

ДЕЙСТВИЕ КРАЕВЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НАГРУЗОК  
НА АНИЗОТРОПНЫЕ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

В. Н. МАКСИМЕНКО

(Новосибирск)

Задача расчета изотропных оболочек при действии краевых сосредоточенных нагрузок рассматривалась многими авторами (см. обзоры [1, 2]). Асимптотические формулы для усилий и моментов в ортотропной круговой цилиндрической оболочке получены в [3].

Ниже эта задача рассматривается для анизотропных оболочек вращения. Решение ищется в рядах Фурье. Выделяется в замкнутом виде главная часть решения, исследуется сходимость полученных рядов, устанавливаются асимптотические формулы для неограниченно возрастающих величин. Приводятся результаты расчетов.

1. Рассмотрим анизотропную оболочку вращения, нагруженную периодической системой ( $T=2\pi/\omega$ ,  $\omega$  — частота) сосредоточенных сил, приложенных на свободном крае  $\alpha=0$ . Предположим, что оболочка неограничена в направлении  $\alpha$ . Предположим также, что главные радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  постоянны. За исходные взяты уравнения с большим показателем изменчивости, совпадающие по виду с уравнениями пологих оболочек [4]. Для случая цилиндрической оболочки ( $R_1=\infty$ ) построенные ниже решения становятся точными.

При отсутствии поверхностных сил решение системы уравнений теории пологих анизотропных оболочек сводится к решению следующего дифференциального уравнения:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\beta}\right)\Psi(\alpha, \beta) = 0 \quad (1.1)$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\beta}\right) = \sum_{j=0}^8 a_j \frac{\partial^8}{\partial\alpha^{8-j} \partial\beta^j} + a_9 \left[ \frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\lambda \frac{\partial^4}{\partial\alpha^2 \partial\beta^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} \right]$$

Здесь и ниже использованы обозначения [5].

Общее  $T$ -периодическое решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$\Psi(\alpha, \beta) = AE(\alpha, \beta), \quad E(\alpha, \beta) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(\alpha) \exp(ik\omega\beta) \quad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в (1.1), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения  $C_k(\alpha)$ . Решая эти уравнения, имеем

$$C_k(\alpha) = \sum_{v=1}^4 [C_{kv} \exp(ik\omega z_v^{(k)} \alpha) + C'_{kv} \exp(ik\omega \overline{z_v^{(k)}} \alpha)] \quad (a \geq 0) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (1.3)$$

$$C_0(\alpha) = P_3(\alpha) + \operatorname{Re} [C_0 \exp(iz_1^{(0)}\alpha) + C_0' \exp(\overline{iz_1^{(0)}}\alpha)], \quad P_3(\alpha) \sum_{j=0}^3 d_j \alpha^{3-j}$$

где  $z_\nu^{(k)}$  ( $\nu=1, 4$ ) — корни характеристического уравнения оператора  $L$  с положительными мнимыми частями [5].

Выражения для перемещений, усилий и деформаций в оболочке через функцию  $\Psi$  можно записать в следующем виде [5]:

$$\begin{aligned} u_j(\alpha, \beta) &= B_{j3} \Psi(\alpha, \beta) \quad (u=u_1, v=u_2, w=u_3) \quad (1.4) \\ T_1 &= \frac{\Omega}{R_2^5} \frac{\partial^2 \Delta_\lambda}{\partial \beta^2} \Psi(\alpha, \beta), \quad T_2 = \frac{\Omega}{R_2^5} \frac{\partial^2 \Delta_\lambda}{\partial \alpha^2} \Psi(\alpha, \beta) \\ S &= -\frac{\Omega}{R_2^5} \frac{\partial^2 \Delta_\lambda}{\partial \alpha \partial \beta} \Psi(\alpha, \beta), \quad \Delta_\lambda = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \lambda \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \\ M_i &= -\frac{D_{11} A_{22} \Omega}{R_2^6} \sum_{j=0}^6 m_{ij} \frac{\partial^6 \Psi}{\partial \alpha^{6-j} \partial \beta^j}, \quad H = M_3 \quad (i=\overline{1, 3}) \\ N_1 &= \frac{1}{R_2} \left( \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial \beta} \right) = -\frac{D_{11} A_{22} \Omega}{R_2^7} \sum_{j=0}^7 d_{1j} \frac{\partial^7 \Psi}{\partial \alpha^{7-j} \partial \beta^j} \\ N_2 &= \frac{1}{R_2} \left( \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_2}{\partial \beta} \right) = -\frac{D_{11} A_{22} \Omega}{R_2^7} \sum_{j=0}^7 d_{2j} \frac{\partial^7 \Psi}{\partial \alpha^{7-j} \partial \beta^j} \end{aligned}$$

