

О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В СОСУДАХ,  
СВОБОДНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ КОТОРОЙ ЗАКРЫТА  
МЕМБРАННОЙ ОБОЛОЧКОЙ ИЗ ГИПЕРУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

В. А. ТРОЦЕНКО

(Киев)

В качестве одного из средств ограничения подвижности жидкости в сосудах конструктивным путем может быть использована предварительно деформированная мембранная оболочка, жестко закрепленная на стенках сосуда и закрывающая свободную поверхность жидкости.

В данной работе выводятся уравнения и рассматривается применение вариационного метода к решению задачи о малых связанных колебаниях предварительно деформированной гидростатическим давлением крутовой мембраны и жидкости, находящейся в осесимметричном сосуде, относительно их устойчивого равновесного состояния. При описании механических характеристик материала мембраны используется упругий потенциал в форме Муни — Ривлина. Для рационального выбора координатных функций в методе Ритца предварительно проводятся дополнительные исследования, устанавливающие структуру регулярных в окрестности особой точки решений для перемещений оболочки.

Отмечается эффективность предложенного метода решения задачи и приводятся зависимости между частотой основного тона колебаний и нормальным давлением на мембрану рассматриваемой механической системы.

Исследования динамики жидкости в сосудах, свободная поверхность которой ограничена плоской мембраной, проводились в [1, 2].

1. Рассмотрим произвольный сосуд, имеющий форму тела вращения и частично заполненный идеальной несжимаемой жидкостью, свободная поверхность которой закрыта предварительно деформированной мембранной оболочкой. Будем считать, что мембранная оболочка не вступает в зону контактного взаимодействия с абсолютно твердыми стенками сосуда и в ненапряженном состоянии представляет собой жестко закрепленную на стенках сосуда круглую мембрану радиусом  $R_0$ . Предполагается, что мембрана обладает малой постоянной толщиной  $h_0$  и материал ее с плотностью  $\rho_0$  подчиняется условию Муни [3]:

$$\partial W / \partial I_1 = C_1 = \text{const}, \quad \partial W / \partial I_2 = C_2 = \text{const} \quad (1.1)$$

Здесь  $W = W(I_1, I_2)$  — энергия деформации, зависящая от инвариантов деформации  $I_1$  и  $I_2$ .

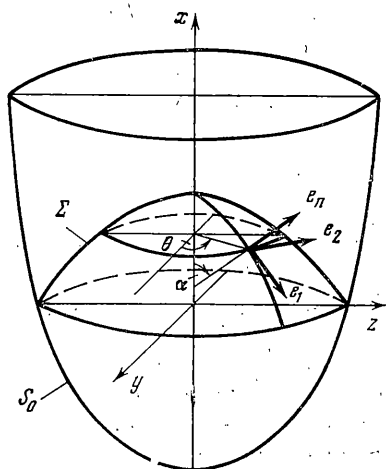
Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат  $Ox\theta r$  с осью  $Ox$ , совпадающей с осью симметрии сосуда и началом координат, расположенным в плоскости ненапряженной мембраны (фиг. 1). Мембранная оболочка будет удерживаться в равновесном состоянии под воздействием гидростатической нагрузки  $Q$ :

$$Q = C + Dx, \quad C = P^* - P^0, \quad D = -\rho\gamma g \quad (1.2)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение сил тяжести,  $\gamma$  — коэффициент перегрузки,  $P^*$  — постоянная составляющая давления в жидкости,  $P^0$  — давление со стороны газа на мембрану.

Задача определения равновесного состояния круговой мембраны сводится к решению некоторой нелинейной краевой задачи. В дальнейшем будем считать, что решение этой задачи при заданном объеме жидкости известно и координаты точек меридиана срединной поверхности мембранной оболочки определяются по формулам [4]:

$$\begin{aligned}
 x &= R_0 \sum_{k=1}^m a_k [P_{2k}(\xi^*) - P_{2k-2}(\xi^*)], \\
 r &= \xi + R_0 \sum_{k=1}^m a_{k+m} [P_{2k+1}(\xi^*) - P_{2k-1}(\xi^*)] \\
 &\quad (\xi^* = \xi/R_0, 0 \leq \xi \leq R_0)
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$



Фиг. 1

Здесь  $a_k$  — заданные коэффициенты,  $P_n(\xi)$  — полиномы Лежандра.

Главные степени удлинений в направлении меридиана, параллели и нормали к поверхности оболочки обозначим соответственно через  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ . Тогда будем иметь

$$\lambda_1 = [(dr/d\xi)^2 + (dx/d\xi)^2]^{1/2}, \quad \lambda_2 = r/\xi, \quad \lambda_3 = h/h_0 = 1/\lambda_1\lambda_2 \tag{1.4}$$

где  $h$  — переменная толщина деформированной мембраны.

Внутренние усилия при двухосном напряженном состоянии определяются из выражений [3]:

$$T_1 = 2h_0\lambda_3(\lambda_1^2 - \lambda_3^2) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right), \quad T_2 = 2h_0\lambda_3(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \tag{1.5}$$

Для удобства введем следующие безразмерные величины:

$$r^* = \frac{r}{R_0}, \quad x^* = \frac{x}{R_0}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{R_0}, \quad \Gamma = \frac{C_2}{C_1}, \quad q = \frac{QR_0}{2C_1h_0}, \quad T_i^* = \frac{T_i}{2C_1h_0} \quad (i=1,2)$$

В дальнейшем все решения ищутся в безразмерных координатах, у которых для простоты опущены звездочки.

