

К РАСЧЕТУ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В КОНЕЧНЫХ  
ГЕЛИКОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧКАХ

С. Я. КОЛТУНОВ

(Ленинград)

Рассматривается геликоидальная оболочка конечной длины, ограниченная асимптотическими линиями. При использовании определяющих соотношений в форме В. В. Новожилова [1] исследовано взаимное влияние прямолинейных кромок, на которых выполняются граничные условия типа шарнирного опирания. Внутренняя винтовая кромка заделана, внешняя — свободна. После разделения переменных уравнения равновесия и неразрывности приведены к системе Коши восьмого порядка, интегрируемой методом ортогональной прогонки. Полученное решение сопоставлено с численным решением Когена одномерной задачи [2], а также с приближенным решением в квадратурах [3].

1. Рассмотрим прямой геликоид, срединная поверхность которого задана уравнением

$$r(\alpha, \beta) = f(\alpha) \cos \beta i + f(\alpha) \sin \beta j + a\beta k \quad (1.1)$$

Координатные направления являются асимптотическими линиями ( $1/R_\alpha = 1/R_\beta = 0$ ). Основные соотношения для прямого геликоида получены из уравнений линейной теории оболочек в произвольных ортогональных координатах [4]. Метод разделения переменных для оболочек в форме прямого геликоида применим при использовании следующих разложений:

$$\begin{aligned} (v, w, M_\alpha, M_\beta, S) &= \sum_k (v_k, w_k, M_{\alpha k}, M_{\beta k}, S_k) \begin{matrix} \sin \gamma_k \\ \cos \gamma_k \end{matrix} \\ (u, T_\alpha, T_\beta, H) &= \sum_k (u_k, T_{\alpha k}, T_{\beta k}, H_k) \begin{matrix} \cos \gamma_k \\ \sin \gamma_k \end{matrix} \\ \gamma_k &= b_k(\beta - \beta_1), \quad b_k = \pi k / \Delta\beta, \quad \Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Значения  $\beta_1, \beta_2$  координаты  $\beta$  соответствуют прямолинейным кромкам оболочки. Подставляя соотношения (1.2) в уравнения равновесия и разлагая соответствующим образом в ряды Фурье поверхностную нагрузку, получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (BT_{\alpha k})' \pm Ab_k S_k - B'T_{\beta k} \mp \frac{2Ab_k}{R_{\alpha\beta}} M_{\beta k} - \frac{(B^2 H_k)'}{BR_{\alpha\beta}} &= -ABq_{\alpha k} \\ \mp Ab_k T_{\beta k} + \frac{(B^2 S_k)'}{B} - \frac{1}{R_{\alpha\beta}} [(BM_{\alpha k})' \mp Ab_k H_k] - \left( \frac{BM_{\alpha k}}{R_{\alpha\beta}} \right)' &= -ABq_{\beta k} \\ \frac{2S_k}{R_{\alpha\beta}} + \frac{1}{AB} \left\{ \frac{1}{A} [(BM_{\alpha k})' \mp Ab_k H_k - B'M_{\beta k}] - \frac{A}{B} b_k^2 M_{\beta k} \right\} & \end{aligned}$$

$$\mp \frac{b_k}{B^2} (B^2 H_k)' \left. \vphantom{\frac{b_k}{B^2}} \right\} - \frac{1}{R_{\alpha\beta}^2} (M_{\alpha k} + M_{\beta k}) + q_{nk} = 0 \quad (1.3)$$

Параметры Лямэ и кручение срединной поверхности  $\tau_{\alpha\beta} = -1/R_{\alpha\beta}$  равны

$$A = f', \quad B = \sqrt{a^2 + f^2}, \quad \tau_{\alpha\beta} = a/(a^2 + f^2) \quad (1.4)$$

Уравнения неразрывности следуют из уравнений равновесия (1.3) при  $q_{\alpha k} = q_{\beta k} = q_{nk} = 0$  заменой статических величин ( $T_{\alpha k}$ ,  $T_{\beta k}$ ,  $S_k$ ,  $M_{\alpha k}$ ,  $M_{\beta k}$ ,  $H_k$ ) на деформационные ( $\kappa_{\beta k}$ ,  $\kappa_{\alpha k}$ ,  $\tau_k$ ,  $\varepsilon_{\beta k}$ ,  $\varepsilon_{\alpha k}$ ,  $\omega_k/2$ ).