С увеличением расстояния от нагруженного торца перемещения и напряжения должны убывать к нулю. Это условие будет выполнено, если в выражение (1.3) для  $C_k(\alpha)$  отбросить члены, содержащие  $C_{kv} \exp(ik\omega z_\nu^{(k)}\alpha)$  ( $k>0$ ),  $C_{kv} \exp(ik\omega z_\nu^{(k)}\alpha)$  ( $k<0$ ),  $C_0' \exp(iz_1^{(0)}\alpha)$  ( $k=0$ ), которые экспоненциально расдут при  $\alpha \rightarrow \infty$ . В выражении для  $C_0(\alpha)$  из (1.3) отбросим также полином  $P_3(\alpha)$ , не влияющий на определение возникающих усилий и деформаций. Имеем

$$C_0(\alpha) = \operatorname{Re} [C_0 \exp(iz_1^{(0)}\alpha)], \quad C_k(\alpha) = \sum_{\nu=1}^4 C_{k\nu} \exp(ik\omega z_\nu^{(k)}\alpha) \quad (1.5)$$

$$C_{-k}(\alpha) = \sum_{\nu=1}^4 C_{k\nu} \exp(-ik\omega \overline{z_\nu^{(k)}}\alpha) \quad (\alpha \geq 0, z_\nu^{(-k)} = \overline{z_\nu^{(k)}})$$

Рассмотрим некоторые случаи нагружения торца оболочки сосредоточенными усилиями.

2. Пусть оболочка нагружена на свободном торце  $\alpha=0$  периодической системой сосредоточенных перерезывающих сил  $P$ , приложенных в точках с координатами  $\beta_s = 2\pi s/\omega$  ( $s=0, 1, 2, \dots, \omega-1$ , фиг. 1, а).

В данном случае на свободном крае  $\alpha=0$  заданы следующие краевые условия:

$$M_1|_{\alpha=0} = 0, \quad T_1|_{\alpha=0} = 0, \quad S^*|_{\alpha=0} = (S+H/R_2)|_{\alpha=0} = 0 \quad (2.1)$$

$$N_1^*|_{\alpha=0} = \left( N_1 + \frac{1}{R_2} \frac{\partial H}{\partial \beta} \right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{P}{R_2 T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ik\omega\beta)$$

Подставляя выражение  $\Psi$  из (1.2) в (2.1) с учетом (1.4), (1.5), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения  $C_0, C_{kv}, C'_{-kv}$ :

$$\sum_{v=1}^4 p_j(z_v^{(k)}) C_v^{(k)} = \delta_{jk} \quad (2.2)$$

$$A = -\frac{PR_2^6}{\Omega A_{22} D_{11}}, \quad C_{kv} = \frac{1}{(ik\omega)^7} C_v^{(k)}, \quad C'_{-kv} = \bar{C}_{kv} \quad (v=1,4; k=1,2,3,\dots)$$

$$\operatorname{Re}[C_0 (iz_1^{(0)})^6] = 0, \quad \operatorname{Re}[C_0 (iz_1^{(0)})^7] = 1, \quad p_1(z) = \sum_{j=0}^6 m_{1j} z^{6-j}, \quad p_2(z) = z^2 + \lambda$$

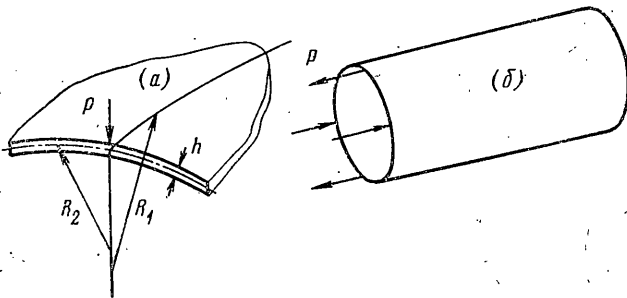
$$p_3(z) = \sum_{j=0}^6 m_{3j} z^{6-j} - \frac{a_9}{(k\omega)^2} z p_2(z), \quad p_4(z) = \sum_{j=0}^7 d_{1j} z^{7-j} + \sum_{j=0}^6 m_{3j} z^{6-j}$$

