МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1980

УДК 539.3

К АСИМПТОТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА ДЕФОРМАЦИИ В ТВЕРДОЙ СРЕДЕ

Ю. К. ЭНГЕЛЬБРЕХТ

(Таллин)

Рассматриваются двумерные волновые процессы деформации в твердой среде с учетом физической и геометрической нелинейностей, а также с учетом слабых вязких эффектов (модель Фойгта, модель стандартного вязкоупругого тела). Строятся двумерные уравнения переноса для продольных волн и исследуется искажение волны (импульса конечной длины) в области гладких решений. Исследуется поведение поперечных волн в двумерном случае. Применением метода сингулярных поверхностей к двумерному уравнению переноса проводится асимптотический анализ разрывного решения и выводится уравнение, описывающее поведение разрыва в двумерном пучке для моделей нелинейно-упругого и нелинейно-вязкоупругого тел.

Асимптотика одномерных переходных волновых процессов представлена во многих работах, например [1–6], но двумерные волновые процессы рассмотрены главным образом в рамках нелинейной акустики для газов или жидкостей [7–9]. Для твердой среды задача построения уравнений переноса рассмотрена в [10, 11]. Ниже приводится в асимптотическом приближении детальный анализ двумерного волнового процесса в областях непрерывного и разрывного решений.

1. Рассмотрим процесс деформирования твердой среды согласно математической модели [12] в декартовых координатах

$$
\begin{gathered}
c_0^2\left[1+3(1+m_0)\frac{\partial U_1}{\partial X_1}\right]\frac{\partial^2 U_1}{\partial X_1^2}+c_1^2\left(1+m_1\frac{\partial U_1}{\partial X_1}\right)\frac{\partial^2 U_1}{\partial X_2^2}+c_2^2\left(1+m_2\frac{\partial U_1}{\partial X_1}\right)\frac{\partial^2 U_2}{\partial X_1\,\partial X_2}+\\
+n_0\frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1^2\,\partial t}+n_1\frac{\partial^3 U_1}{\partial X_2^2\,\partial t}+n_1\frac{\partial^3 U_2}{\partial X_1\,\partial X_2\,\partial t}-\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}=0\\
c_2^2\left(1+m_2\frac{\partial U_1}{\partial X_1}\right)\frac{\partial^2 U_1}{\partial X_1\partial X_2}+c_0^2\left(1+m_3\frac{\partial U_1}{\partial X_1}\right)\frac{\partial^2 U_2}{\partial X_2^2}+\\
+c_1^2\left(1+m_1\frac{\partial U_1}{\partial X_1}\right)\frac{\partial^2 U_2}{\partial X_1^2}+n_1\frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1\partial X_2\partial t}+n_1\frac{\partial^3 U_2}{\partial X_1^2\partial t}+\\
+n_0\frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2^2\partial t}-\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}=0
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

$$c_0^2=(\lambda+2\mu)\rho_0^{-1},\quad c_1^2=\mu\rho_0^{-1},\quad c_2^2=(\lambda+\mu)\rho_0^{-1}$$

$$m_0=(\nu_1+\nu_2+\nu_3)\,(^1/_2\lambda+\mu)^{-1},\quad m_1=(\lambda+2\mu+\nu_2+{}^3/_2\nu_3)\,\mu^{-1}$$

$$m_2=(\lambda+\mu+6\nu_1+3\nu_2+{}^3/_2\nu_3)\,(\lambda+\mu)^{-1},\quad m_3=(\lambda+6\nu_1+2\nu_2)\,(\lambda+2\mu)^{-1}$$

Здесь λ и μ — параметры Ламэ, ν_i ($i=1,\ 2,\ 3$) — модули упругости третьего порядка, n_0, n_1 — кинематические модули вязкости, остальные обозначения очевидны. Для более компактной записи далее будем использовать матричную форму уравнений (1.1).

