

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ОТСЕКАМИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ

Ф. Н. ШКЛЯРЧУК

(Москва)

Поперечные колебания тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость, обычно рассматриваются на основе балочной теории изгиба без учета сдвига [1-4]. Как показывают экспериментальные исследования [3], такой приближенный подход в некоторых случаях приводит к неудовлетворительным результатам и требует уточнения.

В публикуемой работе рассматриваются малые поперечные колебания при изгибе со сдвигом упругой цилиндрической оболочки с отсеками, частично заполненными жидкостью. Используется полубезмоментная теория подкрепленной цилиндрической оболочки с учетом сдвигов в ее срединной поверхности и сжимающих продольных усилий. Уравнения колебаний составляются по методу конечных элементов, в качестве которых рассматриваются отсеки, а в качестве обобщенных координат — поперечные перемещения и углы поворота на краях отсеков.

Гидродинамические коэффициенты для отсека с плоским недеформируемым дном определяются на основании точного решения. В случае, когда днищем отсека является недеформируемая оболочка вращения, решение гидродинамической задачи для полости днища записывается на основе гипотезы плоских сечений и стыкуется с точным решением для цилиндрической части бака.

Как пример исследованы собственные упругие колебания цилиндрической оболочки с четырьмя одинаковыми отсеками, имеющими плоские или сферические днища и частично заполненные жидкостью.

Оценено влияние сдвига и приведены сравнения результатов, полученных при использовании различных приближенных способов определения гидродинамических коэффициентов для упругого цилиндрического бака.

1. Цилиндрическая оболочка. Рассмотрим малые поперечные колебания тонкостенной осесимметричной конструкции, одним из отсеков которой является подкрепленная (ортотропная) цилиндрическая оболочка, частично заполненная идеальной жидкостью.

При поперечных колебаниях поперечные сечения осесимметричной конструкции остаются плоскими. Будем считать цилиндрическую оболочку и соединительные шпангоуты нерастяжимыми в окружном направлении. Тогда перемещения цилиндрической оболочки при изгибе со сдвигом (фиг. 1) определяются в виде

$$u = R\vartheta \cos \theta, \quad v = V \sin \theta, \quad w = -V \cos \theta \quad (1.1)$$

где $V(x, t)$ и $\vartheta(x, t)$ — перемещение и угол поворота поперечного сечения оболочки, $U(x, t) = R\vartheta(x, t)$.

Метод конечных элементов будем использовать, рассматривая в качестве конечных элементов отсеки конструкции, а в качестве обобщенных координат — перемещения и углы поворота на краях отсеков. Перемещение V и угол поворота ϑ в пределах отсека представим по методу Ритца через перемещения и углы поворота на краях $V_0, \vartheta_0, V_1, \vartheta_1$. Для этого в качестве заданных форм деформаций используем решения статической задачи изгиба и сдвига отсека при единичных перемещениях и углах поворота на его краях без учета продольной сжимающей силы ($N^0 = 0$).

Для подкрепленной цилиндрической оболочки на основании полубезмоментной теории с учетом сдвигов в срединной поверхности [5] получим

$$\begin{aligned} V(\xi, t) &= V_0(t) \varphi_0(\xi) + U_0(t) \psi_0(\xi) + V_1(t) \varphi_1(\xi) + U_1(t) \psi_1(\xi) \\ U(\xi, t) &= V_0(t) \eta_0(\xi) + U_0(t) \chi_0(\xi) + V_1(t) \eta_1(\xi) + U_1(t) \chi_1(\xi) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\varphi_0 = 1 - \frac{1-\kappa}{l} \xi - \frac{3\kappa}{l^2} \xi^2 + \frac{2\kappa}{l^3} \xi^3$$

$$\psi_0 = \frac{1+\kappa}{2} \xi - \frac{1+3\kappa}{2l} \xi^2 + \frac{\kappa}{l^2} \xi^3$$

$$\eta_0 = \frac{d\varphi_0}{d\xi} + \frac{1-\kappa}{l}, \quad \chi_0 = \frac{d\psi_0}{d\xi} + \frac{1-\kappa}{2}$$

$$\varphi_1 = 1 - \varphi_0, \quad \psi_1 = \xi - l(1 - \varphi_0) - \psi_0, \quad \eta_1 = -\eta_0$$

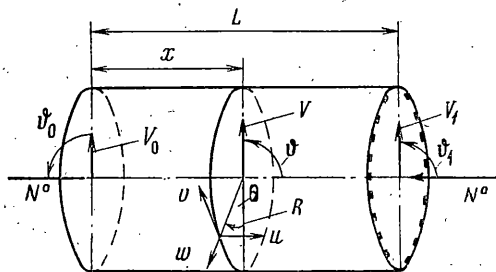
$$\chi_1 = 1 + l\eta_0 - \chi_0, \quad U_0 = R\vartheta_0, \quad U_1 = R\vartheta_1, \quad \xi = x/R$$

$$l = \frac{L}{R}, \quad \kappa = \frac{l^2}{l^2 + 12\gamma}, \quad \gamma = \frac{E\delta_1}{G\delta}, \quad \delta_1 = \delta + \frac{n_1 f}{2\pi R}$$

где E , G — модуль нормальной упругости и модуль сдвига, δ — толщина оболочки, f , n_1 — площади стрингеров и их число, координата x отсчитывается от края отсека.

Если пренебречь сдвигом оболочки, то следует положить $G = \infty$, т. е. $\gamma = 0$ и $\kappa = 1$.