Решая систему (2.2), получим для искомой функции следующее представление:

$$E(\alpha, \beta) = \frac{1}{T} \left\{ C_0(\alpha) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(ik\omega)^7} \sum_{v=1}^4 C_v^{(k)} \exp(ik\omega(z_v^{(k)}\alpha + \beta)) \right] \right\} \quad (2.3)$$

$$C_v^{(k)} = A_{4v}^{(k)} / \Delta_k \quad (v=1,4; k=1,2,3,\dots), \quad C_0(\alpha) = -\sqrt{2} a_9^{-7/4} \operatorname{Re} \{ \exp(iz_1^{(0)}\alpha) \}$$

Здесь  $\Delta_k$  — определитель системы (2.2), а  $A_{4v}^{(k)}$  — алгебраическое дополнение к элементу  $p_4(z_v^{(k)})$  в определителе  $\Delta_k$ .



Фиг. 1

Главную часть решения  $\Psi$  дает решение  $\Psi_0$  соответствующего однородного оператора  $L_0$  из (1.1), содержащего лишь производные высших порядков, которое удовлетворяет уравнению

$$L(\partial/\partial\alpha, \partial/\partial\beta) \Psi_0(\alpha, \beta) = 0 \quad (2.4)$$

краевым условиям (2.1) и имеет вид

$$\Psi_0(\alpha, \beta) = A E_0(\alpha, \beta), \quad E_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k(\alpha) \exp(ik\omega\beta) \quad (k \neq 0)$$

$$g_k(\alpha) = \frac{1}{(ik\omega)^7} \sum_{v=1}^4 c_v \exp(ik\omega z_v \alpha) \quad (\alpha > 0) \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (2.5)$$

где  $c_v$  — решения системы

$$\sum_{v=1}^4 p_j^\circ(z_v) c_v = \delta_{jk}, \quad p_j^\circ(z) = p_j(z) \quad (j=1, 2, 4), \quad p_3^\circ(z) = \sum_{j=0}^6 m_{3j} z^{6-j} \quad (2.6)$$

Построенные ряды для  $E(\alpha, \beta)$  плохо сходятся в точках  $\alpha_s = 0$ ,  $\beta_s = 2\pi s/\omega$ . Поэтому имеет смысл выделить из  $E(\alpha, \beta)$  главную часть  $E_0(\alpha, \beta)$ , ряды для которой могут быть просуммированы и выписаны в замкнутом виде, например

$$\frac{\partial^7 E_0(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^{7-j} \partial \beta^j} = \frac{1}{T} \sum_{v=1}^4 \operatorname{Re} \left\{ c_v z_v^{7-j} \left[ i \operatorname{ctg} \frac{\omega(z_v \alpha + \beta)}{2} - 1 \right] \right\} \quad (2.7)$$

Оставшаяся часть решения будет представлена сходящимися рядами. Действительно, запишем решение  $E(\alpha, \beta)$  в виде

$$E(\alpha, \beta) = E_0(\alpha, \beta) + E_1(\alpha, \beta) \quad (2.8)$$

$$E_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{T} \sum_{h=-\infty}^{\infty} f_h(\alpha) \exp(ik\omega\beta), \quad f_h^{(\alpha)} = C_h(\alpha) - g_h^{(\alpha)}$$

Положим  $C_v^{(k)} - c_v = f_v^{(k)}$ ,  $p_i(z_v^{(k)}) - p_i^\circ(z_v) = A_{jv}^{(k)}$ . Из (2.2), (2.6), (2.7) с учетом результатов [6] имеем

$$A_{jv}^{(k)} = a_{jv}^{(k)}/(k\omega)^4 \quad (j=1, 2, 4), \quad A_{3v}^{(k)} = a_{3v}^{(k)}/(k\omega)^2, \quad |a_{jv}^{(k)}| \leq C \quad (v=1, 4) \quad (2.9)$$

