta^* - \delta_2\delta_1^*) + \\
 & + \Omega_1[\delta_1\delta_2\delta_2^* + 1/2\delta_1^*(\delta_2^2 + \delta_1^2)] + S_{623}yz + s_{635}z\delta_2 \pm \\
 & \pm S_{6124}xy\delta_1 \mp S_{6225}y^2\delta_2 + s_{6244}y\delta_1^2 + s_{6255}y\delta_2^2 + s_{6666}\beta^3 + \dots \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{j0}^2 = K_{jj}m_0^{-1} \quad (j=1, 2, 3), \quad n_1^2 = K_{55}I_*^{-1}, \quad n_2^2 = k_{66}I_0^{-1}, \quad \Omega = HI_*^{-1}, \quad \Omega_1 = HI_0^{-1}, \quad b = I_*I_0^{-1}, \\
 b_1 = II_0^{-1}, \quad b_2 = (I_* - I)I_*^{-1}, \quad b_3 = (I_* - I)I_0^{-1}, \quad h_j = f_jE_j^{-1}, \quad q_j^* = K_{jj}q_jE_j^{-1}, \quad q_{1j}^* = K_{jj}q_{1j}E_j^{-1} \\
 s_{jr} = k_{jr}E_j^{-1}, \quad S_{jri} = K_{jri}E_j^{-1}, \quad S_{jris} = K_{jris}E_j^{-1}, \quad h_r^0 = h_r + q_{1r}^* \quad (j, r, s, i=1, \dots, 6), \\
 E_j = m_0 \quad (j=1, 2, 3), \quad E_j = I_* \quad (j=4, 5), \quad E_6 = I_0
 \end{aligned}$$

$$K_{623} = K_{33} - K_{22}, \quad K_{33} = \frac{3}{2} n_0 \sum_{j=1}^2 G_j w_j^{1/2} \sin^2 \alpha_j \left(1 + \frac{2}{3} a_j \operatorname{ctg}^2 \alpha_j \right)$$

$$K_{11} = K_{22} = \frac{3}{4} n_0 \sum_{j=1}^2 G_j w_j^{1/2} \cos^2 \alpha_j \left(1 + \frac{2}{3} a_j \operatorname{tg}^2 \alpha_j \right), \quad k_{223} = \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} a_{0j}$$

$$K_{6124} = K_{6225} = K_{314} = K_{325} = K_{134} = K_{235} = K_{413} = K_{523} = \sum_{j=1}^2 l_j a_{0j}$$

$$k_{311} = k_{322} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} a_{0j}$$

$$a_{0j} = \frac{3}{8} n_0 G_j w_j^{-1/2} \cos^2 \alpha_j [1 - 2a_j (3 - \cos^{-2} \alpha_j)] \sin \alpha_j$$

$$K_{2233} = K_{3223} = \frac{3}{32} n_0 \sum_{j=1}^2 G_j w_j^{-1/2} \cos^2 \alpha_j \sin^2 \alpha_j [1 - 2a_j (\sin^{-2} \alpha_j \cos^{-2} \alpha_j - 6)]$$

$$K_{3333} = \frac{1}{16} n_0 \sum_{j=1}^2 G_j w_j^{-1/2} \sin^4 \alpha_j (1 - 12a_j \operatorname{ctg}^2 \alpha_j),$$

$$K_{2222} = K_{2112} = \frac{3}{128} n_0 \sum_{j=1}^2 G_j w_j^{-1/2} \cos^4 \alpha_j (1 - 12a_j \operatorname{tg}^2 \alpha_j)$$

$$K_{44} = K_{55} = \frac{3}{4} n_0 \sum_{j=1}^2 G_j l_j^2 w_j^{1/2} \cos^2 \alpha_j \left(1 + \frac{2}{3} a_j \operatorname{tg}^2 \alpha_j \right), \quad a_j = w_j s_j^{-1}$$

$w_j = s_j - s_{0j}$ — деформация колец и шариков j -го шарикоподшипника, s_{0j} и s_j — расстояния между центрами кривизны наружного и внутреннего колец до и после приложения усилия натяга F_0 , α_j — угол контакта в шарикоподшипниках собранного гироскопа, l_j — расстояние от центра масс ротора до шарикоподшипников, n_0 — количество шариков, G_j — постоянная Герца, m_0 — масса ротора, I и I_* — осевой и экваториальный моменты инерции ротора, I_0 — момент инерции подвижной части прибора относительно оси прецессии, f_i ($i=1, \dots, 6$) — коэффициент вязкого трения, $H = I\dot{\gamma}^*$ — кинетический момент гироскопа, W_s , ω_s и φ_s ($s=1, 2, 3$) — амплитуда, частота и фаза внешней вибрации, k_{66} и k_{6666} — параметры датчика компенсационного момента гироскопа. В выражениях (1.3) верхние знаки соответствуют расположению шарикоподшипников в гироскопе, при котором их полюса находятся между опорами ротора. В противном случае необходимо для расчетов принимать нижние знаки. В этих же выражениях прописными буквами обозначены коэффициенты, содержа

ние суммы параметров шарикоподшипников главной оси. Члены с отмеченными коэффициентами являются определяющими среди членов одного порядка относительно произведения координат.

Нелинейность шарикоподшипниковой опоры при наличии постоянных смещений ротора может привести к возникновению в приборе большого числа резонансных ситуаций. Остановимся на анализе наиболее опасных, в смысле погрешностей прибора, резонансных режимов: $\omega_{j0} = \omega_j$, $\omega_{r0} = \omega_j$, $\omega_{r0} = 1/2\omega_j$, $\omega_{r0} = 2\omega_j$ ($r \neq j$), которые наблюдались при испытаниях на вибростендах¹.