Вычислим потенциальную энергию деформации отсека с учетом продольной сжимающей силы $N^0 = \text{const}$; сила N^0 определяется без учета



Фиг. 1

внутреннего давления в баке. Используя выражения (1.2), получим

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} b (V_0 - V_1)^2 + c (V_0 - V_1) (U_0 + U_1) + \frac{1}{2} d (U_0 - U_1)^2 + c l U_0 U_1 \quad (1.3)$$

$$b = \pi E \delta_1 \frac{12\kappa}{l^3} - \frac{N^0}{R} \frac{1}{l} \left(1 + \frac{\kappa^2}{5} \right)$$

$$c = \pi E \delta_1 \frac{6\kappa}{l^2} - \frac{N^0}{R} \frac{\kappa^2}{10}$$

$$d = \pi E \delta_1 \frac{1+3\kappa}{l} - \frac{N^0}{R} \frac{l}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{\kappa^2}{10} \right)$$

Применяемый метод в пределе может точно описывать движение отсека как недеформируемого тела. Например, при $\vartheta_1 = \vartheta_0$, $V_1 - V_0 = L\vartheta_0$ из выражений (1.3) получим $\Pi_0 = -0.5 N^0 L \vartheta_0^2$.

Учет продольных сжимающих сил в отсеках позволяет наряду с поперечными колебаниями рассматривать задачу общей устойчивости составной системы отсеков.

При вычислении кинетической энергии оболочки, а также при решении гидродинамической задачи, чтобы избежать громоздких выражений, представим перемещения (1.2) в виде

$$\begin{aligned} V(\xi, t) &= a_1(t) + a_2(t)\xi + a_3(t)\xi^2 + a_4(t)\xi^3 \\ U(\xi, t) &= a_2(t) + 6\gamma a_4(t) + 2a_3(t)\xi + 3a_4(t)\xi^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где в матричной форме

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} V_0 \\ \dot{U}_0 \\ V_1 \\ U_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1-\kappa}{l} & \frac{1+\kappa}{2} & \frac{1-\kappa}{l} & -\frac{1-\kappa}{2} \\ -\frac{3\kappa}{l^2} & -\frac{1+3\kappa}{2l} & \frac{3\kappa}{l^2} & \frac{1-3\kappa}{2l} \\ \frac{2\kappa}{l^3} & \frac{\kappa}{l^2} & -\frac{2\kappa}{l^3} & \frac{\kappa}{l^2} \end{pmatrix}$$

Кинетическая энергия отсека цилиндрической оболочки в обобщенных координатах a_1, a_2, a_3, a_4 , с учетом (1.1), (1.4) записывается в виде

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} m_0' \pi R^2 \int_0^l (U'^2 + 2V'^2) d\xi = \frac{1}{2} m_0' \pi R^2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij} a_i a_j \\ c_{ij} &= 2\beta_{ij} + (i-1)(j-1)\beta_{i-1, j-1} + (6\gamma)^2 \beta_{i1} \delta_{i4} \delta_{j4} + \\ &+ 6\gamma [\delta_{i4}(j-1)\beta_{1, j-1} + \delta_{j4}(i-1)\beta_{i-1, 1}], \quad \beta_{ij} = \frac{l^{i+j-1}}{i+j-1} \end{aligned} \quad (1.6)$$

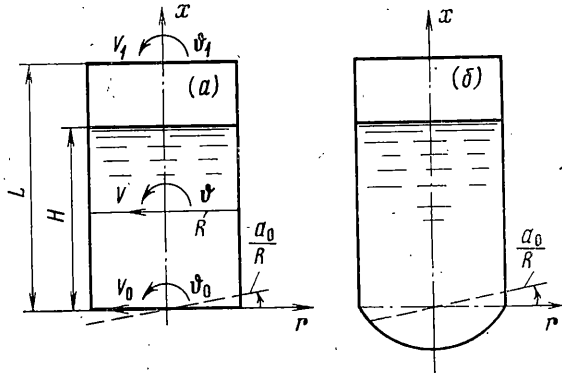
где m_0' — приведенная масса единицы поверхности подкрепленной цилиндрической оболочки, точкой обозначается производная по времени, δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta_{ij} = 1$ при $i=j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Потенциальная и кинетическая энергии жестких грузов, крепящихся на краях отсека, равны

$$\begin{aligned} \Pi_{01} &= -\frac{1}{2} \frac{g}{R^2} (S_0 U_0^2 + S_1 U_1^2) \\ T_{01} &= \frac{1}{2} M_0 V_0'^2 + \frac{S_0}{R} V_0' U_0' + \frac{1}{2} \frac{J_0}{R^2} U_0'^2 + \\ &+ \frac{1}{2} M_1 V_1'^2 + \frac{S_1}{R} V_1' U_1' + \frac{1}{2} \frac{J_1}{R^2} U_1'^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

где g — ускорение поля массовых сил в невозмущенном движении (гравитационное ускорение), направленное вдоль оси оболочки, M_i, S_i, J_i — масса, статический момент массы и момент инерции груза ($i=0,1$).

2. Гидродинамическая задача для цилиндра с плоским дном. Рассмотрим поперечные колебания жидкости, частично заполняющей упругую цилиндрическую оболочку, дно которой считается плоским (фиг. 2, а). Нормальное перемещение недеформируемого плоского дна $w_1(r, \theta, t)$ характеризуется его углом поворота $a_0(t)/R$.



Фиг. 2

Кинетическая и потенциальная энергии жидкости в цилиндре с плоским дном определяются по формулам:

$$T = \frac{\rho}{2} \left[- \iint_{S_2} \Phi \cdot w \cdot dS_2 - \iint_F \Phi \cdot w_1 \cdot dF + \iint_{\sigma} \Phi \cdot u \cdot d\sigma \right] \quad (2.1)$$

$$\Pi = \frac{\rho g}{2} \left[\iint_{\sigma} u^2 d\sigma - \iint_F w_1^2 dF - \pi R^2 \int_0^H (H-x) \left(2 \frac{dV}{dx} - \theta \right) \theta dx \right]$$

где Φ и u — потенциал перемещений и продольные перемещения жидкости, S_2 , F , σ — боковая поверхность, поверхность плоского дна и свободная поверхность жидкости. Формула для потенциальной энергии жидкости здесь получена способом, предложенным в [6] для произвольной оболочки вращения.