где  $C$  — постоянная, независящая от  $k, j, v$ . С учетом (2.2), (2.6), (2.9) для определения  $f_v^{(k)}$  получаем следующую систему:

$$\sum_{v=1}^4 p_j(z_v^{(k)}) f_v^{(k)} = - \sum_{v=1}^4 A_{jv}^{(k)} c_v$$

Отсюда следует, что

$$|f_v^{(k)}| = |C_v^{(k)} - c_v| < A/(k\omega)^2 \quad (2.10)$$

начиная с некоторого  $k$  ( $A$  — постоянная, не зависящая от  $k, j, v$ ).

Таким образом, члены ряда для  $E_1(\alpha, \beta)$  убывают не медленнее, чем  $(k\omega)^{-9}$ , в то время как члены для  $E(\alpha, \beta)$  имеют порядок сходимости  $(k\omega)^{-7}$ .

Тангенциальные перемещения и прогиб представляются сходящимися рядами порядка  $(k\omega)^{-4}$ ,  $(k\omega)^{-3}$  соответственно.

Формулы для определения прогиба (1.5) можно записать так:

$$-\frac{TD_{11} w(\alpha, \beta)}{PR_2^2} = \frac{\sqrt{2}}{a^{3/4}} \operatorname{Re} \{ \exp(iz_1^{(0)} \alpha) \} +$$

$$+2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{(ik\omega)^3} \sum_{v=1}^4 C_v^{(k)} r(z_v^{(k)}) \exp[ik\omega(z_v^{(k)} \alpha + \beta)] \right\} \quad (2.11)$$

$$r(z) = \sum_{j=0}^4 b_j z^{4-j}, \quad B_{33} = \frac{\Omega A_{22}}{R_2^4} \sum_{j=0}^4 b_j \frac{\partial^4}{\partial \alpha^{4-j} \partial \beta^j}$$

Изгибающий момент  $M_2$  и поперечная сила  $N_1$  в окрестности точки приложения сосредоточенной нагрузки имеют соответственно логарифмическую особенность и особенность первого порядка. Выделяя главную (неограниченную) часть этих величин, при помощи формул (1.4), (2.3), (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \frac{TM_2}{P} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i\omega} \sum_{v=1}^4 c_v q_1(z_v) \ln \frac{1}{1 - \exp(i\omega(z_v \alpha + \beta))} \right\} + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{ik\omega} \sum_{v=1}^4 [C_v^{(k)} q_1(z_v^{(k)}) \exp(ik\omega z_v^{(k)} \alpha) - \right. \\ &\quad \left. - c_v q_1(z_v) \exp(ik\omega z_v \alpha)] \exp(ik\omega \beta) \right\} \\ \frac{TR_2 N_1}{P} &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{v=1}^4 q_2(z_v) \left[ i \operatorname{ctg} \frac{\omega(z_v \alpha + \beta)}{2} - 1 \right] \right\} + \\ &+ a_0^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\exp(iz_1^{(0)} \alpha)}{iz_1^{(0)}} \right\} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{v=1}^4 [C_v^{(k)} q_2(z_v^{(k)}) \exp(ik\omega z_v^{(k)} \alpha) - \right. \\ &\quad \left. - c_v q_2(z_v) \exp(ik\omega z_v \alpha)] \exp(ik\omega \beta) \right\} \\ q_1(z) &= \sum_{j=0}^6 m_{2j} z^{6-j}, \quad q_2(z) = \sum_{j=0}^7 d_{1j} z^{7-j} + \sum_{j=0}^6 m_{3j} z^{6-j} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Согласно оценке (2.10), ряды в разложении (2.12) для  $M_2$  и  $N_1$  имеют порядок сходимости  $(k\omega)^{-3}$ ,  $(k\omega)^{-2}$ , и поэтому при их вычислении можно ограничиться суммированием небольшого числа членов. Из (2.12) имеем асимптотические формулы для  $M_2$  и  $N_1$  в окрестности точки приложения сосредоточенной силы

$$\begin{aligned} \frac{M_2}{P} &\approx \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{v=1}^4 c_v q_1(z_v) \ln \left[ 2 \sin \frac{\omega(z_v \alpha + \beta)}{2} \right] \right\} \\ \frac{TR_2 N_1}{P} &\approx \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{v=1}^4 c_v q_2(z_v) \operatorname{ctg} \frac{\omega(z_v \alpha + \beta)}{2} \right\} \end{aligned}$$

Считая материал ортотропным, а оболочку круговой цилиндрической и изготовленной таким образом, что главные направления анизотропии

совпадают с осями координат, из (2.1)–(2.13) получаем, в частности, результаты работы [3].