При исследовании резонансных колебаний по линейным координатам будем предполагать, что отсутствуют кратные соотношения между собственными частотами угловых и поступательных колебаний. Тогда, пренебрегая нерезонансными колебаниями по угловым координатам и учитывая идентичность упругой характеристики опоры, описываемой теорией Герца, в направлении координат x и y можно положить $x=y=u$ и ограничиться рассмотрением только второго и третьего уравнений (1.2), если равны проекции возмущения, силы веса ротора и демпфирования на эти координаты. В этом случае погрешности прибора будем оценивать по постоянной составляющей момента упругого дебаланса

$$\begin{aligned} \langle M_x \rangle = & [K_{33}(1-q_3) - K_{22}(1-q_2)] \langle uz \rangle - (f_2 + f_3 + K_{33}q_{13} + K_{22}q_{12}) \langle uz' \rangle \pm \\ & \pm (k_{333} - k_{223}) \langle uz^2 \rangle \pm 2k_{322} \langle u^3 \rangle + 2(K_{2222} - K_{3223}) \langle u^3 z \rangle + \\ & + (K_{2233} - K_{3333}) \langle uz^3 \rangle \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Рассмотрим возмущающий момент при нелинейном рода $n=1$ ($\omega_{r0} = \omega_j$) и главном ($\omega_{j0} = \omega_j$) резонансах по линейным координатам в случае, когда разбросом параметров шарикоподшипниковых опор и постоянными смещениями ротора (x_* , y_* , z_*) можно пренебречь.

Пусть

$$\omega_r^2 = \omega^2 + \mu \Delta_r \quad (r=2,3) \quad (2.1)$$

где $\mu \Delta_r$ ($r=2,3$) — расстройки частот.

Согласно методу усреднения, введем замену переменных

$$v_r = C_r e^{i\omega t} + D_r e^{-i\omega t}, \quad v_r^* = i\omega (C_r e^{i\omega t} - D_r e^{-i\omega t}) \quad (r=2,3) \quad (2.2)$$

$v_2 = u$, $v_3 = z$, $C_r = 1/2 \rho_r e^{i\varphi_r}$, $D_r = 1/2 \rho_r e^{-i\varphi_r}$ — комплексно-сопряженные величины, ρ_r и φ_r ($r=2,3$) — амплитуда и начальная фаза колебаний.

Уравнения в стандартной форме после усреднения будут иметь вид²

$$\begin{aligned} 2i\omega C_r^* = & \mu [(\Delta\omega_r - i\omega h_r^0) C_r + S_{rrj}^0 C_j^2 D_r + 1/2 W_r e^{i\varphi_r}] \\ -2i\omega D_r^* = & \mu [(\Delta\omega_r + i\omega h_r^0) D_r + S_{rrj}^0 D_j^2 C_r + 1/2 W_r e^{-i\varphi_r}] \quad (r,j=2,3; r \neq j) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\Delta\omega_r = q_r^* - \Delta_r + 3S_{rrr}^0 C_r D_r + 2S_{rrj}^0 C_j D_j, \quad S_{2222}^0 = S_{2222} + S_{2112}$$

$$S_{3333}^0 = S_{3333}, \quad S_{3322}^0 = S_{3223} + S_{3113}, \quad S_{2233}^0 = S_{2233}$$

Рассмотрим нелинейный резонанс рода $n=1$ в неравновесном гиromоторе. Пусть колебания по одной из координат являются нерезонансными

¹ См. Павловский М. А., Криворучко Ю. И., Петренко В. Е. Исследование резонансных нелинейных пространственных колебаний гиromотора. Киевск. политехн. ин-т. 1977. (ВИНИТИ, деп. № 1290-77.)

² Здесь, так же как и в работе [3], переменные C_r и D_r до и после усреднения обозначены одинаково.

ми. Тогда вместо четырех уравнений (2.3) можно анализировать только два. Проварьировав переменные C_r и D_r , найдем условия пространственной неустойчивости, т. е. условия возбуждения нелинейных резонансных колебаний

$$2X - \sqrt{X^2 - \omega^2 h_r^2} < \Delta_r < 2X + \sqrt{X^2 - \omega^2 h_r^2}, \quad X > \omega h_r \quad (2.4)$$

и условия их устойчивости

$$\begin{aligned} h_r + 1/2(m_r + 1)q_{1r}^* > 0, \quad 18Y^2 + 12XY + 2(m_r - 1)q_r^*X + \\ + 3[(m_r + 1)q_r^* - 2\Delta_r]Y + (m_r - 1)[h_r^0 q_{1r}^* \omega^2 + q_r^*(q_r^* - \Delta_r)] > 0, \\ X = 1/4 S_{rrjj}^0 \rho_j^2, \quad Y = 1/4 S_{rrrr}^0 \rho_r^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

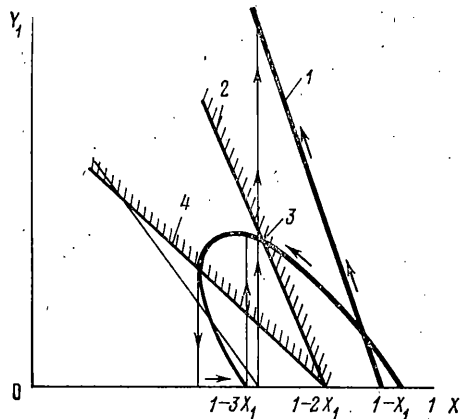
Амплитуду и фазу возникающих колебаний можно найти из следующих соотношений:

$$\rho_r^2 = 1/3 (S_{rrrr}^0)^{-1} [\Delta_r - q_r^* - 2X \pm \sqrt{X^2 - (\omega h_r^0)^2}] \quad (2.6)$$

$$\Delta \omega, \sin \kappa_r - \omega h_r^0 \cos \kappa_r + X \sin (2\kappa_j - \kappa_r) = 0$$

Из выражений (2.4) видно, что трение гистерезисного типа не препятствует возбуждению рассматриваемых колебаний, а вязкое трение сужает зону пространственной неустойчивости, но не влияет при отсутствии гистерезисного трения на устойчивость стационарных колебаний. В последнем случае ($q_r^* = 0, q_{1r}^* = 0$) в области параметров

$Y_1 = Y \omega_{r0}^{-2}$ и $\xi_0 = \omega^2 \omega_{r0}^{-2}$ кривая амплитуд представляет собой параболу с расходящимися ветвями, причем устойчивым режимам соответствует ее верхняя ветвь 1, расположенная справа от границы области устойчивости 2 (фиг. 2; здесь $X_1 = X \omega_{r0}^{-2}$). Трение гистерезисного типа замыкает резонансную кривую, которая в частном случае для $m_r = 3$ и $h_r = 0$ представляет собой эллипс 3.