Рассмотрим малые совместные колебания предварительно деформированной мембранной оболочки и жидкости в сосуде относительно их устойчивого равновесного состояния. Выберем на срединной поверхности мембранной оболочки ортогональную систему криволинейных координат  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , причем сетка координатных линий  $\alpha_1 = \text{const}$  и  $\alpha_2 = \text{const}$  совпадает с линиями главных кривизн.

Пусть под воздействием малой добавочной нагрузки произвольная точка оболочки получает перемещение  $u$ . Этот вектор будет функцией координат  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и времени  $t$ . Орты местной системы криволинейных координат обозначим через  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_n$ . Проекции вектора  $u$  на направления  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_n$  обозначим через  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Дополнительные перемещения будут соответствовать дополнительным усилиям в срединной поверхности оболочки  $\delta T_1$ ,  $\delta T_2$  и  $S$ . Пользуясь основными положениями [3, 5], можно установить связь между дополнительными усилиями и деформациями мембранной

оболочки

$$\delta T_1 = c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2, \delta T_2 = c_{21}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2, S = c_{33}\omega \quad (1.6)$$

$$c_{11} = f_1(\lambda_1, \lambda_2), c_{12} = f_2(\lambda_1, \lambda_2), c_{21} = f_2(\lambda_2, \lambda_1), c_{22} = f_1(\lambda_2, \lambda_1)$$

$$c_{33} = [\lambda_3^3 + (\lambda_1^2\lambda_3^3 + \lambda_2^2\lambda_3^3 - \lambda_1\lambda_2)\Gamma]$$

$$f_1(\lambda_1, \lambda_2) = [\lambda_1^2\lambda_3 + 3\lambda_3^3 + (\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_2^2\lambda_3^3)\Gamma]$$

$$f_2(\lambda_1, \lambda_2) = [3\lambda_3^3 - \lambda_1^2\lambda_3 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2\lambda_3^3)\Gamma]$$

Здесь и в дальнейшем выражения для деформаций оболочки совпадают с выражениями [5].

Выделим из оболочки четырьмя нормальными к ее срединной поверхности и проходящими через линии  $\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + d\alpha_2$  сечениями бесконечно малый элемент. В результате приложения дополнительных нагрузок элемент деформируется и усилия на его границах изменяются. Уравнения равновесия выделенного элемента возмущенной поверхности можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [B^* (T_1^* e_1^* + S e_2^*)] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [A^* (S e_1^* + T_2 e_2^*)] + q^* A^* B^* = 0 \quad (1.7)$$

где  $A^*, B^*$  и  $e_1^*, e_2^*, e_n^*$  — параметры Ламе и орты трехгранника Дарбу возмущенной поверхности оболочки;  $T_1^* = T_1 + \delta T_1$  и  $S, T_2^* = T_2 + \delta T_2$  и  $S$  — компоненты разложения векторов усилий по осям  $e_1^*$  и  $e_2^*$  вдоль линий  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно.

Вектор поверхностной нагрузки на оболочку в возмущенном состоянии представим следующим образом:

$$q^* = \delta q_1 e_1^* + \delta q_2 e_2^* + (q + \delta q_3^{(1)} + \delta q_3^{(2)} + \delta q_3^{(3)}) e_n^*$$

$$\delta q_1 = -\frac{R_0 \rho_0 h}{2h_0 C_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \delta q_2 = -\frac{R_0 \rho_0 h}{2h_0 C_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \delta q_3^{(1)} = -\frac{R_0 \rho_0 h}{2h_0 C_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

где  $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_{31}^{(1)}$  — нагрузки, обусловленные инерцией материала оболочки;  $\delta q_3^{(2)}$  и  $\delta q_3^{(3)}$  — динамическое давление со стороны жидкости и добавочное гидростатическое давление, связанное с изменением геометрии оболочки.

Внесем в (1.7) значения усилий, ортов и параметров Ламе, выраженных через соответствующие величины невозмущенной оболочки, и проведем линеаризацию выражений. При этом учтем правила дифференцирования ортов  $e_1, e_2, e_n$  [5] и тот факт, что начальные усилия удовлетворяют уравнениям равновесия [4]. В результате придем к следующим трем скалярным уравнениям:

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial \delta T_1}{\partial \alpha} + (\delta T_1 - \delta T_2) \frac{\cos \alpha}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{T_1}{R_1} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} +$$

$$+ T_2 \left[ \frac{\theta_1}{R_2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_2}{\partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{r} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right] = -\delta q_1$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \delta T_2}{\partial \theta} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{2 \cos \alpha}{r} S + \frac{T_1}{R_1} \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} + \theta_2 \right) + \frac{T_2}{r} \left( \omega \cos \alpha + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \theta} \right) = -\delta q_2 \quad (1.8)$$

$$\frac{\delta T_1}{R_1} + \frac{\partial T_2}{R_2} + \frac{T_1}{R_1} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} - \varepsilon_1 \right) + \frac{T_2}{r} \left( \theta_1 \cos \alpha + \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta} - \frac{r \varepsilon_2}{R_2} \right) =$$

$$= \delta q_3^{(1)} + \delta q_3^{(2)} + \delta q_3^{(3)}$$

где  $\alpha$  и  $R_1, R_2$  — угол между осью симметрии оболочки и вектором  $e_n$  и главные радиусы кривизны поверхности оболочки соответственно. Аналогичная система уравнений с использованием принципа возможных перемещений была получена в [6].

Динамическое давление жидкости с точностью до произвольной функции времени можно определить при помощи интеграла Лагранжа — Коши  $\delta q_3^{(2)} = (-\rho R_0^2 / 2C_1 h_0) (\partial^2 \varphi / \partial t^2)$ .

