МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1980

УДК 539.3

СООТНОШЕНИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ СВОБОДНЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Н. Н. РОГАЧЕВА

(Москва)

В предлагаемой работе для свободной пьезокерамической оболочки (т. е. оболочки, у которой все края свободны от закреплений) трехмерные уравнения электроупругости приближенно сводятся к двумерной теории оболочек.

Показано, что гипотезы Кирхгофа в случае свободной электроупругой оболочки могут привести к существенным погрешностям в уравнениях состояния для изгибающих моментов, в которые поэтому введены новые члены.

1. Рассмотрим произвольную пьезокерамическую оболочку постоянной толщины $2h$, равномерно поляризованную вдоль нормали к срединной поверхности.

Так как двумерные уравнения равновесия абсолютно точны, то будем строить только соотношения электроупругости.

Выберем триортогональную систему криволинейных координат следующим образом: координатные линии α_1, α_2 совпадают в срединной поверхности оболочки с линиями главных кривизн, а координата γ характеризует расстояние точек от срединной поверхности.

В этой системе координат дифференциальные уравнения пьезоупругости имеют вид [1, 2]:

уравнения пьезоэффекта

$$\tau_i=\frac{1}{s_{11}{}^E(1-\nu^2)}\left(\frac{a_j}{a_i}e_i+\nu e_j\right)-\frac{s_{13}{}^E}{s_{11}{}^E}\frac{1}{1-\nu}\frac{\tau_3}{a_i}-\frac{d_{31}}{s_{11}{}^E}\frac{a_j}{1-\nu}E_3$$

$$\tau_{ij}=\frac{1}{s_{66}{}^E}\left(\frac{a_i}{a_j}m_i+m_j\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial\gamma}=s_{13}{}^E\left(\frac{\tau_1}{a_2}+\frac{\tau_2}{a_1}\right)+s_{33}{}^E\frac{\tau_3}{a_1a_2}+d_{33}E_3$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial\gamma}+\frac{g_i}{a_i}=s_{44}{}^E\frac{\tau_{i3}}{a_j}+d_{15}E_i,\quad D_i=\varepsilon_{11}{}^TE_i+d_{15}\frac{\tau_{13}}{a_j}$$

$$D_3=\varepsilon_{33}{}^TE_3+d_{31}\left(\frac{\tau_1}{a_2}+\frac{\tau_2}{a_1}\right)+d_{33}\frac{\tau_3}{a_1a_2}$$

уравнения вынужденной электростатики диэлектриков

$$\frac{\partial D_3}{\partial\gamma}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial D_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial D_2}{\partial\alpha_2}+k_1D_2+k_2D_1=0$$

$$E_3=-\frac{\partial\psi}{\partial\gamma},\quad E_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} \tag{1.2}$$

$$e_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i}+k_iv_j+\frac{v_3}{R_i},\quad m_i=\frac{1}{A_j}\frac{\partial v_i}{\partial \alpha_j}-k_jv_j$$

$$g_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_i}-\frac{v_i}{R_i},\quad a_i=1+\frac{\gamma}{R_i}\quad k_i=\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}$$

Здесь и далее каждое равенство, содержащее индексы i и j, следует рассматривать как двойное: при $i=1$, $j=2$ получается одно уравнение, при $i=2$, $j=1$ — другое; v_i, v_3 — перемещения, A_i — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $\gamma=0$, а R_i — ее главные радиусы кривизны, $\overset{E}{s}_{11}$, $\overset{E}{s}_{13}$, $\overset{E}{s}_{33}$, $\overset{E}{s}_{44}$ — упругие податливости при нулевом электрическом поле, d_{31}, d_{15}, d_{33} — пьезоэлектрические проницаемости при нулевых напряжениях, ν — коэффициент Пуассона, E_i, E_3 — компоненты вектора напряженности электрического поля, D_i, D_3 — компоненты вектора электрической индукции.