Точное решение гидродинамической задачи для цилиндра при заданных нормальных перемещениях боковой поверхности $w = -V(\xi, t) \cos \theta$ и плоского дна $w_1 = a_0(t) (r/R) \cos \theta$ получим методом Власова — Канторовича [7]. Продольные перемещения частиц жидкости представим в виде разложения по полной системе ортогональных функций Бесселя:

$$u(\xi, \alpha, \theta, t) = \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\xi, t) \varphi_n(\alpha) \quad (2.2)$$

$$\varphi_n(\alpha) = \frac{v_n^2 J_1(v_n \alpha)}{4 J_1(v_n)}, \quad \alpha = \frac{r}{R}$$

где v_n — корни уравнения $J_1'(v) = 0$ ($v_1 = 1.8412$, $v_2 = 5.3315$, $v_3 = 8.5363$, $v_4 = 11.706$, $v_5 = 14.864$, ...).

Функции $\varphi_n(\alpha)$ здесь нормированы так, что u_n/R представляет эквивалентный в среднеквадратичном приближении угол поворота слоя жидкости.

Потенциал перемещений жидкости и уравнения для неизвестных функций u_n [7] в этом случае приводятся к виду (штрихом обозначена производная по ξ):

$$\Phi = \left[-V\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} u_n' \frac{1}{v_n^2} \varphi_n(\alpha) \right] R \cos \theta \quad (2.3)$$

$$u_n'' - v_n^2 u_n = 4\kappa_n v_n^2 V', \quad u_n = 4\kappa_n a_0 \quad \text{при } \xi = 0$$

$$u_n''' + (g/R) v_n^2 u_n = 4\kappa_n v_n^2 V'' \quad \text{при } \xi = h = H/R$$

$$\kappa_n = \frac{2}{v_n^2 (v_n^2 - 1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n = \frac{1}{4}$$

Общее решение уравнения (2.3) с учетом разложения (1.4) записывается в виде

$$u_n = A_n \operatorname{sh} v_n \xi + B_n \operatorname{ch} v_n \xi - 4\kappa_n \left(a_2 + \frac{6}{v_n^2} a_3 + 2a_3 \xi + 3a_4 \xi^2 \right) \quad (2.4)$$

Из кинематического граничного условия (2.3) при $\xi = 0$ получим

$$B_n = 4\kappa_n \left(a_0 + a_2 + \frac{6}{v_n^2} a_4 \right) \quad (2.5)$$

Функцию $A_n(t)$ можно рассматривать как независимую обобщенную координату. Однако ее удобнее представить в виде

$$A_n = \frac{s_n}{\operatorname{sh} v_n h} - B_n \operatorname{cth} v_n h + \frac{4\kappa_n}{\operatorname{sh} v_n h} \left[a_1 + 2a_2 h + 3a_3 \left(h^2 + \frac{2}{v_n^2} \right) \right] \quad (2.6)$$

или

$$A_n = \frac{r_n}{\operatorname{sh} v_n h} - B_n \operatorname{th} v_n h + \frac{v_n}{\operatorname{ch} v_n h} \left[a_1 + a_2 h + a_3 \left(h^2 + \frac{2}{v_n^2} \right) + a_4 h \left(h^2 + \frac{6}{v_n^2} \right) \right] \quad (2.7)$$

Здесь обобщенные координаты $s_n(t)$ и $r_n(t)$ характеризуют колебания свободной поверхности жидкости по форме $\varphi_n(\alpha) \cos \theta$; s_n — волновые движения, вызванные подвижностью стенок бака и гравитацией, отсчитываемые от невозмущенной свободной поверхности $\xi = h$ (если $s_n = 0$, то $u_n = 0$ при $\xi = h$); r_n — волновые движения, вызванные влиянием гравитации (если $r_n = 0$, то $u_n' = 4\kappa_n v_n^2 V$ при $\xi = h$ и точно выполняется динамическое граничное условие (2.3) при $g = 0$). Далее будем рассматривать одновременно оба эти случая.

Запишем выражения кинетической и потенциальной энергий (2.1) в обобщенных координатах a_i , s_n , используя формулы (1.1), (1.4), (2.2) — (2.6):