Безразмерный потенциал смещений жидкости  $\varphi$  находится из решения краевой задачи

$$\Delta \varphi = 0 \text{ в } \Omega; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = w, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_{S_0} = 0 \quad (1.9)$$

где  $S_0$  — смоченная поверхность сосуда,  $\Sigma$  — поверхность мембранной оболочки,  $\Omega$  — область, занятая жидкостью,  $\Delta$  — дифференциальное выражение Лапласа,  $\nu$  — орт внешней нормали к поверхности  $\Sigma + S_0$ .

Из очевидных геометрических соотношений  $\delta q_3^{(3)}$  можно представить в виде

$$\delta q_3^{(3)} = D(w \cos \alpha - u \sin \alpha) \quad (1.10)$$

На нормальное перемещение оболочки необходимо наложить ограничения, вытекающие из условия несжимаемой жидкости

$$\int_{\Sigma} w \, d\Sigma = 0 \quad (1.11)$$

Система уравнений (1.8) включает в себя как силовые, так и геометрические неизвестные. Соответствующие уравнения в перемещениях будут иметь вид

$$L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) = r\lambda_1 \delta q_1, \quad L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) = r\lambda_1 \delta q_2 \quad (1.12)$$

$$L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) = r\lambda_1 (\delta q_3^{(1)} + \delta q_3^{(2)})$$

$$L_{11}(u) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \alpha_2 u - \alpha_3 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \quad L_{12}(v) = \alpha_4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta} + \alpha_5 \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$L_{13}(w) = \alpha_6 \frac{\partial w}{\partial \xi} + \alpha_7 w, \quad L_{21}(u) = \beta_4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \beta_5 \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$L_{22}(v) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \beta_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \beta_2 v - \beta_3 \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}, \quad L_{23}(w) = \beta_6 \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad L_{31}(u) = \gamma_5 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \gamma_6 u$$

$$L_{32}(v) = \gamma_4 \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad L_{33}(w) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \gamma_1 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \gamma_2 w - \gamma_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{rc_{11}}{\lambda_1}, \quad \alpha_2 = \alpha_2^{(1)} + \frac{d\alpha_2^{(2)}}{d\xi}, \quad \alpha_3^{(1)} = \frac{c_{22}}{r\lambda_1} \left( \frac{dr}{d\xi} \right)^2 - \frac{r\lambda_1 T_2}{R_1 R_2}$$

$$\alpha_2^{(2)} = - \left( \frac{c_{12} + T_1}{\lambda_1} \right) \frac{dr}{d\xi}, \quad \alpha_3 = \frac{(c_{33} + T_2)\lambda_1}{r}, \quad \alpha_4 = -(c_{33} + c_{12} + T_1)$$

$$\alpha_5 = \alpha_5^{(1)} + \frac{d\alpha_5^{(2)}}{d\xi}, \quad \alpha_5^{(1)} = \frac{c_{33} + c_{22} + T_2}{r} \frac{dr}{d\xi}$$

$$\alpha_5^{(2)} = -(c_{12} + T_1), \quad \alpha_6 = -r(c_{11}/R_1 + c_{21}/R_2), \quad \alpha_7 = \alpha_7^{(1)} + d\alpha_7^{(2)}/d\xi$$

$$\alpha_7^{(1)} = \left( \frac{c_{21} + T_2}{R_1} + \frac{c_{22}}{R_2} \right) \frac{dr}{d\xi}, \quad \alpha_7^{(2)} = -r \left( \frac{c_{11}}{R_1} + \frac{c_{12} + T_1}{R_2} \right)$$

$$\beta_1 = \frac{r(c_{33} + T_1)}{\lambda_1}, \quad \beta_2 = \beta_2^{(1)} + \frac{d\beta_2^{(2)}}{d\xi}, \quad \beta_2^{(2)} = \frac{c_{33}}{\lambda_1} \frac{dr}{d\xi}$$

$$\beta_2^{(1)} = \frac{c_{33} + T_2}{r\lambda_1} \left( \frac{dr}{d\xi} \right)^2 - \frac{r\lambda_1 T_1}{R_1 R_2}, \quad \beta_3 = \frac{c_{22}\lambda_1}{r}$$

$$\beta_4 = -(c_{33} + c_{21} + T_2), \quad \beta_5 = \beta_5^{(1)} + d\beta_5^{(2)}/d\xi, \quad \beta_5^{(2)} = -c_{33}$$

$$\beta_5^{(1)} = -\frac{c_{33} + c_{22} + T_2}{r} \frac{dr}{d\xi}, \quad \beta_6 = -\lambda_1 \left( \frac{c_{12}}{R_1} + \frac{c_{22}}{R_2} \right)$$

$$\gamma_1 = \frac{rT_1}{\lambda_1}, \quad \gamma_2 = r\lambda_1 \left( \frac{c_{11} - T_1}{R_1^2} + \frac{c_{22} - T_2}{R_2^2} + \frac{c_{12} + c_{21}}{R_1 R_2} - \frac{D}{\lambda_1} \frac{dr}{d\xi} \right)$$

$$\gamma_3 = \frac{\lambda_1 T_2}{r}, \quad \gamma_4 = -\beta_6, \quad \gamma_5 = r \left( \frac{c_{11}}{R_1} + \frac{c_{21}}{R_2} \right), \quad \gamma_6 = \gamma_6^{(1)} + \frac{d\gamma_6^{(2)}}{d\xi}$$

$$\gamma_6^{(2)} = \frac{rT_1}{R_1}, \quad \gamma_6^{(1)} = \left( \frac{c_{12}}{R_1} + \frac{c_{22} - T_2}{R_2} \right) \frac{dr}{d\xi} - Dr \frac{dx}{d\xi}$$

2. Рассматривая свободные колебания механической системы «жидкость — мембранная оболочка», будем искать решения сформулированной краевой задачи в виде

$$u = u_n e^{i\omega_0 t} \cos n\theta, \quad v = v_n e^{i\omega_0 t} \sin n\theta, \quad w = w_n e^{i\omega_0 t} \cos n\theta, \quad \varphi = \varphi_n e^{i\omega_0 t} \cos n\theta \quad (2.1)$$

где  $\omega_0$  — частота установившихся колебаний.