В формулах (1.1), (1.2) для удобства дальнейших выкладок вместо компонентов симметричного тензора напряжений σ_i, σ_{ij}, σ_{i3}, σ_3 введены компоненты несимметричного тензора

$$\tau_i=\left(1+\frac{\gamma}{R_j}\right)\sigma_i,\qquad \tau_{ij}=\left(1+\frac{\gamma}{R_i}\right)\sigma_{ij}$$
$$\tau_{i3}=\tau_{3i}=\left(1+\frac{\gamma}{R_j}\right)\sigma_{i3},\quad \tau_3=\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\sigma_3 \tag{1.3}$$

Механические условия на лицевых поверхностях оболочки возьмем в виде

$$\tau_{i3}|_{\gamma=\pm h}=\pm q_i^{\pm},\qquad \tau_3|_{\gamma=\pm h}=\pm q_3^{\pm} \tag{1.4}$$

Чтобы получить условия на внешней поверхности $\gamma=+h$, надо в (1.4) оставить из двойных знаков только плюсы; условия на внутренней поверхности получаются, если взять минусы.

Кроме того, на лицевых поверхностях оболочки должны быть заданы электрические условия. Различные типы этих условий сформулированы в [2]. Например, в случае возбуждения колебаний электрическим полем на электродах, покрывающих оболочку, задается значение потенциала ψ:

$$\psi|_{\gamma=\pm h}=\pm V(t) \tag{1.5}$$

2. Для сведения трехмерных уравнений электроупругости к двумерным задачам теории пьезокерамических оболочек воспользуемся асимптотическим подходом, разработанным в [3] применительно к изотропным оболочкам.

Здесь будем строить соотношения электроупругости для основного напряженного состояния, т. е. для медленно меняющегося напряженно-деформированного состояния, которое имеет место вдали от линий искажения.

Как известно, в свободных изотропных оболочках под действием внешней нагрузки реализуется основное напряженное состояние, которое является чисто моментным. Ниже будет показано, что аналогичное электроупругое состояние имеет место для свободных пьезокерамических оболочек.

Соотношения электроупругости будем выводить с точностью до величин порядка $\varepsilon=O(\eta^1)$, где η — малый параметр, равный отношению полутолщины оболочки h к характерному размеру R.

Выполним обычное для асимптотического метода растяжение масштаба по координатным линиям

$$\alpha_i = R\eta^s \xi_i, \qquad \gamma = R\eta^1 \zeta \tag{2.1}$$

В дальнейшем будем считать, что дифференцирование по введенным таким образом координатам ξ_i и ζ не приводит к существенному увеличению искомых функций. Число s — показатель изменяемости напряженно-деформированного состояния — заключено в следующих пределах: $0 \leqslant s < {}^1/_2$. Это связано с тем, что с ростом s $(s \geqslant {}^1/_2)$ чисто моментное напряженное состояние перерождается в напряженное состояние с большой изменяемостью.

Примем для искомого электроупругого состояния следующее асимптотическое представление:

$$\frac{v_3}{s_{11}^E R} = v_{3*}, \quad \frac{v_i}{s_{11}^E R} = \eta^s v_{i*}, \quad (\tau_i, \tau_{ij}) = \eta^{1-2s}(\tau_{i*}, \tau_{ij*})$$

$$\tau_3 = \eta^{2-2s}\tau_{3*}, \quad \tau_{i3} = \eta^{2-3s}\tau_{i3*}, \quad q_i^{\pm} = \eta^{2-3s} q_{i*}^{\pm}, \quad q_3^{\pm} = \eta^{2-2s} q_{3*}^{\pm}$$

$$\frac{d_{31}}{s_{11}^E} E_3 = E_{3*}, \quad \frac{d_{31}}{s_{11}^E} E_i = \eta^{1-s} E_{i*}, \quad \frac{d_{31}}{s_{11}^E R}\psi = \eta^1 \psi_* \tag{2.2}$$

$$\frac{d_{31}}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T} D_3 = D_{3*}$$

$$\frac{d_{31}}{s_{11}^E \varepsilon_{11}^T} D_i = \eta^{1-s} D_{i*}, \quad \int_{-1}^{+1} \tau_{i*}\, d\zeta = O(\eta^{2-2s}), \quad O\left(\int_{-1}^{+1} \tau_{ij*}\, d\zeta\right) = O(\eta^{2-2s})$$

В дальнейшем будем считать, что все величины со звездочками имеют одинаковый асимптотический порядок (при $\eta \to 0$) и одинаковую размерность.