$$T = \frac{1}{2} \rho g R^3 \left[\sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 m_{ij} a_i \cdot a_j + 2 \sum_{i=0}^4 \sum_n \mu_{in} a_i \cdot s_n + \sum_n \mu_n s_n^2 \right]$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \rho g R^2 \left[\sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 k_{ij} a_i a_j + \sum_n k_n s_n^2 \right] \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
m_{00} &= \beta_1, \quad m_{01} = 0.25, \quad m_{02} = \beta_1 - \beta_6, \quad m_{03} = -2h\beta_6 + 2\beta_2 \\
m_{04} &= -3h^2\beta_6 + 6(\beta_3 - \beta_7), \quad m_{11} = h, \quad m_{12} = \frac{h^2}{2}, \quad m_{13} = \frac{h^3}{3}, \quad m_{14} = \frac{h^4}{4} \\
m_{22} &= \frac{h^3}{3} - \frac{h}{4} + 2(\beta_1 - \beta_6), \quad m_{23} = \frac{h^4}{4} - \frac{h^2}{4} - 2h(\beta_1 - \beta_6) \\
m_{24} &= h^5/5 - h^3/4 + 3h^2(\beta_1 - \beta_6) - 6h\beta_2 + 12(\beta_3 - \beta_7) \\
m_{33} &= h^5/5 - h^3/3 + 4h^2\beta_1 - 4h\beta_2 \\
m_{34} &= h^6/6 - 3h^4/8 + 6h^3\beta_1 - 12h^2\beta_2 + 12h(\beta_3 - \beta_7) \\
m_{44} &= h^7/7 - 9h^5/20 + 9h^4\beta_1 - 24h^3\beta_2 + 36h^2(\beta_3 - \beta_7) - 36h\beta_4 + 72(\beta_5 - \beta_8) \\
m_{ij} &= m_{ji} \quad (i, j = 0, 1, 2, 3, 4), \quad \mu_n = \text{cth } v_n h / 16\kappa_n v_n, \quad \mu_{0n} = -1/4v_n \text{ sh } v_n h, \quad \mu_{1n} = -1/4 \\
\mu_{2n} &= -\frac{1}{4} \left(h - \frac{\text{cth } v_n h}{v_n} + \frac{1}{v_n \text{ sh } v_n h} \right), \quad \mu_{3n} = -\frac{1}{4} \left(h^2 - 2h \frac{\text{cth } v_n h}{v_n} + \frac{2}{v_n^2} \right) \\
\mu_{4n} &= -\frac{1}{4} \left(h^3 - 3h^2 \frac{\text{cth } v_n h}{v_n} + \frac{6h}{v_n^2} - 6 \frac{\text{cth } v_n h}{v_n^3} + \frac{6}{v_n^3 \text{ sh } v_n h} \right) \\
k_{00} &= 1/16\kappa_n, \quad k_{00} = -1/4, \quad k_{0i} = 0 \text{ при } i > 0; \quad k_{ij} = 0 \text{ при } i, j > 0, \quad i+j \leq 3 \\
k_{ij} &= (6\gamma)^2 \frac{h^2}{2} \delta_{i4} \delta_{j4} - \frac{(i-1)(j-1)}{(i+j-2)(i+j-3)} h^{i+j-2} \text{ при } i, j > 0, \quad i+j > 3 \\
\beta_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{v_n} \text{cth } v_n h, \quad \beta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{v_n^2} = 0.07291, \quad \beta_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{v_n^3} \text{cth } v_n h, \\
\beta_4 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{v_n^4} = 0.02148 \\
\beta_5 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{v_n^5} \text{cth } v_n h, \quad \beta_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{v_n \text{ sh } v_n h}, \quad \beta_7 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{v_n^3 \text{ sh } v_n h}, \quad \beta_8 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{v_n^5 \text{ sh } v_n h}
\end{aligned}$$

При $h > 2$ имеем $\text{cth } v_n h \approx 1$, $1/\text{sh } v_n h \approx 0$ и $\beta_1 = 0.1346$, $\beta_3 = 0.03955$, $\beta_5 = 0.01167$, $\beta_6 = \beta_7 = \beta_8 = 0$.

Кроме того, запишем выражения кинетической и потенциальной энергий (2.1) в обобщенных координатах a_i , r_n используя формулу (2.7) вместо (2.6):

$$T = \frac{1}{2} \pi \rho R^3 \left[\sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 m_{ij}^* a_i a_j + \sum_n \mu_n r_n^2 \right] \quad (2.9)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \pi \rho g R^2 \left[\sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 k_{ij}^* a_i a_j + 2 \sum_{i=0}^4 \sum_n \kappa_{in} a_i r_n + \sum_n k_n r_n^2 \right]$$

$$m_{00}^* = \gamma_2, \quad m_{01}^* = 0.25 - \gamma_6, \quad m_{02}^* = \gamma_2 - h\gamma_6, \quad m_{11}^* = h - \gamma_1$$

$$m_{03}^* = 2(\gamma_3 - \gamma_7) - h^2\gamma_6, \quad m_{04}^* = 6\gamma_4 - h^3\gamma_6 - 6h\gamma_7$$

$$m_{12}^* = h^2/2 - h\gamma_1 + 1/4 - \gamma_6, \quad m_{13}^* = h^3/3 - h^2\gamma_1 + h/2 - 2\gamma_2$$

$$m_{14}^* = h^4/4 - h^3\gamma_1 + 3/4 h^2 - 6h\gamma_2 + 6(\gamma_3 - \gamma_7)$$

$$m_{22}^* = h^3/3 - h^2\gamma_1 + h(1/4 - 2\gamma_6) + \gamma_2$$

$$m_{23}^* = h^4/4 - h^3\gamma_1 + h^2(1/2 - \gamma_6) - 2h\gamma_2 + 2(\gamma_3 - \gamma_7)$$

$$m_{24}^* = h^5/5 - h^4\gamma_1 + h^3(3/4 - \gamma_6) + 6h^2\gamma_2 + 6h(\gamma_3 - 2\gamma_7) + 6\gamma_4$$

$$m_{33}^* = h^5/5 - h^4\gamma_1 + 2/3 h^3 - 4h^2\gamma_2 + 4h\gamma_3 - 4\gamma_4$$

$$m_{34}^* = \frac{h^6}{6} - h^5\gamma_1 + \frac{7}{8} h^4 - 8h^3\gamma_2 + 6h^2(2\gamma_3 - \gamma_7) - 12h\gamma_4 + 12(\gamma_5 - \gamma_8)$$

$$m_{44}^* = \frac{h^7}{7} - h^6\gamma_1 + \frac{21}{20} h^5 - 12h^4\gamma_2 + 12h^3(2\gamma_3 - \gamma_7) - 36h^2\gamma_4 + 36h(\gamma_5 - 2\gamma_8)$$

$$m_{ij}^* = m_{ji}^*, \quad m_{ij}^* = m_{ij} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{in}\mu_{jn}}{\mu_n}, \quad k_{ij}^* = k_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{\mu_{in}\mu_{jn}}{\mu_n^2}, \quad \kappa_{in} = -k_n \frac{\mu_{in}}{\mu_n}$$

$$\gamma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n v_n \operatorname{th} v_n h, \quad \gamma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{v_n} \operatorname{th} v_n h, \quad \gamma_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{v_n^2} = 0.07291,$$

$$\gamma_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{v_n^3} \operatorname{th} v_n h$$

$$\gamma_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{v_n^4} = 0.02148, \quad \gamma_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{\operatorname{ch} v_n h}, \quad \gamma_7 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{v_n^2 \operatorname{ch} v_n h}, \quad \gamma_8 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{v_n^4 \operatorname{ch} v_n h}$$

При $h > 2$ можно положить $\operatorname{th} v_n h \approx 1$, $1/\operatorname{ch} v_n h \approx 0$, и тогда $\gamma_1 = 0.4744$, $\gamma_2 = 0.1346$, $\gamma_4 = 0.03955$, $\gamma_6 = \gamma_7 = \gamma_8 = 0$.