Тогда функции  $u_n(\xi)$ ,  $v_n(\xi)$ ,  $w_n(\xi)$  и  $\varphi_n(x, r)$  будут определяться из решения двух взаимосвязанных краевых задач, обусловленных упругостью оболочки

$$L_{11}^{(n)}(u_n) + L_{12}^{(n)}(v_n) + L_{13}^{(n)}(w_n) - \kappa \xi u_n = 0, \quad \kappa = \frac{R_0 \rho_0 \omega_0^2}{2C_1} \quad (2.2)$$

$$L_{21}^{(n)}(u_n) + L_{22}^{(n)}(v_n) + L_{23}^{(n)}(w_n) - \kappa \xi v_n = 0, \quad a = \frac{\rho R_0}{\rho_0 h_0}$$

$$L_{31}^{(n)}(u_n) + L_{32}^{(n)}(v_n) + L_{33}^{(n)}(w_n) - \kappa (\xi w_n + ar\lambda_1 \varphi_n) = 0$$

$$u_n(1) = v_n(1) = w_n(1) = 0 \quad (2.3)$$

и подвижностью жидкости

$$\Delta_n \varphi_n = 0 \text{ в } G; \quad \left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_1} = w_n, \quad \left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_2} = 0 \quad (2.4)$$

Здесь  $L_{ij}^{(n)}$ ,  $\Delta_n$  — дифференциальные выражения, получаемые из  $L_{ij}$  и  $\Delta$  после отделения угловой координаты;  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  — линии пересечения глав-

ного меридионального сечения с поверхностями  $\Sigma$  и  $S_0$  соответственно;  $G$  — область, ограниченная осью  $Ox$  и линиями  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

Для решения однородной краевой задачи (2.2)–(2.4) можно применять различного рода численные методы, при реализации которых необходимо привлекать быстродействующие ЭВМ. В рассматриваемом случае можно построить более простое аналитическое решение, основанное на применении вариационного метода.

Как известно, при решении задач математической физики энергетическим методом основную трудность представляет вопрос рационального выбора координатных систем функций. При неудачном выборе аппроксимирующих выражений реализация итеративного процесса Рунге наталкивается на достаточно серьезные трудности, связанные в первую очередь с решением алгебраических задач большой размерности и накоплением ошибок по мере повышения приближения.

Особую трудность в данном случае представляет удачный выбор соответствующих приближенных выражений для функций  $u_n(\xi)$ ,  $v_n(\xi)$  и  $w_n(\xi)$ . Поэтому сначала проведем некоторые исследования качественного характера, позволяющие установить структуру решений для предварительно напряженной мембранной оболочки без учета влияния жидкости.

Введем новые функции

$$y_1 = u_n, \quad y_2 = v_n, \quad y_3 = w_n, \quad y_4 = \xi \frac{du_n}{d\xi}, \quad y_5 = \xi \frac{dv_n}{d\xi}, \quad y_6 = \xi \frac{dw_n}{d\xi} \quad (2.5)$$

Тогда систему трех уравнений второго порядка (2.2) можно свести к системе шести уравнений, разрешенных относительно производной

$$\xi \left( \frac{dy}{d\xi} \right) = Fy \quad (2.6)$$

Здесь  $y$  — вектор с компонентами  $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ), а ненулевые элементы матрицы  $F$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f_{14} = f_{25} = f_{36} = 1, \quad f_{41} &= \frac{\xi^2}{\alpha_1} (\alpha_2 + n^2 \alpha_3 - \kappa \xi), \quad f_{42} = \frac{n \xi^2 \alpha_5}{\alpha_1} \\ f_{43} &= \frac{\xi^2 \alpha_7}{\alpha_1}, \quad f_{44} = -\frac{\xi^2}{\alpha_1} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\alpha_1}{\xi} \right), \quad f_{45} = \frac{n \xi \alpha_4}{\alpha_1}, \quad f_{46} = \frac{\xi}{\alpha_1} \alpha_6, \quad f_{51} = \frac{-n \xi \beta_5}{\beta_1} \\ f_{52} &= \frac{\xi^2}{\beta_1} (\beta_2 + n^2 \beta_3 - \kappa \xi), \quad f_{53} = \frac{-n \xi^2 \beta_6}{\beta_1}, \quad f_{54} = \frac{-n \xi \beta_4}{\beta_1} \\ f_{55} &= -\frac{\xi^2}{\beta_1} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\beta_1}{\xi} \right), \quad f_{61} = \frac{\xi^2 \gamma_6}{\gamma_1}, \quad f_{62} = \frac{-n \xi^2}{\gamma_1} \beta_6 \\ f_{63} &= \frac{\xi^2}{\gamma_1} (\gamma_2 + n^2 \gamma_3 - \kappa \xi), \quad f_{64} = \frac{\xi}{\gamma_1} \gamma_5, \quad f_{66} = -\frac{\xi^2}{\gamma_1} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\gamma_1}{\xi} \right) \end{aligned}$$