Системы уравнений равновесия и неразрывности с учетом соотношений упругости В. В. Новожилова приведены к системе Коши восьмого порядка

$$y' = Ay + q, \quad y = [M_{\alpha k}', S_k, M_{\alpha k}, M_{\beta k}, \varepsilon_{\beta k}', \tau_k, \varepsilon_{\beta k}, \varepsilon_{\alpha k}]^T \quad (1.5)$$

Компоненты вектора  $q$ , характеризующего нагрузку, равны

$$\begin{aligned} q_3 = q_6 = q_7 = 0, \quad q_4 = -A l q_{\beta k} / (c_2 R_{\alpha\beta}), \quad q_1 = -A^2 q_{nk} + n q_4 \\ q_2 = -A q_{\beta k}, \quad q_8 = -A q_{\alpha k} / c, \quad q_5 = \pm 2 m b_k q_2 / (c c_2) + n q_8 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Элементы матрицы  $A$  определяются формулами

$$\begin{aligned} a_{21} = a_{65} = 2 / R_{\alpha\beta}, \quad a_{22} = a_{66} = -2n, \quad a_{23} = a_{24} = a_{25} = a_{61} = a_{67} = a_{68} = 0 \\ a_{27} = \pm m c b_k, \quad a_{28} = \nu a_{27}, \quad a_{31} = 1, \quad a_{63} = \pm m d^{-1} b_k, \quad a_{64} = \nu a_{63}, \quad a_{75} = 1 \\ a_{7i} = 0 \quad (i=1+8, i \neq 5), \quad a_{3j} = 0 \quad (j=2+8), \quad a_{26} = \mp m d b_k / (c_1 R_{\alpha\beta}), \quad a_{62} = \mp m c^{-1} b_k / (c_2 R_{\alpha\beta}) \\ a_{4i} = g_{4i} + l a_{2i} / c_2, \quad a_{8i} = g_{8i} + l a_{6i} / c_1 \\ a_{1i} = g_{1i} \pm 2 m d b_k a_{6i} / c_1 + n a_{4i} \\ a_{5i} = g_{5i} \pm 2 m c^{-1} b_k a_{2i} / c_2 + n a_{8i} \quad (i=1+8) \\ g_{11} = g_{55} = -n - m(1/m)', \quad g_{12} = g_{56} = -2A^2 / R_{\alpha\beta} \\ g_{14} = g_{58} = 2A^2 / R_{\alpha\beta}^2 + m^2 b_k^2, \quad g_{13} = g_{15} = g_{17} = g_{18} = 0 \\ g_{16} = \pm 2 m n d b_k / c_1, \quad g_{52} = \pm 2 m n c^{-1} b_k / c_2 \\ g_{45} = g_{47} = g_{51} = g_{53} = g_{54} = g_{57} = g_{81} = g_{83} = 0, \quad g_{41} = -g_{85} = \nu \\ g_{42} = 2nl/c_2, \quad g_{86} = 2nl/c_1, \quad g_{43} = -g_{44} = nc_1 \\ g_{87} = -g_{88} = nc_2, \quad g_{46} = \mp m d b_k, \quad g_{48} = \pm 2 g_{46} / R_{\alpha\beta} \\ g_{82} = \mp m c^{-1} b_k, \quad g_{84} = \pm 2 g_{82} / R_{\alpha\beta}, \quad m = A / B, \quad n = B' / B, \quad l = d / c R_{\alpha\beta} \\ c = E h / (1 - \nu^2), \quad d = E h^3 / 12, \quad c_1 = 1 + \nu, \quad c_2 = 1 - \nu \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $E$ ,  $\nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки,  $h$  — толщина оболочки.