3. Пусть оболочка нагружена на свободном торце  $\alpha=0$  периодической системой уравновешенных сосредоточенных сил  $P_s = (-1)^s P$ , приложенных в точках  $\beta_s = \pi s / \omega$  ( $s=0, 1, 2, \dots, \omega-1$ ) и действующих вдоль образующих (фиг. 1, б;  $\omega=2$ ). Тогда, рассматривая каждую нагрузку как  $\delta$ -функцию и раскладывая ее в ряд Фурье, получим

$$T^*(\beta) = \frac{P}{R_2 T} \sum \exp(ik\omega\beta) \quad (k=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots)$$

В данном случае на свободном крае  $\alpha=0$  заданы следующие краевые условия:

$$M_1|_{\alpha=0}=0, \quad S^*|_{\alpha=0} = \left( S + \frac{H}{R_2} \right) \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad T_1|_{\alpha=0} = T^*(\beta), \quad N_1^*|_{\alpha=0} = 0 \quad (3.1)$$

Подставляя выражение  $\Psi$  из (1.2) в (3.1), с учетом (1.5) получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения  $C_0, C_{kv}, C'_{-kv}$  ( $v=1, 4; k=1, 2, 3, \dots$ ). Решая ее, имеем

$$A = -\frac{PR_2^4}{\Omega}, \quad C_{kv} = \frac{1}{(ik\omega)^4} C_v^{(k)} = \frac{1}{(ik\omega)^4} \frac{A_{2v}^{(k)}}{\Delta_k} \quad (3.2)$$

$$E(\alpha, \beta) = \frac{2}{T} \sum_{h=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{(ik\omega)^4} \sum_{v=1}^4 C_v^{(h)} \exp[ik\omega(z_v^{(h)}\alpha + \beta)] \right\}$$

Здесь  $A_{2v}^{(k)}$  — алгебраическое дополнение к элементу  $p_2(z_v^{(k)})$  в определителе  $\Delta_k$  (2.3).

Аналогично построим главную часть решения  $E_0(\alpha, \beta)$ :

$$E_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{T} \sum_{h=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{(ik\omega)^4} \sum_{v=1}^4 c_v \exp[ik\omega(z_v^{(h)}\alpha + \beta)] \right\} \quad (3.3)$$

где  $c_v$  — решения системы (2.6) с правой частью  $\delta_{j2}$  ( $j=\overline{1, 4}$ ).

В данном случае прогиб становится неограниченным в окрестности точки приложения сосредоточенной силы. Действительно, выделяя главную часть, при помощи (1.4), (2.7) можем записать

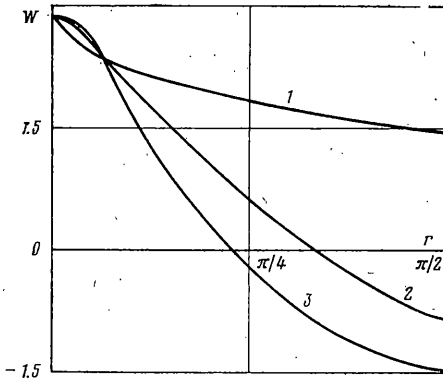
$$\begin{aligned} \frac{T w}{P A_{22}} &= \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{v=1}^4 \frac{r(z_v) c_v}{\sin[\omega(z_v \alpha + \beta)]} \right\} + \\ &+ 2 \sum_{h=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{v=1}^4 [r(z_v^{(h)}) C_v^{(h)} \exp(ik\omega z_v^{(h)} \alpha) - \right. \\ &\left. - r(z_v) c_v \exp(ik\omega z_v \alpha)] \exp(ik\omega \beta) \right\} \quad (3.4) \end{aligned}$$