Поскольку статически деформированная круговая мембрана представляет собой оболочку вращения, то из условий симметрии можно показать, что функции  $\lambda_i(\xi)$ ,  $T_i(\xi)$  и  $R_i(\xi)$  ( $i=1, 2$ ) раскладываются в степенные ряды по четным степеням  $\xi$  со свободными членами, совпадающими со значениями  $\lambda$ ,  $T$  и  $R$  в полюсе оболочки. При этом будем предполагать, что  $\lambda$ ,  $T$  и  $R$  конечны и отличны от нуля. Учитывая, что все функции  $f_{ij}$  в точке  $\xi=0$  регулярны и не обращаются одновременно в нуль, представим матрицу  $F$  в виде ряда, расположенного по целым степеням  $\xi$ :

$$F = F_0 + F_1 \xi + F_2 \xi^2 + \dots \quad (2.7)$$

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{41}^{(0)} & f_{42}^{(0)} & 0 & 0 & f_{45}^{(0)} & 0 \\ f_{51}^{(0)} & f_{52}^{(0)} & 0 & f_{54}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{63}^{(0)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{2i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{43}^{(2i-1)} & 0 & 0 & f_{46}^{(2i-1)} \\ 0 & 0 & f_{53}^{(2i-1)} & 0 & 0 & 0 \\ f_{61}^{(2i-1)} & f_{62}^{(2i-1)} & 0 & f_{64}^{(2i-1)} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{2i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{41}^{(2i)} & f_{42}^{(2i)} & 0 & f_{44}^{(2i)} & f_{45}^{(2i)} & 0 \\ f_{51}^{(2i)} & f_{52}^{(2i)} & 0 & f_{54}^{(2i)} & f_{55}^{(2i)} & 0 \\ 0 & 0 & f_{63}^{(2i)} & 0 & 0 & f_{66}^{(2i)} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$f_{41}^{(0)} = \frac{1}{c_{11}^{(0)}} [c_{22}^{(0)} + n^2 (c_{33}^{(0)} + T)], \quad f_{42}^{(0)} = \frac{n}{c_{11}^{(0)}} (c_{33}^{(0)} + c_{22}^{(0)} + T)$$

$$f_{45}^{(0)} = -\frac{n}{c_{11}^{(0)}} (c_{33}^{(0)} + c_{12}^{(0)} + T), \quad f_{52}^{(0)} = \frac{n}{(c_{33}^{(0)} + T)} (c_{33}^{(0)} + T + n^2 c_{22}^{(0)})$$

$$f_{51}^{(0)} = \frac{n}{(c_{33}^{(0)} + T)} (c_{33}^{(0)} + T + c_{22}^{(0)}), \quad f_{54}^{(0)} = \frac{n}{(c_{33}^{(0)} + T)} (c_{33}^{(0)} + T + c_{21}^{(0)})$$

$$f_{63}^{(0)} = n^2, \quad f_{43}^{(1)} = 0, \quad f_{46}^{(1)} = -\frac{(c_{11}^{(0)} + c_{21}^{(0)})}{R c_{11}^{(0)}}, \quad f_{63}^{(1)} = \frac{\lambda n (c_{12}^{(0)} + c_{22}^{(0)})}{(c_{33}^{(0)} + T) R}$$

$$f_{61}^{(1)} = \frac{\lambda (c_{12}^{(0)} + c_{22}^{(0)})}{TR}, \quad f_{62}^{(1)} = n f_{61}^{(1)}, \quad f_{64}^{(1)} = f_{61}^{(1)}$$

Перейдем к построению фундаментальных систем решений для уравнений (2.6), считая пока, что  $n \neq 0$ . Так как точка  $\xi = 0$  является регулярной особой точкой для рассматриваемой системы [7], будем искать ее решения в виде

$$y_i = \xi^\mu \sum_{k=0}^{\infty} g_{i,k} \xi^k \quad (i=1, 2, \dots, 6) \quad (2.8)$$

Подстановка рядов (2.7) и (2.8) в уравнения (2.6), почленное перемножение с использованием формулы Коши и приравнивание коэффициентов при  $\xi^{\mu+k}$  в обеих частях полученного равенства приводят после некоторых вычислений к уравнениям

$$[F_0 - (\mu + k)E] \mathbf{g}_k = \mathbf{d}_k \quad (k=0, 1, \dots) \quad (2.9)$$

где  $E$  — единичная матрица,  $\mathbf{g}_k$  — вектор с компонентами  $g_{i,k}$ .

Вектор  $\mathbf{d}_k$  при  $k=0$  имеет нулевые компоненты, а при  $k \neq 0$  его компоненты  $d_k^{(i)}$  определяются по формулам

$$d_k^{(i)} = - \sum_{v=1}^6 \sum_{j=0}^{k-1} g_{v,j} f_{iv}^{(k-j)} \quad (k=1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, 6) \quad (2.10)$$

Поскольку для определения вектора  $g_0$  имеем однородную систему алгебраических уравнений, то из условия существования ее нетривиального решения получаем уравнение

$$\det |F_0 - \mu E| = 0 \quad (2.11)$$

Можно показать, что корни характеристического уравнения (2.11) принимают следующие значения:

$$\mu_1 = n+1, \mu_2 = n, \mu_3 = n-1, \mu_4 = -(n-1), \mu_5 = -n, \mu_6 = -(n+1) \quad (2.12)$$

Положив  $\mu = \mu_1$  и решая системы рекуррентных алгебраических уравнений (2.9), получим решение для функции  $y_i$  ( $i=1, 2, 3$ ):

$$y_1^{(1)} = \xi^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1,2k}^{(1)} \xi^{2k}, \quad y_2^{(1)} = \xi^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{2,2k}^{(1)} \xi^{2k}, \quad y_3^{(1)} = \xi^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{3,2k+1}^{(1)} \xi^{2k+1} \quad (2.13)$$

Здесь и в дальнейшем верхний индекс при  $y_i$  и  $g_{i,k}$  обозначает номер найденного частного решения.