Фиг. 2

Срыв резонансных колебаний происходит при пересечении границы области устойчивости 4 с резонансной кривой. При исследовании влияния характера рассеяния энергии на развитие резонансных амплитуд целесообразно рассматривать отношение максимума резонансной амплитуды к амплитуде входного возмущения ($r_{10} = \rho_r^* \Lambda_2^{-1}$) или к амплитуде нерезонансных колебаний ($r_{20} = \rho_r^* \rho_j^{-1}$). Ввиду того что при нерезонансных колебаниях по j -й координате эти параметры связаны линейно, ограничимся при теоретических исследованиях изучением зависимости r_{20} от ρ_j , которую можно представить в виде

$$r_{20} = \rho_j^{(3-m_r)/(m_r-1)} [S_{rj}^* - \omega h_r (q_{1r0} \rho_j^2)^{-1}]^{1/(m_r-1)}, \quad S_{rj}^* = 1/4 S_{rrjj}^0 (q_{1r0}^*)^{-1} \quad (2.7)$$

Из этой формулы следует, что при отсутствии вязкого трения в зависимости от значений параметра петли гистерезиса m_r величина r_{20} с ростом входного возмущения может увеличиваться ($m_r \leq 3$), уменьшаться ($m_r > 3$) или оставаться постоянной ($m_r = 3$). Поскольку рассматриваемые колебания возникают при определенном уровне входного возмущения (2.4) и зависимость максимума резонансных амплитуд от амплитуды входа носит качественно иной характер по сравнению с главным резонансом [5], то полученные результаты позволяют выявить нелинейный резонанс рода $n=1$ экспериментально.

Так как при испытаниях сложно задать вибрацию строго по одной из линейных координат, то практически важной является задача анализа формирования резонансных колебаний при действии возмущения одновременно по двум координатам. В этом случае зависимость для стационарных амплитуд будет определяться выражением

$$\rho_r^2 = W_r^2 [(\Delta\omega_r)^2 + (\omega h_r^\circ)^2 + X^2 - 2X(\Delta\omega_r \cos 2\varphi_r - \omega h_r^\circ \sin 2\varphi_r)] [(\Delta\omega_r)^2 + (\omega h_r^\circ)^2 - X^2]^{-2} \quad (2.8)$$

Из формулы (2.8) видно, что если сдвиг фаз между колебаниями осевого и радиального направлениях φ_r удовлетворяет условию $\operatorname{tg} 2\varphi_r = -\omega h_r^\circ \Delta\omega_r^{-1}$, то для фиксированной расстройки $\Delta\omega_r$ амплитуда колебаний в гироскопе ($X > 0$) будет максимальной при $k\pi < \varphi_r < (k+1)\pi$ ($k=0, 1, \dots$). Рассмотрим случай $\varphi_r = \pi/4$, $\Delta\omega_r = 0$, когда условия максимума резонансных амплитуд как функции сдвига фаз φ_r и расстройки $\Delta\omega_r$ выполняются одновременно. При этом максимальные значения амплитуд равны

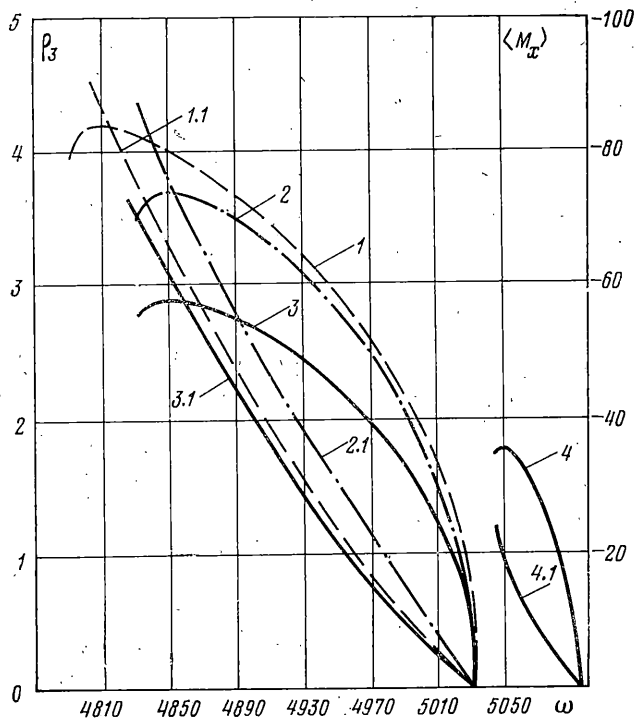
$$\rho_{r*} = W_r (q_{1r0} \rho_{r*}^{m_r-1} + \omega h_r - X)^{-1} \quad (2.9)$$

Из последней формулы следует, что нелинейная взаимосвязь между координатами приводит вследствие компенсации вязкого трения к увеличению амплитуды главного резонанса даже при невыполнении условий возбуждения пространственных колебаний. Отмеченное явление аналогично по своей природе эффекту параметрической регенерации колебаний [3]. Если в системе нет гистерезисного трения, то при возникновении пространственной неустойчивости максимальные значения резонансных амплитуд будут неограниченно возрастать. При пропорциональном изменении амплитуды входа по всем координатам, отсутствии вязкого трения и для значений $m_r = 2$ можно указать такое значение амплитуды по нерезонансной координате $\rho_j = [8q_{1r0}^* (S_{rrjj}^0)^{-2} W_{r0}]^{1/2} (W_{r0} = W_r \rho_j^{-1} = \text{const})$, начиная с которого r_{20} увеличивается так же, как и при нелинейном резонансе рода $n=1$. Таким образом, вклад нелинейной взаимосвязи колебаний в уровень резонансных амплитуд возрастет при увеличении входного возмущения и коэффициента указанной взаимосвязи (S_{rrjj}^0), при уменьшении гистерезисного трения и отношения амплитуды возмущения по резонансной координате к амплитуде колебаний в направлении нерезонансной координаты.