Подтверждением принятой асимптотики служат физические соображения и тот факт, что при помощи (2.2), как показано ниже, удается построить в исходном приближении непротиворечивую систему дифференциальных уравнений. Из последнего соотношения (2.2) видно, что в свободных оболочках напряжения, которыми определяются нормальные и сдвигающие усилия в η^{-1} раз меньше напряжений, которыми определяются моменты. Формулы (2.2) отражают известное явление большой деформативности незакрепленных оболочек — наибольшим напряжениям порядка η^{1-2s} соответствуют смещения v_{3*}, нормальные компоненты вектора напряженности электрического поля E_{3*} и вектора электрической индукции D_{3*} порядка единицы.

Введем в уравнения (1.1), (1.2) формулы (2.1), (2.2) и запишем их в следующем виде:

$$\eta^{1-2s}\tau_{i*} = \frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{a_j}{a_i} e_{i*} + \nu e_{j*}\right) - \eta^{2-2s}\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E}\frac{1}{1-\nu}\frac{\tau_{3*}}{a_i} - \frac{a_j}{1-\nu}E_{3*}$$

$$\eta^{1-2s}\tau_{ij*} = \frac{s_{11}^E}{s_{66}^E}\left(\frac{a_i}{a_j} m_{i*} + m_{j*}\right) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial v_{3*}}{\partial \zeta} = \eta^{2-2s}\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E}\left(\frac{\tau_{1*}}{a_2} + \frac{\tau_{2*}}{a_1}\right) + \eta^{3-2s}\frac{s_{33}^E}{s_{11}^E}\frac{\tau_{3*}}{a_1 a_2} + \eta^1 \frac{d_{33}}{d_{31}} E_{3*}$$

$$\frac{\partial v_{i*}}{\partial \zeta}+\eta^{1-2s}\frac{g_{i*}}{a_i}=\eta^{3-4s}\frac{s_{13}{}^E}{s_{11}{}^E}\frac{\tau_{i3*}}{a_j}+\eta^{2-2s}\frac{d_{15}}{d_{31}}E_{i*} \tag{2.4}$$

$$D_{i*}=E_{i*}+\eta^{1-2s}\frac{d_{31}d_{15}}{s_{11}{}^E\varepsilon_{11}{}^T}\frac{\tau_{i3*}}{a_j}$$

$$D_{3*}=E_{3*}+\eta^{1-2s}\frac{d_{31}{}^2}{s_{11}{}^E\varepsilon_{33}{}^T}\left(\frac{\tau_{1*}}{a_2}+\frac{\tau_{2*}}{a_1}\right)+\eta^{2-2s}\frac{d_{31}d_{33}}{\varepsilon_{33}{}^T s_{11}{}^E}\frac{\tau_{3*}}{a_1a_2} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial D_{3*}}{\partial \zeta}+\eta^{2-2s}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial D_{1*}}{\partial \xi_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial D_{2*}}{\partial \xi_2}\right)+\eta^{2-3s}R(k_1D_{2*}+k_2D_{1*})=0$$

$$E_{3*}=-\frac{\partial \psi_*}{\partial \zeta},\qquad E_{i*}=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial \psi_*}{\partial \xi_i} \tag{2.6}$$

$$e_{i*}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{i*}}{\partial \xi_i}+\eta^s k_iRv_{j*}+\frac{R}{R_i}v_{3*}$$

$$m_{i*}=\frac{1}{A_j}\frac{\partial v_{i*}}{\partial \xi_j}-\eta^sRk_jv_{j*},\qquad g_{i*}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{3*}}{\partial \xi_i}-\eta^{2s}\frac{R}{R_i}v_{i*} \tag{2.7}$$

$$a_i=1+\eta^1\zeta\frac{R}{R_i},\qquad \tau_{i3*}|_{\zeta=\pm1}=\pm q_{i*}{}^{\pm},\qquad \tau_{3*}|_{\zeta=\pm1}=\pm q_{3*}{}^{\pm}$$

Теорию рассматриваемого электроупругого состояния будем строить с точностью $\varepsilon=O(\eta^1)$. Так как в (2.3) все величины со звездочками одного порядка, а в левой части формул стоит малый множитель η^{1-2s}, то значит с некоторой точностью правые части равны нулю. Тогда, если напряжения определять через смещения с точностью η^1, то смещения и электрические величины следует определять с точностью до величин порядка η^{2-2s}.