Положим теперь  $\mu = \mu_2$ . При  $k=1$  задача определения коэффициентов разложений (2.8) для функций  $y_1$  и  $y_2$  сводится к решению неоднородной алгебраической системы второго порядка, определитель которой равен нулю (так как  $\mu_2+1$  является корнем характеристического уравнения). Непосредственной проверкой убеждаемся, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов уравнений при неизвестных, равен рангу расширенной матрицы. Следовательно, полученная система является совместной и допускает решение. Действуя далее аналогично изложенному выше, получаем второе регулярное в окрестности нуля решение для функций  $y_i$ :

$$y_1^{(2)} = \xi^n \sum_{k=0}^{\infty} g_{1,2k+1}^{(2)} \xi^{2k+1}, \quad y_2^{(2)} = \xi^n \sum_{k=0}^{\infty} g_{2,2k+1}^{(2)} \xi^{2k+1}, \quad y_3^{(2)} = \xi^n \sum_{k=0}^{\infty} g_{3,2k}^{(2)} \xi^{2k} \quad (2.14)$$

Пусть теперь  $\mu = \mu_3$ . Находим решение однородной алгебраической системы (2.9), при этом оказывается, что при  $n=1$  (антисимметричные колебания оболочки)  $g_{1,0}^{(3)} = -g_{2,0}^{(3)}$ . При  $k=1$  правые части уравнений (2.9) обращаются в нуль, а так как  $\mu_3+1$  является корнем уравнения (2.11), то решение полученной алгебраической системы существует. При  $k=2$ , как и в предыдущем случае (когда  $\mu = \mu_2$ ), приходим к решению неоднородной алгебраической системы с линейно-зависимыми уравнениями. В итоге получаем третье частное решение для функций  $y_i$ :

$$y_1^{(3)} = \xi^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{1,2k}^{(3)} \xi^{2k}, \quad y_2^{(3)} = \xi^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{2,2k}^{(3)} \xi^{2k}, \quad y_3^{(3)} = \xi^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} g_{3,2k+1}^{(3)} \xi^{2k+1} \quad (2.15)$$

Остальные решения системы (2.6), соответствующие корням  $\mu_4$ ,  $\mu_5$  и  $\mu_6$ , имеют особенности в полюсе оболочки.

Таким образом получено три линейно-независимых формальных представления для функций  $u_n(\xi)$ ,  $v_n(\xi)$  и  $w_n(\xi)$ . Записывая общее решение исходной системы дифференциальных уравнений, приходим к выводу, что регулярное в окрестности нуля решение для функций  $u_n(\xi)$ ,  $v_n(\xi)$  и  $w_n(\xi)$



имеет следующую структуру:

$$u_n = \xi^{n-1} \varphi_{n,1}, \quad v_n = \xi^{n-1} \varphi_{n,2}, \quad w_n = \xi^n \varphi_{n,3} \quad (2.16)$$

Здесь  $\varphi_{n,1}$ ,  $\varphi_{n,2}$  и  $\varphi_{n,3}$  — непрерывные функции, которые раскладываются в степенные ряды по четным степеням  $\xi$  со свободными членами. В случае  $n=1$  свободные члены для  $\varphi_{n,1}$  и  $\varphi_{n,2}$  равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Таким же способом при  $n=0$  показывается, что решения для функций  $u_0(\xi)$  и  $w_0(\xi)$  формально представимы в виде рядов

$$u_0 = \xi \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi^{2k}, \quad w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \xi^{2k} \quad (2.17)$$

Учет нагрузки на оболочку со стороны жидкости не изменяет установленной структуры решений (2.16) и (2.17).

Перейдем к построению приближенного аналитического решения краевой задачи (2.2) — (2.4). Введем в рассмотрение симметричный и положительный оператор Неймана  $H^{(n)}$  [8], который значениям функции  $w_n$ , заданной на линии  $\Gamma_1$ , ставит в соответствие функцию  $\varphi_n$ , определенную в области  $G$  и являющуюся решением задачи (2.4). Это соответствие запишем в виде  $\varphi_n = H^{(n)} w_n$ .

Совокупность функций  $u_n$ ,  $v_n$  и  $w_n$  можно трактовать как трехкомпонентный вектор  $\mathbf{u}_n = \{u_n, v_n, w_n\}$ . Тогда краевую задачу (2.2) — (2.4) можно представить в следующем операторном виде:

$$L_n \mathbf{u}_n - \kappa B_n \mathbf{u}_n = 0, \quad B_n = \text{diag}(\xi, \xi, \xi + \alpha r \lambda_1 H^{(n)}) \quad (2.18)$$

Здесь  $L_n$  — оператор, порожденный дифференциальными уравнениями (2.2) и определенный на множестве функций, удовлетворяющих условиям (2.3):

$$L_n = \begin{pmatrix} L_{11}^{(n)} & L_{12}^{(n)} & L_{13}^{(n)} \\ L_{21}^{(n)} & L_{22}^{(n)} & L_{23}^{(n)} \\ L_{31}^{(n)} & L_{32}^{(n)} & L_{33}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Определим скалярное произведение векторов  $\mathbf{u}_n$  по формуле

$$(\mathbf{u}_n', \mathbf{u}_n'') = \int_0^1 (u_n' u_n'' + v_n' v_n'' + w_n' w_n'') d\xi \quad (2.19)$$

Можно показать, что оператор  $L_n$  симметричен, т. е. если  $\mathbf{u}_n'$  и  $\mathbf{u}_n''$  входят в область определения оператора  $L_n$ , то выполняется равенство

$$(L_n \mathbf{u}_n', \mathbf{u}_n'') = (L_n \mathbf{u}_n'', \mathbf{u}_n') \quad (2.20)$$

Из вариационного исчисления известно [9], что задача (2.18) равносильна задаче об отыскании стационарных значений для функционала

$$(L_n \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) / (B_n \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \quad (2.21)$$

При этом стационарные значения и функции, на которых они реализуются, совпадают соответственно с собственными значениями и собственными функциями задачи (2.18).