Если при решении гидродинамической задачи в цилиндрической части бака методом Власова — Канторовича ограничиться одночленным приближением, соответствующим гипотезе плоских сечений для жидкости [8], то в этом случае вместо уравнений (2.2), (2.3) будем иметь

$$u(\xi, \alpha, \theta, t) = u_1(\xi, t) \alpha \cos \theta, \quad \Phi = [-V\alpha + 1/3 u_1' (3\alpha - \alpha^3)] R \cos \theta \quad (2.10)$$

$$u_1'' - k^2 u_1 = k^2 V', \quad k^2 = 2^4/7; \quad u_1 = a_0 \text{ при } \xi = 0; \quad u_1''' + \frac{g}{R} k^2 u_1 = k^2 V'' \text{ при } \xi = h$$

Решение уравнения (2.10) и выражения кинетической и потенциальной энергий имеют такой же вид, как и для точного решения (2.4) — (2.9) с той лишь разницей, что в этом случае следует считать $n=1$ и заменить $v_1 = 1.8412$ на $k = \sqrt{2^4/7} = 1.8516$ и $\kappa_1 = 0.24685$ на 0.25 .

Поскольку $v_1 \approx k$ и $\kappa_1 \approx 0.25$ с точностью $\sim 1\%$ и влияние членов при $n=2, 3, \dots$ в выражениях (2.8), (2.9) незначительно, то отсюда вытекает, что приближенное решение, соответствующее гипотезе плоских сечений, обладает достаточной для практических расчетов точностью.

Пусть плоское дно (фиг. 2, а) жестко соединено с цилиндрической оболочкой бака. В этом случае угол поворота дна равен углу поворота поперечного сечения оболочки при $\xi = 0$. Следовательно

$$a_0 = U(0, t) = a_2 + 6\gamma a_4 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i \quad (2.11)$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 6\gamma$$

Тогда, например, выражения (2.9) приводятся к виду

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \pi \rho R^3 \left[\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 m_{ij}^{\circ} a_i^{\circ} a_j^{\circ} + \sum_n \mu_n r_n^2 \right] \\
 \Pi &= \frac{1}{2} \pi \rho g R^2 \left[\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 k_{ij}^{\circ} a_i a_j + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^4 \sum_n \kappa_{in}^{\circ} a_i r_n + \sum_n k_n r_n^2 \right] \\
 m_{ij}^{\circ} &= m_{ij}^* + \alpha_i m_{0i}^* + \alpha_j m_{0j}^* + \alpha_i \alpha_j m_{00}^* \\
 k_{ij}^{\circ} &= k_{ij}^* + \alpha_i k_{0i}^* + \alpha_j k_{0j}^* + \alpha_i \alpha_j k_{00}^* \\
 \kappa_{in}^{\circ} &= \kappa_{in} + \alpha_i \kappa_{0n}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Аналогичным образом преобразуются выражения (2.8).

3. Цилиндрический бак с днищем в виде полости вращения. Рассмотрим поперечные колебания жидкости внутри упругого цилиндрического бака, днищем которого является недеформируемая полость вращения (фиг. 2, б). Движение жидкости внутри полости днища будем описывать приближенно на основе гипотезы плоских сечений [8], чтобы упростить стыковку с полученным решением для цилиндрической части бака.

Кинетическую и потенциальную энергии жидкости, заполняющей полость днища, записываем в виде

$$T^{\circ} = \frac{1}{2} M V_0^{\circ 2} + S V_0^{\circ} \vartheta_0^{\circ} + \frac{1}{2} J \vartheta_0^{\circ 2} + \lambda_1 V_0^{\circ} a_0^{\circ} + \lambda_{01} \vartheta_0^{\circ} a_0^{\circ} + \frac{1}{2} \mu_1 a_0^{\circ 2} \tag{3.1}$$

$$\Pi^{\circ} = -\frac{1}{2} g S \vartheta_0^{\circ 2} + \frac{1}{2} k_1 a_0^{\circ 2}$$

где a_0/R — угол поворота слоя жидкости на границе между полостью днища и цилиндрической частью бака (фиг. 2, б). Гидродинамические коэффициенты можно вычислить, используя решение, приведенное в [8], которое обладает высокой точностью для широкого класса односвязных полостей вращения, в случае, когда поверхность жидкости накрыта невесомой, недеформируемой плавающей крышкой.