Следуя [3], будем рассматривать уравнения (2.4), (2.6) как уравнения с независимой переменной ζ. Проинтегрируем их по ζ с точностью η^{2-2s}, в результате получим

$$v_{3*}=v_{3,0}+\eta^1\frac{d_{33}}{d_{31}}\int_0^\zeta E_{3*}\,d\zeta,\qquad v_{i*}=v_{i,0}+\eta^{1-2s}\int_0^\zeta g_{i*}\,d\zeta \tag{2.8}$$

$$D_{3*}=D_{3,0},\quad E_{i*}=E_{i,0}-\int_0^\zeta\frac{1}{A_i}\frac{\partial \psi_*}{\partial \xi_i}d\zeta$$

Учитывая (2.8), подставим выражения для e_{i*}, m_{i*}, g_{i*} из (2.7) в формулы (2.3). Продолжим процесс интегрирования по ζ соотношений (2.8) с учетом преобразованных формул (2.6), (2.7). Отбрасывая в полученных соотношениях малые в рамках принятой точности члены, будем иметь для искомых величин следующие разложения по координатам ζ:

$$\begin{gathered} v_{i*}=v_{i,0}+\eta^{1-2s}\zeta v_{i,1}\qquad (e_{i*},\ m_{i*},\ E_{3*})\\ v_{3*}=v_{3,0}+\eta^1\zeta v_{3,1},\qquad \tau_{i*}=\zeta\tau_{i,1}\ (\tau_{ij*}),\qquad g_{i*}=g_{i,0}\ (D_{3*})\\ \psi_*=\psi_{,0}+\zeta\psi_{,1}+\eta^{1-2s}\zeta^2\psi_{,2}\quad (E_{i*},\ D_{i*}),\qquad \tau_{i3*}=\tau_{i3,0}+\zeta^2\tau_{i3,2} \end{gathered} \tag{2.9}$$

Справа от формул в круглых скобках перечислены величины, для которых разложения по ζ имеют точно такой же вид. Из процесса построения разложений ясно, что все величины $v_{i,0}$, $v_{i,1}$, ..., $\tau_{i3,2}$ являются произвольными функциями от ξ_1, ξ_2. Величины с нижними числовыми индексами имеют одинаковый асимптотический порядок.

Для $v_{i,1}, \ldots, \tau_{i3,2}$ имеют место следующие формулы:

$$e_{i,0}=E_{3,0}, \qquad m_{i,0}+m_{j,0}=0$$

$$\tau_{i,1}=\frac{1}{1-\nu^2}\left[e_{i,1}+\nu e_{j,1}+\eta^{2s}\left(\frac{R}{R_j}-\frac{R}{R_i}\right)e_{i,0}\right]-\frac{1}{1-\nu}\left(E_{3,1}+\eta^{2s}\frac{R}{R_j}E_{3,0}\right)$$

$$v_{3,1}=\frac{d_{33}}{d_{31}}E_{3,0}, \quad v_{i,1}=-g_{i,0}, \quad D_{i,0}=E_{i,0}+\eta^{1-2s}\frac{d_{31}d_{15}}{s_{11}{}^E\varepsilon_{11}{}^T}\tau_{i3,0} \tag{2.10}$$

$$D_{i,1}=E_{i,1}, \qquad D_{i,2}=E_{i,2}+\frac{d_{31}d_{15}}{s_{11}{}^E\varepsilon_{11}{}^T}\tau_{i3,2}, \qquad D_{3,0}=E_{3,0}$$

$$E_{3,1}+\frac{d_{31}{}^2}{s_{11}{}^E\varepsilon_{33}{}^T}(\tau_{1,1}+\tau_{2,1})=0, \qquad E_{3,0}=-\psi_{,1}, \qquad E_{3,1}=-2\psi_{,2}$$

$$E_{i,n}=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_{,n}}{\partial\xi_i}, \qquad \tau_{i3,0}+\tau_{i3,2}=\frac{1}{2}(q_{i*}{}^+-q_{i*}{}^-) \qquad (n=0,1,2)$$

где $e_{i,0}$, $m_{i,0}$, $g_{i,0}$, $m_{i,1}$ определяются по формулам (2.7), в которых следует заменить звездочку на нулик или единицу соответственно, а для $e_{i,1}$ имеет место следующее выражение:

$$e_{i,1}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{i,1}}{\partial\xi_i}+\eta^s Rk_i v_{j,1}+\eta^{2s}\frac{R}{R_i}v_{3,1}$$

Здесь выписаны только те уравнения, которые нужны для вывода соотношений пьезоупругости. Если формулы (2.10) дополнить уравнениями равновесия и недостающими условиями для механических и электрических величин на лицевых поверхностях, то получим замкнутую систему дифференциальных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных.