Для нелинейного резонанса рода $n=1$ в осевом направлении было получено решение уравнений (2.3) на ЭВМ для гироскопа с параметрами $\alpha = 18^\circ$, $z_0 = 5$ мкм, $F_0 = 19.62$ Н, $m_0 = 0.45$ кг, $H = 56.11 \cdot 10^{-2}$ Н·м·с, $m_r = 3$. Расчеты показали, что из-за обратного воздействия резонансных колебаний на колебания по нерезонансной координате не любое значение гистерезисного трения замыкает резонансную кривую. Чем выше входное возмущение, тем больше значение параметра петли гистерезиса v_{30} , ограничивающее уровень резонансных амплитуд. Так, при амплитуде входа в радиальном

направлении $\Lambda_2=6$ мкм v_{30} лежит в пределах $(0.34-0.85)10^{-3}$ мкм $^{-2}$, а при $\Lambda_2=3$ мкм $v_{30}<0.17\cdot 10^{-3}$ мкм $^{-2}$.

На фиг. 3 показаны графики резонансных амплитуд ρ_3 в мкм и возмущающих моментов $\langle M_x \rangle$ в Н·мкм в зависимости от ω в рад/с для следующих параметров рассеяния энергии и входного возмущения: $\Lambda_2=6$ мкм, $v_3=1.7\cdot 10^{-3}$ мкм $^{-2}$, $h_3=15$ рад/с (1 и 1.1); $\Lambda_2=6$ мкм, $v_3=1.7\cdot 10^{-3}$ мкм $^{-2}$, $h_3=50$ рад/с (2 и 2.1); $\Lambda_2=6$ мкм, $v_3=3.4\cdot 10^{-3}$ мкм $^{-2}$, $h_3=15$ рад/с (3 и 3.1); $\Lambda_2=3$ мкм, $v_3=1.7\cdot 10^{-3}$ мкм $^{-2}$, $h_3=15$ рад/с (4 и 4.1).



Фиг. 3

Проведенные расчеты показывают, что вследствие нелинейной взаимосвязи между координатами вибрация по одной из линейных координат приводит к значительным по величине погрешностям прибора (37–8.7 град/ч).

Из графиков фиг. 3 видно, что для уменьшения резонансных амплитуд и возмущающих моментов целесообразней увеличивать трение гистерезисного, а не вязкого типа. Другим эффективным способом уменьшения погрешностей прибора является снижение входного возмущения. Так, изменение амплитуды входной вибрации в два раза с $\Lambda_2=6$ до $\Lambda_2=3$ мкм приводит к уменьшению резонансной амплитуды в 2.35 раза, а возмущающего момента — 4.24 раза.

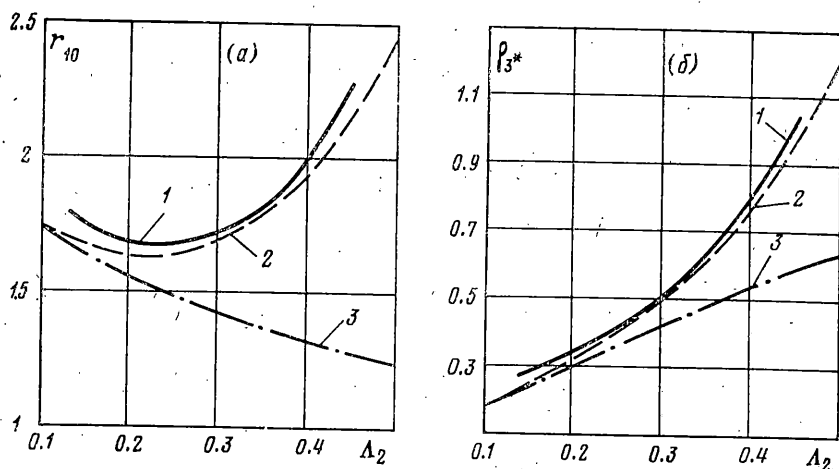
Экспериментальное определение параметров рассеяния энергии и условий возникновения нелинейного резонанса рода $n=1$ в гироскопе проводилось на гироскопе, у которого $H=7.85\cdot 10^{-2}$ Н·м·с; шарикоподшипник С 2076084 Е, $m_0=0.15$ кг, $\omega_{30}/2\pi=733$ Гц, $\omega_{20}/2\pi=1238$ Гц. При определении параметров рассеяния энергии для фиксированных значений входного ускорения при главном резонансе измерялись максимальные амплитуды и соответствующие им частоты. После расчетов по формуле (2.9) при $X=0$ было получено $m_2=m_3=2$, $v_3=0.017$ мкм $^{-1}$, $h_3=32$ рад/с, $v_2=0.032$ мкм $^{-1}$, $h_2=88.5$ рад/с.

При экспериментальных исследованиях нелинейного резонанса $n=1$ рода в осевом направлении ось гироскопа ориентировалась в направлении, по которому уровень боковой вибрации вибростенда, измеренный датчиком ДН-2, не превышал 5–8%.

Отметим, что по паспортным данным поперечная чувствительность вибропреобразователя ДН-2 составляет 6%, поэтому действительные значения вектора боковой вибрации могут быть меньше измеренных. Экспериментально полученные зависимо-

сти параметра r_{10} и максимального значения резонансной амплитуды ρ_{3*} в мкм от амплитуды входного вибро смещения Λ_2 в мкм показаны (кривые 1) на фиг. 4, а, б. При увеличении входного возмущения параметр r_{10} уменьшается для значений $W_2 < 3.76$ м/с² ($\Lambda_2 < 0.19$ мкм), а затем начинает возрастать. При этом меняется характер исследуемых колебаний. Если при $W_2 = 6.55$ м/с² ($\Lambda_2 = 0.34$ мкм) на виброграмме колебаний ротора гироскотора (кривая 1 на фиг. 5), отражающей зависимость амплитуды виброускорения W_0 в м/с² от частоты $\omega/2\pi$ в Гц, отсутствуют типичные для нелинейных резонансов срывы колебаний, то увеличение амплитуды входного виброускорения до $W_2 = 8.46$ м/с² ($\Lambda_2 = 0.45$ мкм) (кривая 2 на фиг. 5) приводит к четкому выделению резонансной области и появлению скачкообразных изменений амплитуды колебаний. Описанные явления невозможно объяснить без учета нелинейной взаимосвязи между координатами, вызывающей развитие в гироскоторе нелинейного резонанса $n=1$ рода.