Для нахождения стационарного значения функционала (2.21) воспользуемся методом Ритца. В связи с этим представим функции  $u_n$ ,  $v_n$  и  $w_n$

в виде разложений ( $n \neq 0$ ):

$$u_n = \sum_{k=1}^p x_k u_k^{(n)}(\xi), \quad v_n = \sum_{k=1}^p x_{k+p} v_k^{(n)}(\xi), \quad w_n = \sum_{k=1}^p x_{k+2p} w_k^{(n)}(\xi) \quad (2.22)$$

Здесь  $u_k^{(n)}(\xi)$ ,  $v_k^{(n)}(\xi)$  и  $w_k^{(n)}(\xi)$  — системы координатных функций, которые, согласно установленной структуре решений для уравнений (2.16), выберем в следующем виде:

$$u_k^{(n)}(\xi) = (\xi^2 - 1) \xi^{n+2k-3}, \quad v_k^{(n)}(\xi) = (\xi^2 - 1) \xi^{n+2k-2}, \quad w_k^{(n)}(\xi) = u_k^{(n)}(\xi) \quad (2.23)$$

Причем в случае  $n=1$  в разложениях (2.22) необходимо положить  $x_{1+p} = -x_1$ . Исходя из функционала (2.21) в случае  $n > 1$  задачу определения  $3p$ -компонентного вектора  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_{3p}\}$  сведем к решению однородной алгебраической системы

$$(A - \kappa B)x = 0 \quad (2.24)$$

Элементы симметричной матрицы  $A$  определяются посредством вычисления квадратур

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \int_0^1 \left[ \alpha_1 \frac{du_j^{(n)}}{d\xi} \frac{du_i^{(n)}}{d\xi} + (\alpha_2^{(1)} + n^2 \alpha_3) u_i^{(n)} u_j^{(n)} - \alpha_2^{(2)} \frac{d}{d\xi} (u_i^{(n)} u_j^{(n)}) \right] d\xi \\ a_{i,j+p} &= \int_0^1 n \left[ \alpha_4 \frac{dv_j^{(n)}}{d\xi} u_i^{(n)} + \alpha_5^{(1)} v_j^{(n)} u_i^{(n)} - \alpha_5^{(2)} \frac{d}{d\xi} (v_j^{(n)} u_i^{(n)}) \right] d\xi \\ a_{i,j+2p} &= \int_0^1 \left[ \left( \alpha_6 \frac{dw_j^{(n)}}{d\xi} + \alpha_7^{(1)} w_j^{(n)} \right) u_i^{(n)} - \alpha_7^{(2)} \frac{d}{d\xi} (w_j^{(n)} u_i^{(n)}) \right] d\xi \\ a_{i+p,j+p} &= \int_0^1 \left[ \beta_1 \frac{dv_j^{(n)}}{d\xi} \frac{dv_i^{(n)}}{d\xi} + (\beta_2^{(1)} + n^2 \beta_3) v_i^{(n)} v_j^{(n)} - \beta_2^{(2)} \frac{d}{d\xi} (v_i^{(n)} v_j^{(n)}) \right] d\xi \\ a_{i+p,j+2p} &= - \int_0^1 n \beta_4 w_j^{(n)} v_i^{(n)} d\xi \\ a_{i+2p,j+2p} &= \int_0^1 \left[ \gamma_1 \frac{dw_j^{(n)}}{d\xi} \frac{dw_i^{(n)}}{d\xi} + (\gamma_2 + n^2 \gamma_3) w_i^{(n)} w_j^{(n)} \right] d\xi \end{aligned} \quad (2.25)$$

Матрица  $B$  имеет блочно-диагональную структуру со следующими значениями ее элементов:

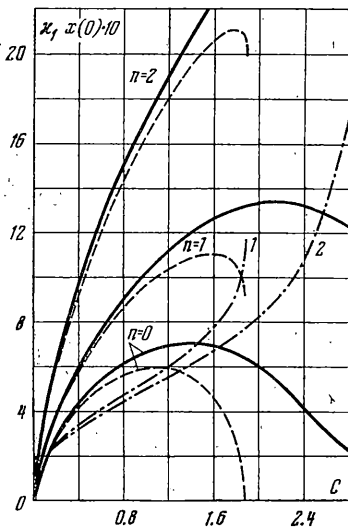
$$b_{i,j} = \int_0^1 \xi u_i^{(n)} u_j^{(n)} d\xi, \quad b_{i+p,j+p} = \int_0^1 \xi v_i^{(n)} v_j^{(n)} d\xi \quad (2.26)$$

$$b_{i+2p, j+2p} = \int_0^1 (\xi + ar\lambda_1 H^{(n)}) w_i^{(n)} w_j^{(n)} d\xi$$

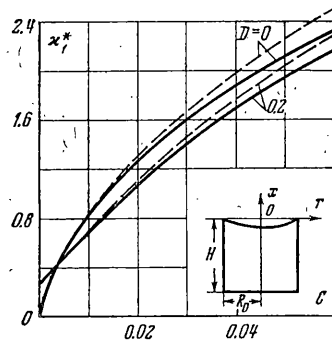
Поскольку для области  $G$  в общем случае не удается построить функцию Грина для задачи (2.4), то для определения функций  $\varphi_n^{(i)} = H^{(n)} w_i^{(n)}$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ), входящих в выражения (2.26), необходимо решить  $p$  краевых задач (2.4) при заданном уже явно граничном условии на контуре  $\Gamma_1$ . Для решения этой задачи будем применять достаточно хорошо разработанные вариационные методы [10].