Ряд в (3.4) имеет сходимость порядка  $(k\omega)^{-2}$ . Отбрасывая его, получаем асимптотическую формулу для прогиба в окрестности точки прило-

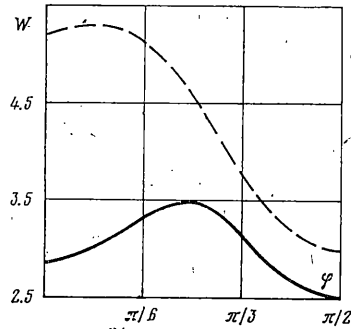
жения сосредоточенной силы. Результаты расчетов по асимптотической формуле (3.4) в случае перехода к изотропному материалу хорошо согласуются с экспериментальными данными [7], где эта задача рассматривалась для круговой изотропной цилиндрической оболочки.

Если оболочка нагружена на свободном торце  $\alpha=0$  периодической системой сосредоточенных сил величины  $P$ , действующих вдоль оси  $\alpha$ , то к решению  $E$ , затухающему на бесконечности, следует добавить решение, соответствующее равномерному растяжению (сжатию) оболочки.

Аналогично можно построить решения и вывести асимптотические формулы в случае, когда свободный торец оболочки  $\alpha=0$  загружен сосредоточенными моментами или силами, направленными вдоль оси  $\beta$ . Ниже



Фиг. 2



Фиг. 3

приводятся результаты вычислений безразмерных прогибов  $W = (wEh/P) \cdot 10^{-3}$  по формуле (2.11) от действия двух диаметрально противоположных и равных по величине радиальных сил, приложенных к свободному краю однослойной цилиндрической оболочки ( $R_1 = \infty$ ) из ортотропного материала с параметрами анизотропии:  $E_1/E_2 = 1.31$ ;  $E_1/G = 5.0$ ;  $\nu_1 = 0.09$  (сплошные линии) и  $E_1/E_2 = 3.0$ ;  $E_1/G = 6.24$ ;  $\nu_1 = 0.25$  (пунктир) для  $R_2/h = 10^2$  ( $h$  — толщина оболочки).

Распределение  $W$  вдоль линии  $\alpha$  (кривая 1),  $\beta$  (кривая 3) и  $\alpha = \beta$  (кривая 2) в зависимости от  $r = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$  представлено на фиг. 2. Здесь предполагается, что главное направление анизотропии  $E_1$  совпадает с осью  $\alpha$ .

Зависимость  $W(0,0)$  от угла  $\varphi$ , образованного направлением  $E_1$  с осью  $\alpha$ , приведена на фиг. 3.

Результаты расчетов по формуле (2.11) для слабо анизотропного материала хорошо согласуются с данными [8] для изотропных оболочек (если  $E_1/E_2 = 1$ ,  $E_1/G = 2.52$ ,  $\nu_1 = 0.25$ ,  $R_2/h = 10^2$ ,  $\omega = 2$  расхождение в  $W(0,0)$  менее 4%).

Поступила 16 VII 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чернышев Г. Н. О контактных задачах в теории оболочек. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, 1969, М., «Наука», 1970.
2. Жигалко Ю. П. Статика оболочек при силовых локальных воздействиях. В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Изд-во Казанск. ун-та, 1975, вып. 11.
3. Христенко А. С. О действии на ортотропную круговую цилиндрическую оболочку сосредоточенных сил и моментов, приложенных к свободному краю. Инж. ж. МТТ, 1968, № 4.

4. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
  5. Максименко В. Н., Фильштинский Л. А. Упругое поведение анизотропных оболочек под действием нагрузок, сосредоточенных на линиях. Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 5.
  6. Максименко В. Н., Фильштинский Л. А. Упругое равновесие анизотропных оболочек, подкрепленных ребрами жесткости. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
  7. Kildegaard A. Bending of a cylindrical shell subjected to axial loading. In: Theory of thin shells. IUTAM Sympos. Copenhagen 1967, Ed. by F. I. Niorson, Berlin. Springer-Verlag, 1969.
  8. Seidge P. On the bending of circular cylindrical shells by equal and equally spaced end radial shear forces and moments. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1961, vol. 28, No. 1.
-