2. Рассмотрим оболочку конечной длины. Использование верхних тригонометрических функций в разложении (1.2) позволяет удовлетворить на прямолинейных кромках геликоидальной оболочки условиям типа шарнирного опирания

$$v = w = 0, \quad S = 0, \quad M_{\beta} = 0 \quad (2.1)$$

На примере равномерно нагруженной ( $q_z = \text{const}$ ) оболочки с внутренним жестким и внешним свободным винтовыми краями исследуется взаимное влияние прямолинейных кромок  $\beta = \beta_1$  и  $\beta = \beta_2$ . Рассмотрены оболочки протяженностью в 5, 1,  $3/8$  и  $1/4$  витка. Геометрические размеры оболочки ( $f_1 = 20$  м,  $f_2 = 25$  м,  $a = 1$  м,  $h = 0.008$  м с удельным весом материала  $\rho = 7.8 \cdot 10^4$  Н/м<sup>3</sup>) выбраны в предположении использования результатов для

оценки напряженного состояния в пандусах автомобильных гаражей, выполненных в виде геликоидальных плит.

Поверхностная нагрузка равна

$$q_z k = -100 \rho h k = q_\alpha e_\alpha + q_\beta e_\beta + q_n e_n \quad (2.2)$$

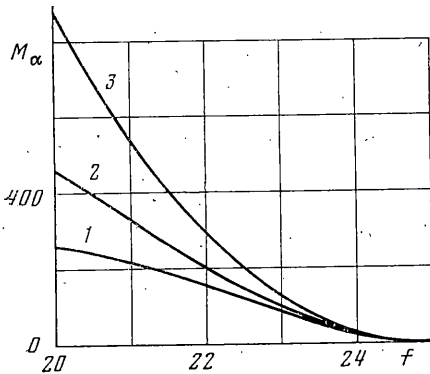
Для составляющих нагрузки получим выражения

$$q_\alpha = 0, \quad q_\beta = a q_z / B, \quad q_n = f q_z / B \quad (2.3)$$

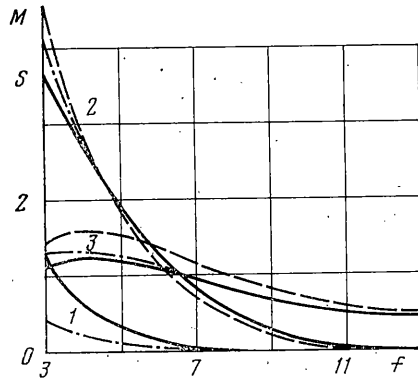
Коэффициенты в разложении в ряд Фурье поверхностной нагрузки равны

$$q_{\beta k} = a q, \quad q_{nk} = f q, \quad q = 2 q_z [1 - (-1)^k] / (B b_k \Delta \beta) \quad (2.4)$$

Зависимости момента  $M_\alpha$  (в килоньютонках) от  $f$  (в метрах) для оболочек протяженностью  $\Delta \beta = \pi/2, 3\pi/4; \Delta \beta \rightarrow \infty$ , представленные на фиг. 1



Фиг. 1



Фиг. 2

(кривые 1, 2, 3), показывают взаимное влияние прямолинейных кромок на величину момента  $M_\alpha$  в средней части геликоидальных оболочек.

Напряженное состояние в оболочке протяженностью в пять витков ( $\Delta \beta = 10\pi$ ) на удалении в полвитка от шарнирно-опертых прямолинейных кромок практически совпадает с квазисимметричным напряженным состоянием ( $\Delta \beta \rightarrow \infty$ ), за исключением сдвигающего усилия  $S$ . При удалении на один виток напряженное состояние полностью совпадает с квазисимметричным. На примере оболочки протяженностью в один виток показано, что у прямолинейных кромок возникают большие по сравнению с квазисимметричным сдвигающие усилия  $S$ , а также вблизи внешнего свободного винтового края большие растягивающие усилия  $T_\beta$ , напряжения от которых одного порядка с напряжениями от изгибающего момента  $M_\alpha$ . Напряженное состояние в средней части оболочки практически совпадает с квазисимметричным.

Следовательно, для достаточно длинных оболочек ( $\Delta \beta \geq 2\pi$ ) у шарнирно-опертых прямолинейных кромок возникают значительные сдвигающие ( $S$ ) и растягивающие ( $T_\beta$ ) усилия, а напряженное состояние в средней части совпадает с квазисимметричным.

Для короткой оболочки длиной в  $1/4$  витка ( $\Delta \beta = \pi/2$ ) напряжения от усилия  $S$  и момента  $M_\alpha$  являются величинами одного порядка. Усилия  $T_\alpha$ ,  $T_\beta$  и крутящий момент  $H$  малы. В случае коротких оболочек ( $\Delta \beta \leq \pi/2$ ) сказывается удерживающее влияние прямолинейных кромок.