3. Перейдем в полученных формулах к обозначениям, принятым в теории оболочек. Перемещения срединной поверхности оболочки u_i, w связаны с трехмерными перемещениями v_i, v_3 следующим образом: $u_i=v_i$, $w=-v_3$ при $\gamma=0$.

Перерезывающие усилия и моменты теории оболочек через компоненты несимметричного тензора определяются формулами

$$N_i=-\int_{-h}^{+h}\tau_{i3}\,d\gamma, \qquad G_i=-\int_{-h}^{-h}\tau_i\gamma\,d\gamma, \qquad H_{ij}=\int_{-h}^{+h}\tau_{ij}\gamma\,d\gamma$$

Подставим сюда соотношения (2.9), выполнив интегрирование, получим

$$N_i=-\eta^{2-3s}2h\left(\tau_{i3,0}+\frac{1}{3}\tau_{i3,2}\right), \quad G_i=-\eta^{1-3s}\frac{2h^2}{3}\tau_{i,1}, \quad H_{ij}=\eta^{1-2s}\frac{2h^2}{3}\tau_{ij,1} \tag{3.1}$$

Выразим $e_{i,0}$, $m_{i,0}$, $g_{i,0}$, $v_{i,1}$, $v_{3,1}$ через перемещения срединной поверхности, а затем через компоненты деформации срединной поверхности [3] и компоненту E_3 вектора напряженности электрического поля

$$e_{i,0}=\frac{\varepsilon_i}{s_{11}{}^E}, \qquad m_{i,0}=\frac{\omega_j}{s_{11}{}^E}, \qquad g_{i,0}=\eta^s\frac{\gamma_i}{s_{11}{}^E},$$

$$v_{i,1} = -\frac{\eta^s}{s_{11}^E}\gamma_i, \quad v_{3,1} = \frac{d_{33}}{s_{11}^E}E_3^{(0)} \tag{3.2}$$

Для электрических величин с учетом (2.1), (2.9) запишем разложения по γ:

$$E_3 = E_3^{(0)} + \gamma E_3^{(1)}, \quad E_i = E_i^{(0)} + \gamma E_i^{(1)} + \gamma^2 E_i^{(2)} \tag{3.3}$$
$$D_3 = D_3^{(0)}, \quad D_i = D_i^{(0)} + \gamma D_i^{(1)} + \gamma^2 D_i^{(2)}; \quad \psi = \psi^{(0)} + \gamma\psi^{(1)} + \gamma^2\psi^{(2)}$$

Члены этих разложений связаны с соответствующими величинами формул (2.2), (2.9) следующим образом:

$$E_{3,0} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E}E_3^{(0)}, \quad E_{3,1} = \eta^{-1+2s}h\frac{d_{31}}{s_{11}^E}E_3^{(1)}, \quad D_{3,0} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E\varepsilon_{33}^T}D_3^{(0)}$$
$$E_{i,0} = \eta^{-1+s}\frac{d_{31}}{s_{11}^E}E_i^{(0)}, \quad E_{i,2} = \eta^{-2+3s}h^2\frac{d_{31}}{s_{11}^E}E_i^{(2)}, \quad D_{i,0} = \eta^{-1+s}\frac{d_{31}}{s_{11}^E\varepsilon_{11}^T}D_i^{(0)} \tag{3.4}$$
$$D_{i,1} = \eta^{-1+s}\frac{d_{31}}{s_{11}^E\varepsilon_{11}^T}D_i^{(1)}, \quad D_{i,2} = \eta^{-2+3s}h^2\frac{d_{31}}{s_{11}^E\varepsilon_{11}^T}D_i^{(2)}$$