Для днища эллиптической формы получим

$$M = \pi \rho a^3 h_0^2 \varepsilon^2 \left(1 - \frac{h_0}{3} \right), \quad S = M a (1 - h_0) - \frac{1}{4} \pi \rho a^4 h_0^2 \varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2) (2 - h_0)^2$$

$$\begin{aligned}
 J = & M a^2 (h_0^2 - 2h_0 + \varepsilon^2) + \pi \rho a^5 h_0^2 \varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2) \left\{ h_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{h_0}{5} \right) + \frac{1}{4} (2 - h_0)^2 [2h_0 - \right. \\
 & \left. - \varepsilon^2 (1 - h_0)] + \frac{h_0 \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \left[(1 - \varepsilon^2) \frac{F_2}{F_1} - \frac{2}{3} + \frac{h_0}{2} - \frac{h_0^2}{10} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{4} \pi \rho R^3, \quad \lambda_{01} = -\frac{1}{4} \pi \rho R^3 a \left[\varepsilon^2 (1 - h_0) - 4(1 - \varepsilon^2) \varepsilon^4 h_0^3 \frac{a^4}{R^4} \frac{F_2}{F_1} \right]$$

$$\mu_1^{\circ} = \frac{1}{4} \pi \rho R^2 a \left[\frac{R^2}{2k^2 a^2} \frac{F_3}{F_1} + \varepsilon^2 (1 - h_0) \right]$$

$$k_1^{\circ} = \frac{1}{4} \pi \rho g R^2, \quad h_0 = H_0 / a = 1 - \sqrt{1 - R^2 / b^2} \tag{3.2}$$

$$F_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{h_0}{2}\right)^n, \quad F_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{h_0}{2}\right)^n \left[\frac{1}{n+3} - \frac{h_0}{n+4} + \frac{h_0^2}{4(n+5)} \right]$$

$$F_3 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n \left(\frac{h_0}{2}\right)^{n-1} = 8k^2 h_0^3 \varepsilon^4 (1+\varepsilon^2) \frac{a^6}{R^6} F_2, \quad c_0 = 1$$

$$c_n = c_{n-1} \frac{n^2 + 3n - 4 + \mu}{n(n-2)} \quad (n=1, 2, \dots), \quad \mu = k^2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right), \quad k^2 = \frac{24}{7}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}$$

где a и b — вертикальная и горизонтальная полуоси образующего эллипса, H_0 — глубина эллиптической полости (расстояние от нижнего полюса до плоскости стыка, $H_0 \leq a$). В случае сферического днища радиуса a в формулах (3.2) следует положить $\varepsilon = 1$.

Кинетическую и потенциальную энергии жидкости в цилиндрической части бака здесь удобнее использовать в форме (2.8). В этом случае $\text{prg} R^2 k_{00} + k_1^0 = 0$, $k_{0i} = 0$ при $i=1, 2, 3, 4$, на основании чего обобщенная координата a_0 оказывается циклической и легко исключается. При этом гидродинамические коэффициенты (2.8) могут быть вычислены как на основании точного решения, так и приближенного, соответствующего гипотезе плоских сечений для жидкости (в последнем случае в формулах (2.8) следует положить $n=1$ и заменить ν_1 на $k=1.8516$ и χ_1 на 0.25).

Запишем кинетическую и потенциальную энергии жидкости в цилиндрическом баке с днищем в виде оболочки вращения $T^+ = T + T^0$, $\Pi^+ = \Pi + \Pi^0$ с учетом выражений (2.8) и (3.1), заменяя в последних обобщенные координаты

$$V_0 = a_1 = \sum_{i=1}^4 \delta_{1i} a_i, \quad R\vartheta_0 = U_0 = a_2 + 6\gamma a_4 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i a_i \quad (3.3)$$

Исключим циклическую координату a_0 , используя условие $\partial T^+ / \partial a_0 = 0$. В результате получим

$$T^+ = \frac{1}{2} \pi \rho R^3 \left[\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 m_{ij}^+ a_i \dot{a}_j + 2 \sum_{i=1}^4 \sum_n \mu_{in}^+ a_i \dot{s}_n + \sum_n \mu_n s_n^2 + \sum_m \sum_n \lambda_{mn} s_m \dot{s}_n \right] \quad (3.4)$$

$$\Pi^+ = \frac{1}{2} \pi \rho g R^2 \left[\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 k_{ij}^+ a_i a_j + \sum_n k_n s_n^2 \right]$$

$$m_{ij}^+ = m_{ij} + m_{ij}' - \frac{m_{0i}^+ m_{0j}^+}{m_{00}^+}, \quad \mu_{in}^+ = \mu_{in} - \frac{m_{0i}^+ \mu_{0n}}{m_{00}^+}$$

$$m_{ij}' = \frac{M}{\pi \rho R^3} \delta_{1i} \delta_{1j} + \frac{S}{\pi \rho R^4} (\delta_{1i} \alpha_j + \delta_{1j} \alpha_i) + \frac{J}{\pi \rho R^5} \alpha_i \alpha_j$$

$$m_{0i}^+ = m_{0i} + \frac{\lambda_1}{\pi \rho R^3} \delta_{1i} + \frac{\lambda_{01}}{\pi \rho R^4} \alpha_i$$

$$m_{00}^+ = m_{00} + \frac{\mu_1^0}{\pi \rho R^3}, \quad \lambda_{mn} = -\frac{\mu_{0m} \mu_{0n}}{m_{00}^+}, \quad k_{ij}^+ = k_{ij} - \frac{S}{\pi \rho R^4} \alpha_i \alpha_j$$

При малых глубинах заполнения ($h < 0.5$) и при использовании точно-го решения гидродинамической задачи для цилиндрической части бака нет смысла учитывать высшие формы волновых движений свободной поверхности жидкости при $n=2, 3, \dots$, поскольку в полости днища движение жидкости подчиняется гипотезе плоских сечений и в целом для бака решение приближенное. Если при $h < 0.5$ ограничиться значениями $m, n=1$ и учесть, что при $h \geq 0.5$ и $m, n \geq 2$, коэффициенты $\lambda_{mn} \approx 0$, то формулу для кинетической энергии (3.4) можно записать в упрощенном виде

$$T^+ = \frac{1}{2} \pi \rho R^3 \left[\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 m_{ij}^+ a_i^+ a_j^+ + 2 \sum_{i=1}^4 \sum_n \mu_{in}^+ a_i^+ s_n^+ + \sum_n \mu_n^+ s_n^+{}^2 \right] \\ \mu_n^+ = \mu_n + \lambda_{nn} \quad (3.5)$$