Поскольку при эксперименте вследствие поперечной чувствительности вибропреобразователей точное определение боковой вибрации стенда затруднено, то при моде-



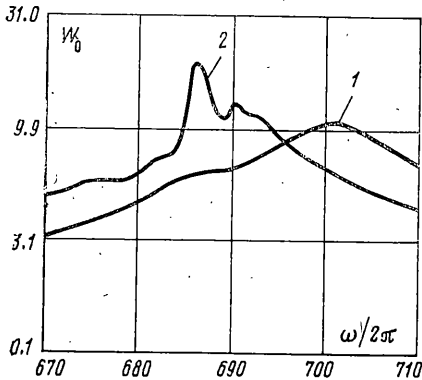
Фиг. 4

лировании колебаний исследуемого гироскотора на ЭВМ амплитуда боковой вибрации Λ_3 задавалась таким образом, чтобы для амплитуды вертикальной вибрации $\Lambda_2 = 0.34$ мкм максимальное значение амплитуды резонансных колебаний ρ_{3*} равнялось экспериментальному. В этом случае было получено $\Lambda_3 \Lambda_2^{-1} = 0.015$, что не противоречит оценке сверху $\Lambda_3 \Lambda_2^{-1} = 0.05 - 0.08$, найденной экспериментально. Для всех остальных величин Λ_2 амплитуда боковой вибрации Λ_3 определялась из указанного соотношения $\Lambda_3 \Lambda_2^{-1} = 0.015$, так как согласно экспериментам $\Lambda_3 \Lambda_2^{-1}$ не зависит от изменения уровня вертикальной вибрации стенда. Вычисленные значения r_{10} и ρ_{3*} с учетом (кривая 2) и без учета (кривая 3) нелинейной взаимосвязи представлены на фиг. 4, а и б. Для тех же условий кривые 1 и 2 на фиг. 6 показаны пределы изменений погрешностей прибора ω_* в град/ч при резонансе в осевом направлении. Из графиков 1 и 2 фиг. 4 видно, что результаты экспериментального исследования и расчетов на ЭВМ по уравнениям, описывающим нелинейную взаимосвязь между координатами, хорошо согласуются. В то же время указанные зависимости между координатами, хорошо согласуются. В то же время указанные зависимости (кривые 1 и 2 на фиг. 4) отличаются от полученных в предположении независимости колебаний по различным координатам даже для уровней входного возмущения ($\Lambda_2 = 0.4$ мкм), недостаточных для формирования пространственной неустойчивости. Это связано с описанным ранее явлением, аналогичным эффекту параметрической регенерации.

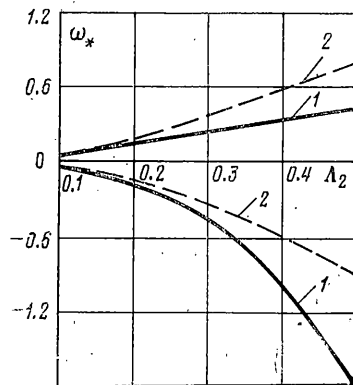
Из сравнения результатов, приведенных на фиг. 4 и 6, следует, что влияние нелинейной взаимосвязи на развитие резонансных амплитуд и формирование момента упругого дебаланса возрастает с увеличением входного возмущения. При амплитуде входного вибро смещения $\Lambda_2 = 0.5$ мкм оценки максимальной погрешности прибора и с учетом и без учета нелинейной взаимосвязи отличаются в два раза. Вычисленные погрешности соизмеримы с максимально допустимыми для прецизионных гироскопических приборов (угловая скорость ухода до 2 град/ч).

Наиболее благоприятные условия для формирования нелинейного резонанса рода $n=1$ создаются в равновесном гироскопе, когда при действии внешней вибра-

ции в приборе возникает одновременно два резонанса (кратный резонанс): главный — в направлении координаты, вдоль которой действует внешнее возмущение, и нелинейный рода $n=1$ — по координате, свободной от действия внешних сил. Исследование указанного режима колебаний проведено моделированием на ЭВМ колебаний прибора с параметрами $H=0.561$ Н·м·с, $m_2=m_3=3$, $F_0=19.62$ Н, $z_0=5$ мкм, $\alpha=35^\circ 16'$. $v_2=v_3=1.61 \cdot 10^{-3}$ мкм $^{-2}$, $h_2=h_3=10$ рад/с. Результаты расчетов при изменении частоты возмущения ω от 4630 до 5190 рад/с представлены на фиг. 7, где кривым 1–3 соответствуют амплитуды колебаний в осевом ρ_3 и в радиальном ρ_2 направлениях в мкм и возмущающий момент $\langle M_x \rangle$ в Н·мкм для $\Lambda_2=\Lambda_3=0.12$ мкм; кривым 4–6 — те же переменные для $\Lambda_2=0.12$ мкм, $\Lambda_3=0$ мкм; кривой 7 — возмущающий момент в неравновесном гироскопе ($\alpha=18^\circ$) для $\Lambda_2=\Lambda_3=0.12$ мкм. По графику видно, что развитие нелинейных пространственных колебаний $\omega_{r0}=\omega$; по одной из линейных координат сопровождается уменьшением амплитуд колебаний по другой координате.



Фиг. 5



Фиг. 6

При кривой вибрации основания вследствие нелинейных факторов возмущающий момент при резонансе в равновесном гироскопе в нуль не обращается и мало отличается от максимального значения момента упругого дебаланса в неравновесном гироскопе с теми же параметрами рассеяния энергии.

Отметим, что нелинейная взаимосвязь между координатами приводит к тому, что погрешности прибора соизмеримы как при действии возмущения по одной из линейных координат, так и по всем координатам одновременно.