3. Рассмотрим квазисимметричную деформацию геликоидальных оболочек. Для равномерно загруженной  $q_n = -500 \text{ кН/м}^2$  оболочки с геометри-

ческими размерами  $f_1=0.03$  м,  $f_2=0.13$  м,  $a=0.032$  м на фиг. 2 приведены графики усилия  $-S$  (кривые 1) и моментов  $M_\alpha$ ,  $M_\beta$  (кривые 2, 3). Расстояние  $f$  от точки срединной поверхности до оси вращения геликоидальной оболочки выражено в сотых долях метра (сантиметрах), изгибающие моменты  $M_\alpha$ ,  $M_\beta$  даны в килоньютонках, а сдвигающее усилие  $S$  — в килоньютонках на метр. Сплошные линии соответствуют точному численному решению системы (1.5), штрихпунктирные — приближенному решению в квадратурах [3, 5], а пунктирные — моментам в круглой кольцевой пластине. На фигуре видно, что результаты, отвечающие приближенному решению, у жестко заземленной винтовой кромки лежат между точным решением и решением для круглой кольцевой пластины. Однако на некотором удалении от этой кромки приближенное решение совпадает с точным.

Для геликоидальных оболочек, заданных уравнением (1.1) ( $f(\alpha) = a \operatorname{tg} \alpha$ ) и параметрами:  $L/D=1.14$ ,  $\alpha_1=20^\circ$ ,  $\alpha_2=70^\circ$  ( $\alpha_1=40^\circ$ ,  $\alpha_2=70^\circ$ ),  $\nu=0.3$ ,  $E=2 \cdot 10^5$  МПа ( $L$ ,  $D$  — шаг и внешний диаметр срединной поверхности), результаты численного интегрирования системы (1.5) в случае квазисимметричной деформации совпали с численным решением одномерной задачи [2]. Аналитическое решение одномерной задачи с использованием соотношений упругости Лява, а также численное решение той же задачи для более точного варианта соотношений упругости приведены в [2]. В последних зависимостях учтены слагаемые тангенциальной деформации для моментов и изгибной деформации для усилий. Оказалось, выполненным шестое уравнение равновесия, однако симметричные величины, аналогичные введенным В. В. Новожиловым, не использовались, так как задача решалась в перемещениях.

Сравнение аналитического и численного решений [6] показало, что разность между ними составляет  $\sim 13\%$  от второго решения, что выходит за рамки погрешности гипотез Кирхгофа. В той же работе высказано предположение, что применение варианта соотношений упругости, подобного предложенному В. В. Новожиловым (см. например, [4]), приведет к значительно меньшей погрешности, однако соответствующее решение не было представлено. Совпадение полученного решения с точным численным решением одномерной задачи [2] подтверждает, что использование уравнений равновесия для геликоидальных оболочек в симметричных величинах (при допущении  $M_{\alpha\beta} \approx M_{\beta\alpha} = H$ ) и соотношений упругости [4] в форме, предложенной В. В. Новожиловым, для расчета квазисимметричной деформации оболочки, жестко заземленной на внутреннем и свободной на внешнем винтовых краях, не содержит отмеченного в [6] несоответствия.

Поступила 5 III 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
2. Cohen J. W. On stress calculations in helicoidal shells and propeller blades. Delft, Holland, Waltman, 1955.
3. Михайловский Е. И., Колтунов С. Я. Квазисимметричная деформация подкрепленной геликоидальной оболочки. Тр. IX Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Л., «Судостроение», 1975.
4. Черныш К. Ф. Линейная теория оболочек, ч. 1, 2. Изд-во ЛГУ, 1962, 1964.
5. Колтунов С. Я. О напряженном состоянии в подкрепленных геликоидальных оболочках. В сб.: Интенсификация процессов и оборудования пищевых производств. Ленингр. технол. ин-т им. Ленсовета, 1977.
6. Cohen J. W. The inadequacy of the classical stress-strain relation for the right helicoidal shell. Proc. IUTAM. Sympos. Theory thin elastic shells. Delft, 1959, Amsterdam, 1960.