Внесем (2.10), (3.2) в две последние формулы (3.1) и в результате получим соотношения электроупругости для моментов

$$G_i = -\frac{2h^3}{3s_{11}^E(1-\nu^2)}(\varkappa_i + \nu\varkappa_j) + \frac{2h^3}{3}\frac{d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu)}E_3^{(1)} -$$
$$-\left\{\frac{2h^3(d_{33}-d_{31})}{3s_{11}^E(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{R_i} + \frac{\nu}{R_j}\right)E_3^{(0)}\right\}, \quad H_{ij} = \frac{2h^3}{3s_{66}^E}\tau \tag{3.5}$$

Заключенный в фигурные скобки член порядка η^{2s} по сравнению с главными членами соотношения упругости появляется в результате учета удлинения нормального элемента, поэтому при малых значениях показателя изменяемости s он может дать существенный вклад; с ростом s его влияние уменьшается. Кроме того, роль поправочного члена существенно зависит от разности пьезоэлектрических проницаемостей d_{33} и d_{31}; если их значения близки, то вклад от введенного члена мал.

Вместо соотношений упругости для усилий, так же как и в обычной теории оболочек, из первых двух формул (2.10) получим приближенные равенства

$$\varepsilon_i = d_{31}E_3^{(0)}, \quad \omega = 0 \tag{3.6}$$

Остальные соотношения электроупругости с учетом (2.10), (3.1), (3.3), (3.4) примут вид

$$E_3^{(1)} = \frac{d_{31}}{\varepsilon_{33}^T}\frac{3}{2h^3}(G_1 + G_2) \tag{3.7}$$

$$D_3^{(0)} = \varepsilon_{33}^T E_3^{(0)}, \quad D_i^{(0)} = \varepsilon_{11}^T E_i^{(0)} - \frac{3d_{15}}{4h}\left(N_i + \frac{1}{3}Y_i\right), \quad D_i^{(1)} = \varepsilon_{11}^T E_i^{(1)}$$
$$D_i^{(2)} = \varepsilon_{11}^T E_i^{(2)} + \frac{3d_{15}}{4h^3}(N_i + Y_i), \quad Y_i = h(q_i^+ - q_i^-) \tag{3.8}$$

Уравнения электростатики запишутся в виде

$$E_3^{(0)}=-\psi^{(1)}, \quad E_3^{(1)}=-2\psi^{(2)}, \quad E_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi^{(n)}}{\partial\alpha_i} \quad (n=0,1,2) \tag{3.9}$$

Следуя [4], из соотношения упругости для изгибающих моментов (3.5) с помощью (3.7) можно исключить $E_3^{(1)}$, в результате получим

$$G_i=-D(\varkappa_i+\nu_0\varkappa_j)-\left\{D(d_{33}-d_{31})\left(\frac{1}{R_i}+\frac{\nu_0}{R_j}\right)E_3^{(0)}\right\} \tag{3.10}$$

$$D=\frac{2h^3}{3s_{11}^E(1-\nu^2)}\left(1+\frac{1+\nu}{2}\frac{k_\rho^2}{1-k_\rho^2}\right), \quad \nu_0=\frac{2-(1-\nu)k_\rho^2}{2(1-k_\rho^2)}$$

$$k_\rho^2=[2/(1-\nu)](d_{31}/s_{11}^E\varepsilon_{33}^T)$$

Здесь D — жесткость оболочки на изгиб, а ν_0 — «приведенный» коэффициент Пуассона.

Рассмотрим случай активного электрического нагружения. Так как на электродах, покрывающих лицевые поверхности оболочки, задана разность потенциалов (1.5), то с помощью (3.9) можно найти $E_3^{(0)}=-V$, где V — функция только времени.

Формулы (3.6), (3.10), в которых учтено найденное значение $E_3^{(0)}$, вместе с уравнениями равновесия, формулами деформации — смещения составляют полную систему дифференциальных уравнений. Интегрирование системы выполняется таким же образом, как и в случае свободных изотропных оболочек.

Предложенная теория чисто моментного напряженно-деформированного состояния свободных электроупругих оболочек является обобщением теории чисто моментного напряженного состояния изотропных оболочек.

Поступила 10 XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Физическая акустика, т. 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. (Под ред. У. Мэзона.) М., «Мир», 1966.
2. *Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических тел. В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, вып. 15. Киев, «Наукова думка», 1975.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976.
4. *Борисейко В. А., Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Соотношения электроупругости для пьезокерамических оболочек вращения. Прикл. механ., 1976, т. 12, № 2.