3. Пусть выполняются резонансные соотношения

$$\omega_{r0}^2 = \omega_r^2 + \mu \Delta_r \quad (r=2,3), \quad \omega_r = 2\omega \text{ или } \omega_r = 1/2\omega \quad (3.1)$$

В этих случаях уравнения для огибающих представим в виде

$$2i\omega_r C_r^* = \mu [(\Delta\omega_r - i\omega h_r^\circ) C_r + c_1 s_{rrj}^\circ C_j D_r + c_2 s_{rjj}^\circ C_j^2]$$

$$-2i\omega_r D_r^* = \mu [(\Delta\omega_r + i\omega h_r^\circ) D_r + c_1 s_{rrj}^\circ D_j C_r + c_2 s_{rjj}^\circ D_j^2] \quad (r=2, j=3 \text{ или } r=3, j=2) \quad (3.2)$$

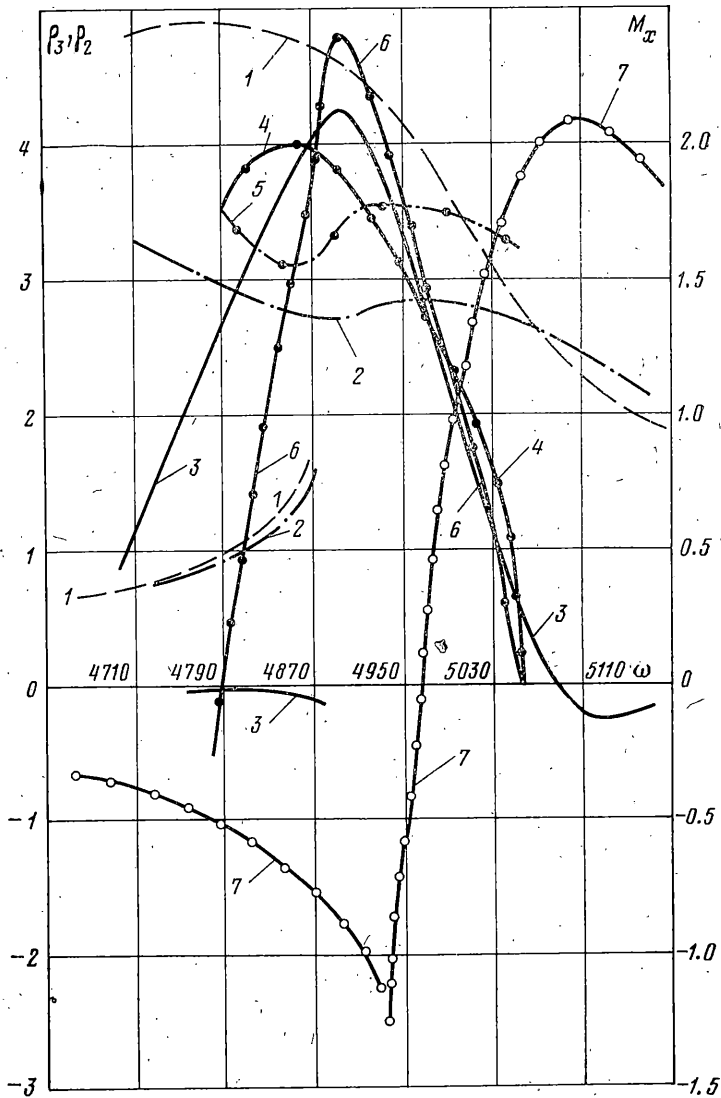
$$c_1=0, c_2=1 \text{ при } \omega_r=2\omega, \quad c_1=1, c_2=0 \text{ при } \omega_r=1/2\omega$$

$$\Delta\omega_r = \Delta_1 \omega_r + 2S_{rrjj}^\circ C_j D_j + 3S_{rrrr}^\circ C_r D_r, \quad \Delta_1 \omega_3 = q_3^* - \Delta_3 + 3S_{2222}^\circ u_*^2 + S_{2233}^\circ z_*^2$$

$$s_{333}^\circ = s_{333} + 3S_{3333}^\circ z_*, \quad s_{222}^\circ = 3S_{2222}^\circ u_*, \quad s_{322}^\circ = S_{3322}^\circ z_* + 2s_{322}, \quad s_{233}^\circ = S_{2233}^\circ u_*, \quad s_{332}^\circ = 2S_{3322}^\circ u_*$$

$$s_{223}^\circ = s_{223} + 2S_{2233}^\circ z_*, \quad \Delta_1 \omega_2 = q_2^* - \Delta_2 + s_{223}^\circ z_* + 3S_{2222}^\circ u_*^2 + S_{2233}^\circ z_*^2$$

Условия возбуждения и устойчивости колебаний, выражения для амплитуд и фаз при резонансе $\omega_{r0}=1/2\omega$ аналогичны полученным при нелинейном резонансе рода $n=1$, за исключением того, что ширина области



Фиг. 7

пространственной неустойчивости и величина резонансных амплитуд определяется величиной коэффициента s_{rrj}° , а не S_{rrjj} . Амплитуду и фазу стационарных колебаний при нелинейном резонансе $\omega_{r0} = 2\omega$ найдем из следующих выражений:

$$\rho_r = {}^1/2 s_{rrjj}^{\circ} \rho_j^2 [(\Delta\omega_r)^2 + (2\omega h_r^{\circ})^2]^{-1/2} \quad (3.3)$$

$$\rho_r (\Delta\omega_r \sin \kappa_r - 2\omega h_r^{\circ} \cos \kappa_r) + {}^1/2 s_{rrjj}^{\circ} \rho_j^2 \sin 2\kappa_j = 0$$

Постоянная составляющая момента упругого дебаланса для исследуемых резонансов определяется формулами

$$\langle M_x \rangle = \pm (k_{333} - k_{223}) (u_* \langle z^2 \rangle + \langle z^2 u \rangle) \pm 6k_{322} u_* \langle u^2 \rangle +$$

$$+3(K_{2233}-K_{3333})(z_*u_*\langle z^2\rangle+z_*\langle z^2u\rangle)+6(K_{2222}-K_{3223})u_*z_*\langle u^2\rangle \text{ при } \omega_2=2\omega, \omega_3=1/2\omega \quad (3.4)$$

$$\langle M_x \rangle = \pm(k_{333}-k_{223})u_*\langle z^2\rangle+6(K_{2222}-K_{3223})(u_*z_*\langle u^2\rangle+u_*\langle zu^2\rangle)+6k_{322}u_*\langle u^2\rangle+3(K_{2233}-K_{3333})u_*z_*\langle z^2\rangle \text{ при } \omega_2=1/2\omega, \omega_3=2\omega \quad (3.5)$$

Из выражений (3.3), (3.4) и (3.5) видно, что при отсутствии постоянного смещения ротора в радиальном направлении рассматриваемые колебания или не возникают, или не вызывают постоянной составляющей момента. Если равны проекции силы веса ротора на все линейные координаты и не выполняется соотношение 1:2 между собственными частотами колебаний в осевом и радиальном направлениях, то величина момента при указанных резонансах соизмерима с моментом, вызываемым силой веса ротора. Отметим, что величина возмущающего момента при резонансах $\omega_{r_0}=2\omega$ и $\omega_{r_0}=1/2\omega$ заметно уменьшается в равножестком гироскопе.