4. Замена обобщенных координат. В общем случае выражения (3.4), (3.5) также можно преобразовать к виду (2.12) заменой обобщенных координат, характеризующих волновые движения жидкости

$$r_n = s_n + \sum_{i=1}^4 \frac{\mu_{in}^+}{\mu_n^+} a_i \quad (4.1)$$

Тогда получим

$$T^+ = \frac{1}{2} \pi \rho R^3 \left[\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 m_{ij}^{\circ} a_i^{\circ} a_j^{\circ} + \sum_n \mu_n^+ r_n^+{}^2 \right] \quad (4.2)$$

$$\Pi^+ = \frac{1}{2} \pi \rho g R^2 \left[\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 k_{ij}^{\circ} a_i a_j + 2 \sum_{i=1}^4 \sum_n \chi_{in}^{\circ} a_i r_n + \sum_n k_n r_n^2 \right] \\ m_{ij}^{\circ} = m_{ij}^+ - \sum_n \frac{\mu_{in}^+ \mu_{jn}^+}{\mu_n^+}, \quad k_{ij}^{\circ} = k_{ij}^+ + \sum_n k_n \frac{\mu_{in}^+ \mu_{jn}^+}{(\mu_n^+)^2}, \quad \chi_{in}^{\circ} = -k_n \frac{\mu_{in}^+}{\mu_n^+}$$

Выражения (4.2), так же как и (2.12), удобно использовать при расчете упругих колебаний, частоты которых значительно превышают низшую частоту гравитационных колебаний свободной поверхности жидкости $\omega_1 = (gk_{11}/R\mu_1^+)^{1/2}$ или при импульсных воздействиях, поскольку в этих случаях влияние обобщенных координат r_n несущественно (если $g \rightarrow 0$, то $\Pi^+ \rightarrow 0$ и $r_n \rightarrow 0$).

Если цилиндрический бак, частично заполненный жидкостью, считается абсолютно жестким, то в этом случае следует положить

$$\gamma = 0, \quad a_1 = V_* - \vartheta_* x_*, \quad a_2 = R\vartheta_*, \quad a_3 = a_4 = 0 \quad (4.3)$$

где V_* и ϑ_* — поперечное перемещение и угол поворота бака в некоторой точке $x = x_*$.

В случае упругого бака выражения кинетической и потенциальной энергий, полученные в обобщенных координатах a_1, a_2, a_3, a_4 при помощи матричного преобразования (1.5), записываем в обобщенных координатах V_0, U_0, V_1, U_1 . Выражения кинетической энергии оболочки и потенциальной энергии жидкости (1.6), (4.2) принимают вид

$$T_0 + T^+ = \frac{1}{2} \pi \rho R^3 \left[Y^T D Y + \sum_n \mu_n^+ r_n^+{}^2 \right]$$

$$\Pi^+ = \frac{1}{2} \pi \rho g R^2 \left[Y^T V Y + 2 \sum_n K_n^T Y r_n + \sum_n k_n r_n^2 \right] \quad (4.4)$$

$$D = A^T M A, \quad M = \left[\frac{m_0'}{\rho R} c_{ij} + m_{ij}^\circ \right]_{4 \times 4}$$

$$B = A^T K A, \quad K = [k_{ij}^\circ]_{4 \times 4}, \quad K_n^T = [\kappa_{1n}^\circ \kappa_{2n}^\circ \kappa_{3n}^\circ \kappa_{4n}^\circ]$$

где индекс T — транспонированные матрицы и столбцы.

На основании полученных выражений кинетической и потенциальной энергий отдельного отсека нетрудно получить уравнения колебаний составной системы соединенных между собой отсеков в форме уравнений Лагранжа в обобщенных координатах. Обобщенные координаты здесь представляют перемещения V_i и углы поворота φ_i (или перемещения $U_i = R_i \varphi_i$) в сечениях, где соединяются отсеки, а также параметры $r_n^{(i)}$, характеризующие гравитационные волновые движения свободных поверхностей жидкости в баках (i — номер отсека и его нижнего торца).

Для определения обобщенных сил следует записать вариацию работы внешних нагрузок, приложенных к оболочке, на перемещениях (1.1), (1.2).

Если цилиндрический бак достаточно длинный и заполнен жидкостью частично, то для увеличения точности он может быть разделен на два отсека в сечении, совпадающем с невозмущенной свободной поверхностью.

5. Примеры. Для оценки точности рассматриваемого здесь метода конечных элементов сравним его результаты с результатами точного решения для консольно-закрепленной однородной цилиндрической оболочки (стержня) без учета сдвига ($\gamma=0$) и инерции вращения, L_0 , EI , m — длина, изгибная жесткость и погонная масса стержня.

Квадраты четырех низших безразмерных частот колебаний стержня ω_k^2 ($m L_0^4 / EI$) при $N^\circ=0$ (точное решение и метод конечных элементов), равны:

12.3624	485.5	3807	14617
12.3632	486.6	3866	15045

Значения параметра критической сжимающей силы $\nu = N^\circ L_0^2 / EI$, полученные при использовании формул (1.3) и при разбиении стержня на p одинаковых конечных элементов, равны

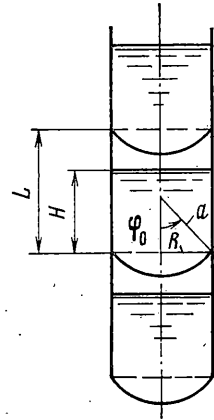
p	2	3	5	10
ν	2.46867	2.46761	2.467434	2.4674016

Точное решение дает $\nu = \pi^2 / 4 = 2.4674010$. Приведенные результаты указывают на высокую точность метода.