3. Приведем некоторые результаты вычислений по предложенным расчетным схемам, полученные с помощью ЭЦВМ «Мир-2».

Рассмотрим сначала колебания «сухой» предварительно деформированной равномерным давлением круговой мембраны. Все расчеты, за исключением случая для осесимметричных колебаний оболочки, проводились без учета тангенциальных сил



Фиг. 2



Фиг. 3

инерции оболочки. При определении равновесной поверхности мембраны в разложениях (1.3) принималось  $m=5$ .

В таблице приведена сходимость первого собственного значения  $\lambda_1$  краевой задачи (2.2), (2.3) (при  $a=0$ ) в зависимости от числа координатных функций  $p$  для  $u_n$ ,  $v_n$  и  $w_n$  при различных значениях параметра нагрузки  $C$  и числа волн срединной поверхности оболочки в окружном направлении  $n$ . Отношение  $\Gamma$  постоянных  $C_1$  и  $C_2$  в упругом потенциале  $W$  принималось равным 0.1.

$C$	$n$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
0.2	0	3.33126	3.02067	3.01825	3.01825	3.01825
	1	4.70043	3.92726	3.92339	3.92339	3.92339
	2	7.35474	6.28235	6.26381	6.26381	6.26381
2	0	6.36185	6.01402	6.01400	6.01398	6.01398
	1	14.62528	13.35395	13.33442	13.33434	13.33434
	2	27.67928	24.97671	24.95736	24.95682	24.95681

Как видно из таблицы, предложенная реализация вариационного метода в рассматриваемой задаче позволяет достаточно точно находить ее решения при небольшом числе координатных функций. Кроме того, можно сделать вывод, что увеличение параметра нагрузки  $C$ , а следовательно, и длины образующей оболочки, слабо влияет на скорость сходимости вариационного метода. Полученные результаты объясняются в первую очередь тем, что при построении приближенного решения учитывалась структура регулярного в окрестности нуля общего решения исходной системы дифференциальных уравнений.

На фиг. 2 показана графическая зависимость частотного параметра  $\kappa_1$  и максимального прогиба мембраны  $x(0)$  (кривая 1 соответствует  $\Gamma=0$ , а кривая 2 —  $\Gamma=0.1$ ) от интенсивности статического давления  $C$  при разных значениях  $n$ . Сплошной линией приведены значения  $\kappa_1$  для  $\Gamma=0.1$ , пунктиром — для  $\Gamma=0$ . Характерной особенностью этих кривых является то, что при больших значениях раздувающего давления деформации мембраны весьма чувствительны к форме упругого потенциала. Так, при  $\Gamma=0$  имеется нагрузка, при которой частоты колебаний оболочки обращаются в нуль, в то время как при  $\Gamma=0.1$  такого явления не наблюдается. Значение этой нагрузки совпадает с максимумом на кривой нагрузка — прогиб в центре мембраны [11], что подтверждает существование предельного состояния оболочки для этого случая.

В качестве примера решения исходной краевой задачи приведем некоторые данные для цилиндрического сосуда, у которого на расстоянии  $H=0.5$  от дна закреплена круговая мембрана. На фиг. 3 показана зависимость частотного параметра  $\kappa^* = \rho R_0^3 \omega_0^2 / (2C_1 n_0)$  основного тона антисимметричных колебаний механической системы (без учета инерции материала оболочки) от интенсивности гидростатического давления ( $\Gamma=0$ ). При  $C \rightarrow 0$  параметр  $\kappa_m^*$  стремится к своим предельным значениям [1]:  $\kappa_m^* \rightarrow -D\lambda_m$ , где  $\lambda_m$  — безразмерная частота свободных колебаний жидкости в сосуде без мембраны.

Пунктирными линиями обозначены соответствующие данные, полученные по результатам [12] (было дополнительно учтено добавочное гидростатическое давление  $\delta q_3^{(3)}$ ). При приведенных нагрузках максимальный прогиб мембраны не превышает 20% от ее радиуса.

Поступила 15 I 1979.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Докучаев Л. В. О колебаниях резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена мембрана. Строительная механика и расчет сооружений, 1972, № 1.
2. Siekmann J., Chang S. C. On the change of natural frequencies of a sloshing liquid by movable devices. Acta Mech., 1971, vol. 11, No. 1–2.
3. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., «Мир», 1965.
4. Троценко В. А. Осесимметричная задача о равновесии круговой мембраны под гидростатическим давлением. В кн.: Физико-технические приложения краевых задач. Киев, «Наукова думка», 1978.
5. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
6. Балабух Л. И., Усюкин В. И. Приближенная теория мягких оболочек вращения. Тр. VIII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1973.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. М., «Наука», 1969.
8. Моисеев Н. Н. Вариационные задачи в теории колебаний жидкости и тела с жидкостью. В кн.: Вариационные методы в задачах о колебании жидкости и тела с жидкостью. М., ВЦ АН СССР, 1962.
9. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
10. Феценко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. Киев, «Наукова думка», 1969.
11. Локощенко А. М., Шестериков С. А. Круглая вязкоупругая мембрана под действием равномерного давления. Инж. ж. МТТ, 1967, № 5.
12. Троценко В. А. К исследованию колебаний жидкости в сосуде, поверхность которой ограничена пологой мембраной. Прикл. механика, 1978, т. 14, № 1.