4. Рассмотрим нелинейные резонансные колебания по угловым координатам гироскопа, вызываемые нерезонансными колебаниями в направлении линейных координат, происходящими по закону

$$v_s=v_{s*}+\rho_s(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}) \quad (s=1, 2, 3), \quad v_{1*}=x_* \\ v_{2*}=y, \quad v_{3*}=z_*, \quad \rho_s=1/2W_s(\omega_{s0}^2-\omega^2)^{-1}$$

Согласно методу усреднения [3], введем замену переменных

$$\delta_1=i\sum_{r=4}^6 \varepsilon_{1r}(C_r e^{i\omega_r t}-D_r e^{-i\omega_r t}), \quad \delta_1^*=-\sum_{r=4}^6 \varepsilon_{1r}\omega_r(C_r e^{i\omega_r t}+D_r e^{-i\omega_r t}) \\ \delta_2=\sum_{r=4}^6 \varepsilon_{2r}(C_r e^{i\omega_r t}+D_r e^{-i\omega_r t}), \quad \delta_2^*=i\sum_{r=4}^6 \varepsilon_{2r}\omega_r(C_r e^{i\omega_r t}-D_r e^{-i\omega_r t}) \\ \beta=\beta_*+\sum_{r=4}^6 (C_r e^{i\omega_r t}+D_r e^{-i\omega_r t}), \quad \beta^*=i\sum_{r=4}^6 \omega_r(C_r e^{i\omega_r t}-D_r e^{-i\omega_r t}) \\ \beta^*=n_2^{-2}\langle \mu Q_6 \rangle, \quad \varepsilon_{1r}=\omega_r \Omega^2 n_1^2 p_r^{-1}, \quad \varepsilon_{2r}=\omega_r^{-2}(n_1^2+\Omega^2-\omega_r^2)p_r^{-1} \\ p_r=(n_1^2-\omega_r^2)^2-\Omega^2\omega_r^2 \quad (4.1)$$

После ряда преобразований уравнения для огибающих представим в стандартной форме

$$2iC_r^* e^{i\omega_r t}=\mu(i^{-1}\sigma_{4r}Q_4+\sigma_{5r}Q_5+\sigma_{6r}Q_6^*) \\ -2iD_r^* e^{-i\omega_r t}=\mu(-i^{-1}\sigma_{4r}Q_4+\sigma_{5r}Q_5+\sigma_{6r}Q_6^*) \quad (r=4, 5, 6) \quad (4.2)$$

$$Q_6^*=Q_6-\sum_{r=4}^6 \Delta_r(C_r e^{i\omega_r t}+D_r e^{-i\omega_r t}), \quad \Delta_r^0=(3\omega_{r_0}^4 r_0-2\omega_{r_0}^2 r_1+r_2)p_r^{-1}\Delta_r$$

$$r_0=1-b, \quad r_1=n_2^2+(2-b)n_1^2+(1-b)\Omega^2, \quad r_2=n_1^4+n_1^2(2n_2^2+\Omega_1\Omega)+\Omega^2 n_2^2$$

$$\Gamma_1=\varepsilon_{14}\omega_4(\varepsilon_{25}-\varepsilon_{26})+\varepsilon_{15}\omega_5(\varepsilon_{26}-\varepsilon_{24})+\varepsilon_{16}\omega_6(\varepsilon_{24}-\varepsilon_{25}),$$

$$\Gamma_2 = \tau_{24}\omega_4 (\varepsilon_{15}\tau_{16}\omega_6 - \varepsilon_{16}\tau_{15}\omega_5) - \tau_{25}\omega_5 (\varepsilon_{14}\tau_{16}\omega_6 - \varepsilon_{16}\tau_{14}\omega_4) + \tau_{26}\omega_6 (\varepsilon_{14}\tau_{15}\omega_5 - \varepsilon_{15}\tau_{14}\omega_4),$$

$$\tau_{1r} = 1 + \varepsilon_{2r}, \quad \tau_{2r} = 1 + b\varepsilon_{2r}$$

$$\sigma_{44} = \Gamma_1^{-1}(\varepsilon_{26} - \varepsilon_{25}), \quad \sigma_{54} = \Gamma_2^{-1}(\varepsilon_{15}\omega_6\tau_{26} - \varepsilon_{16}\omega_5\tau_{25}), \quad \sigma_{66} = \Gamma_2^{-1}(\varepsilon_{15}\tau_{14}\omega_4 - \varepsilon_{14}\tau_{15}\omega_5) \text{ и т. д.}$$

Если между собственными частотами угловых колебаний нет кратных соотношений, то для резонанса $\omega_{r0} = 2\omega$ получим

$$2iC_r^* = -\mu[(A_r - iB_r)C_r + i^{-1}\sigma_{4r}R_{42} + \sigma_{5r}R_{52} + \sigma_{6r}R_{62}]$$

$$-2iD_r^* = \mu[(A_r + iB_r)D_r - i^{-1}\sigma_{4r}R_{42} + \sigma_{5r}R_{52} + \sigma_{6r}R_{62}]$$

$$2iC_k^* = \mu(A_k - iB_k)C_k, \quad -2iD_k^* = \mu(A_k + iB_k)D_k \quad (k=4, 5, r=6, k=4, 6, r=5, k=5, 6, r=4) \quad (4.3)$$

$$A_r = N_r + A_{1r}C_r D_r + A_{2r}, \quad B_r = \omega_r N_{1r} + B_{2r} \quad A_{jr} = A_{4jr}\sigma_{4r} + A_{5jr}\sigma_{5r} + A_{6jr}\sigma_{6r} \quad (j=1, 2)$$

$$N_r = q_4^* \sigma_{4r} \varepsilon_{1r} + q_5^* \sigma_{5r} \varepsilon_{2r} + q_6^* \sigma_{6r},$$

$$A_{41r} = \varepsilon_{1r} \{ 3S_{4444} \varepsilon_{1r}^2 + S_{4455} \varepsilon_{2r} - \omega_r^2 [(1 + 3/2 \varepsilon_{2r}) \varepsilon_{2r} + b_2 (3 + 4\varepsilon_{2r} - 3\varepsilon_{2r}^2)] + 3/2 \Omega \omega_r^{-1} \varepsilon_{4r} \}$$