Рассмотрим собственные упругие колебания цилиндрической оболочки с четырьмя одинаковыми отсеками, частично заполненными жидкостью и имеющими плоские или сферические днища (фиг. 3). Параметры системы: $l = L/R = 5$, $h = H/R = 4$, $\rho_0/\rho = 2.7$, $R/\delta = 200$, $E/G = 2.6$, $\delta_1/\delta = 1, 2$, $\varphi_0 = 0, 30, 60, 90^\circ$; гравитацией пренебрегаем — $g = 0$. Здесь ρ_0 — плотность материала цилиндрической оболочки, днища и стрингеров (толщина недеформируемой оболочки днища равна δ), $m_0' = \rho_0 \delta$. Общая длина цилиндрической оболочки равна $L_0 = 20 R$.

Оценим влияние сдвига в срединной поверхности оболочки, характеризуемого параметром $\gamma = E \delta_1 / (G \delta)$, $\gamma = 0$ соответствует отсутствию сдвига ($G = \infty$), $\gamma = 2.6$ — изотропный материал ($\delta_1 = \delta$), коэффициент Пуассона которой равен 0.3, и $\gamma = 5.2$ — подкрепленной оболочке при $\delta_1 = 2 \delta$.

В табл. 1 приведены безразмерные значения квадратов трех низших частот $\lambda_k \cdot 10^4$, $\lambda_k = \omega_k^2 \rho R^3 / (E \delta_1)$ ($k = 1, 2, 3$) для свободной оболочки и для оболочки, кон-



Фиг. 3

сольно-закрепленной на нижнем краю. При этом днища в каждом отсеке считались плоскими ($\varphi_0=0$) и использовалось точное решение гидродинамической задачи в виде (2.12), где $r_n=0$ при $g=0$.

Эти результаты показывают, что сдвиг существенно снижает собственные частоты поперечных колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки (особенно в случае, когда она подкреплена стрингерами).

Таблица 1

γ	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
	свободная оболочка			консольно-закрепленная оболочка		
0	48.35	413.5	2339	1.214	50.11	422.6
2.6	45.23	342.7	1554	1.176	41.47	305.6
5.2	40.70	273.1	1143	1.129	34.15	226.9

В табл. 2 для случая $\gamma=2.6$ и $\varphi_0=0$ (изотропная цилиндрическая оболочка с плоскими днищами отсеков) представлены значения $\lambda_k \cdot 10^4$ ($k=1, 2, 3$), полученные при использовании как точного, так и различных упрощенных способов определения гидродинамических коэффициентов для упругого цилиндрического бака при $g=0$ (N — номера вариантов): 1 — точное решение гидродинамической задачи; 2 — приближенное решение, соответствующее гипотезе плоских сечений для жидкости; 3 — точное решение при плоской, неповорачивающейся свободной поверхности жидкости

Таблица 2

N	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
	свободная оболочка			консольно-закрепленная оболочка		
1	45.23	342.7	1554	1.176	41.47	305.6
2	43.24	310.6	1320	1.167	40.50	290.8
3	39.21	288.7	1119	1.001	35.09	254.0
4	44.51	328.8	1346	1.173	41.15	299.5
5	43.20	314.4	1233	1.177	40.74	291.8
6	48.95	444.1	1894	1.167	44.77	377.1
7	38.08	275.5	1038	1.011	34.97	250.0

($s_n=0$); 4 — точное решение с учетом только одной нижней формы волновых движений, характеризуемой обобщенной координатой s_1 ; 5 — приближенный способ [3], когда жидкость заменяется распределенной вдоль упругой линии бака присоединенной массой и при этом учитывается одна нижняя форма волновых движений, характеризуемая обобщенной координатой s_1 ; гидродинамические коэффициенты которой определяются так, как если бы бак был недеформируемым и его перемещение и угол

Таблица 3

φ_0	$k=1$	$k=2$	$k=3$	φ_0	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0	43.24	310.6	1320	60°	37.87	259.4	986.9
30°	41.27	294.2	1201	90°	35.08	241.5	865.1

поворота в районе свободной поверхности жидкости были такими же, как у деформируемого бака; 6 — приближенный способ [4], где гидродинамические коэффициенты определяются так же, как для недеформируемого бака, перемещение и угол поворота которого выражаются через поперечные перемещения деформируемого бака в плоскостях днища и свободной поверхности жидкости (при этом здесь учитывалась только одна нижняя форма волновых движений, характеризуемая обобщенной координатой s_1); 7 — жидкость считается «замороженной» и заменяется распределенной вдоль упругой линии бака присоединенной массой.

В табл. 3 приведены значения $\lambda_k \cdot 10^4$ ($k=1, 2, 3$) для свободной изотропной цилиндрической оболочки ($\gamma=2.6$), отсеки которой имеют одинаковые сферические днища с углами полураствора $\varphi_0=0, 30, 60, 90^\circ$.

При этом движение жидкости как в полости днища, так и в цилиндрической части каждого бака определялось на основе гипотезы плоских сечений.

Поступила 22 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Miles J. W. On the sloshing of liquid in a flexible tank. J. Appl. Mech., 1958, vol. 25, No. 2.
2. Рабинович Б. И. Об уравнениях упругих колебаний тонкостенных стержней с жидким заполнением при наличии свободной поверхности. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 4.
3. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М., «Машиностроение», 1971.
4. Гладкий В. Ф. Динамика конструкции летательного аппарата. М., «Наука», 1969.
5. Власов В. З. Избранные труды, т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1964.
6. Григолюк Э. И., Шклярчук Ф. Н. Уравнения возмущенного движения тела с тонкостенной упругой оболочкой, частично заполненной жидкостью. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
7. Григолюк Э. И., Горшков А. Г., Шклярчук Ф. Н. Об одном методе расчета колебаний жидкости, частично заполняющей упругую оболочку вращения. Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 3.
8. Шклярчук Ф. Н. Приближенный метод расчета колебаний жидкости в полостях вращения. В сб.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. М., Центр. бюро научно-техн. информ. «Волна», 1976.