$$A_{62r} = -\Delta_r \mp S_{6225} \varepsilon_{2r} (y_*^2 + 2\rho_2^2) + s_{625} z_*, \quad B_{52r} = \omega_r \varepsilon_{2r} h_5 + S_{5124} \varepsilon_{1r} (x_* y_* + 2\rho_1 \rho_2)$$

$$R_{42} = \pm S_{413} \rho_1 \rho_3 + 3S_{4111} x_* \rho_1^2 + s_{4122} (x_* \rho_2^2 + 2y_* \rho_1 \rho_2) + s_{4133} (x_* \rho_3^2 + 2z_* \rho_1 \rho_3),$$

$$R_{52} = \pm S_{523} \rho_2 \rho_3 - 3S_{5222} y_* \rho_2^2 - s_{5112} (y_* \rho_1^2 + 2x_* \rho_1 \rho_2) - s_{5233} (y_* \rho_3^2 + 2z_* \rho_1 \rho_2)$$

$$R_{62} = S_{623} \rho_2 \rho_3 \pm s_{6223} (y_* \rho_3^2 + 2z_* \rho_2 \rho_3) \pm s_{6112} (y_* \rho_1^2 + 2x_* \rho_1 \rho_2) \pm s_{6222} y_* \rho_2^2 \text{ и т. д.}$$

Выражения для A_k, \dots, B_k, \dots аналогичны по структуре выражениям A_r, \dots, B_r, \dots . Уравнениям (4.3) удовлетворяют стационарные решения $C_r = C_{r0}, D_r = D_{r0}, C_k = D_k = 0$. Условия устойчивости указанных решений имеют вид

$$A_{2k}^2 + B_{2k}^2 > 0, \quad B_{2k} > 0, \quad [1/2 \omega_r \varepsilon_{1r} (m+1) q_{14}^* + B_{42r}] \sigma_{4r} +$$

$$+ [1/2 \omega_r \varepsilon_{2r} (m+1) q_{15}^* + B_{52r}] \sigma_{5r} + [1/2 \omega_r (m+1) q_{16}^* + B_{62r}] \sigma_{6r} > 0$$

$$(A_r^2 + B_r^2) + A_r [(m-1)N_r + 2A_{1r}C_r D_r] +$$

$$+ \omega_r N_{1r} (m-1) (\omega_r N_{1r} + B_{2r}) > 0, \quad m_4 = m_5 = m_6 = m \quad (4.4)$$

Если эти условия выполняются, то амплитуда и фаза стационарных колебаний определяются из соотношений

$$\rho_r = 2R_2 (A_r^2 + B_r^2)^{-1/2}, \quad \rho_r (A_r \sin \kappa_r - B_r \cos \kappa_r) = 2\sigma_{4r} R_{42}$$

$$R_2^2 = (\sigma_{5r} R_{52} + \sigma_{6r} R_{62})^2 + (\sigma_{4r} R_{42})^2 \quad (4.5)$$

В этом случае погрешность прибора можно оценить по формуле

$$n_2^2 \beta_* = \mu [\pm S_{6124} \langle xy \delta_1 \rangle \mp S_{6225} \langle y^2 \delta_2 \rangle + S_{6244} \langle y \delta_1^2 \rangle + S_{6255} \langle y \delta_2^2 \rangle] \quad (4.6)$$

Из выражений (4.3), (4.5) и (4.6) видно, что амплитуды резонансных колебаний и постоянные составляющие погрешности прибора при резонансе $\omega_{r0} = 2\omega$ формируются в основном членами второго и третьего порядка, коэффициенты которых не зависят от разброса параметров шарикоподшипниковых опор и постоянных смещений ротора. Поэтому при прочих равных условиях погрешности прибора в случае развития нелинейного резонанса $\omega_{r0} = 2\omega$ по угловым координатам будут больше, чем погрешности, появляющиеся при возникновении этого резонанса по линейным координатам. Поскольку постоянная составляющая угла β обусловлена колебаниями по координатам δ_1 и δ_2 , то погрешности прибора будут достигать максимальных значений при колебаниях с собственными частотами, близкими к парциальной частоте колебаний ротора на упругих опорах. Коэффициенты, входящие в формулы (4.5) и (4.6), уменьшаются

с увеличением угла контакта, поэтому выполнение прибора равножестким позволяет снизить погрешности при рассматриваемом резонансе.

Резонанс $\omega_{r_0} = 1/2\omega$ развивается по угловым координатам только при наличии постоянных смещений ротора и неодинаковости параметров шарикоподшипников. Следовательно, при указанном резонансе погрешность прибора будет значительно меньше, чем при резонансе $\omega_{r_0} = 2\omega$. Такой же порядок может иметь погрешность прибора, вызванная резонансом рода $n=1$ по угловым координатам. Очевидно, что в случае кратных соотношений между собственными частотами колебаний по угловым и линейным координатам нелинейная взаимосвязь между ними усилится.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что наиболее неблагоприятными режимами в смысле формирования погрешностей прибора при поступательной вибрации являются главный и нелинейный рода $n=1$ резонанс по линейным координатам и нелинейный резонанс $\omega_{r_0} = 2\omega$ — по угловым.

Авторы признательны Д. М. Климову и В. Ф. Журавлеву за обсуждение результатов работы.

Поступила 21 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
2. Пельпор Д. С. Гироскопические системы, ч. 1. М., «Высшая школа», 1971.
3. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. Колебания твердых тел. М., «Наука», 1976.
4. Климов Д. М., Филипов В. А. О резонансе в существенно нелинейной гироскопической системе. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 6.
5. Павловский М. А., Петренко В. Е. Исследование колебаний ротора гиromотора при главном резонансе в осевом направлении. Машиноведение, 1977, № 1.
6. Данилин В. П., Новиков Л. З., Орлов О. Ф., Тиль А. В., Харламов С. А. Гироскопические чувствительные элементы. В кн.: Развитие механики гироскопических систем. М., «Наука», 1973.
7. Харламов С. А. О жесткости радиально-упорного шарикового подшипника с осевым натягом. Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1962, № 5.
8. Мандельштам Л. И. К вопросу параметрической генерации. Полн. собр. тр., т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1947.