Введем в рассмотрение векторы $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ согласно

$$\mathbf{V}=\begin{Vmatrix}\partial U_1/\partial t\\ \partial U_1/\partial X_1\\ \partial U_1/\partial X_2\end{Vmatrix},\qquad \mathbf{W}=\begin{Vmatrix}\partial U_2/\partial t\\ \partial U_2/\partial X_2\\ \partial U_2/\partial X_1\end{Vmatrix}.$$

Тогда (1.1) записывается в виде

$$\begin{gathered}I\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+P_1\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial X_1}+P_2\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial X_2}+Q_2\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial X_2}+\\ +G_{10}\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial X_1\partial t}+G_{20}\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial X_2\partial t}+F_{10}\frac{\partial^2\mathbf{W}}{\partial X_1\partial t}=0\\ I\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}+R_1\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial X_1}+R_2\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial X_2}+S_2\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial X_2}+\\ +E_{10}\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial X_1\partial t}+D_{10}\frac{\partial^2\mathbf{W}}{\partial X_1\partial t}+D_{20}\frac{\partial^2\mathbf{W}}{\partial X_2\partial t}=0\end{gathered}\tag{1.2}$$

где I — единичная матрица, а остальные матрицы легко определяемы из коэффициентов уравнений (1.1). Для системы (1.2) ставится краевая задача

$$\mathbf{V}(X_1,\ X_2,\ t)\,|_{X_1=0}=\varphi(X_2,\ t),\quad \mathbf{W}(X_1,\ X_2,\ t)\,|_{X_1=0}=\psi(X_2,\ t)\tag{1.3}$$

с нулевыми начальными условиями. Параллельно модели (1.1), в которой вязкость учитывается согласно модели Фойгта, будет рассмотрен также случай стандартного вязкоупругого тела. В этом случае ядро имеет вид

$$G(t-\tau)=\varepsilon_1(\lambda+2\mu)\exp[-(t-\tau)\tau_0^{-1}]$$

где ε_1 — безразмерный параметр, определяющий различие между равновесной (c_{0e}) и мгновенной (c_{0t}) скоростями ($\varepsilon_1=c_{0t}^2c_{0e}^{-2}-1$) и τ_0 — время релаксации.

2. Построим асимптотическое уравнение переноса для продольной волны в направлении X_1, при этом генерируется или продольная деформация ($\partial U_1/\partial X_1$) или скорость ($\partial U_1/\partial t$). Согласно лучевому методу предполагаем

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_0+\varepsilon\mathbf{V}_1+\ldots,\quad \mathbf{W}=\varepsilon^n(\mathbf{W}_0+\varepsilon\mathbf{W}_1+\ldots)\tag{2.1}$$

где ε — малый параметр. В задачах теории упругости, имея в виду основные предпосылки при построении уравнений движения, в качестве малого параметра можно взять амплитуду генерируемой деформации. Далее при введении безразмерных величин параметру ε будет дан конкретный вид. Лучевые координаты определяются из линейной ассоциированной задачи [10, 11] в виде $\xi=c_0t-X_1$, $\tau_1=\varepsilon X_1$, $\tau_2=\varepsilon^m X_2$.

Имея в виду слабую вязкость ($G_{i0}\sim F_{10}\sim E_{10}\sim D_{i0}\sim O(\varepsilon)$, $i=1,\ 2$) с учетом разложения (2.1), а также вытекающего из него разложения коэффициентов-матриц, система (1.2) получит более простой вид. Принимаем $m=n={}^1/_2$; тогда с точностью ε^0, ε^1 имеем

$$\begin{gathered}(Ic_0-P_{10})\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\xi}=0\\ \varepsilon_0(Ic_0-P_{10})\frac{\partial\mathbf{V}_1}{\partial\xi}+\varepsilon P_{10}\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\tau_1}-P_{11}\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\xi}+\varepsilon^{1/2}P_{20}\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\tau_2}+\end{gathered}\tag{2.2}$$

$$+\varepsilon Q_2\frac{\partial \mathbf{W}_0}{\partial \tau_2}-c_0G_{10}\frac{\partial^2\mathbf{V}_0}{\partial \xi^2}=0 \tag{2.3}$$

$$\varepsilon^{1/2}(Ic_0-R_{10})\frac{\partial \mathbf{W}_0}{\partial \xi}+\varepsilon^{1/2}S_{20}\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial \tau_2}-E_{10}c_1\frac{\partial^2\mathbf{V}_0}{\partial \xi^2}=0 \tag{2.4}$$

Здесь индексы 0, 1 у коэффициентов определяют разложения, аналогичные разложению (2.1). Отметим, что в случае жидкой среды $m={}^1/_2$, $n={}^3/_2$ [7, 10]. Теперь из (2.2) вытекает

$$\mathbf{V}_0=\alpha(\xi, \tau_1, \tau_2)\,\mathbf{r}_1, \qquad \mathbf{r}_1=\left\|\begin{matrix}1\\ -c_0^{-1}\\ 0\end{matrix}\right\|$$

где $\mathbf{r}_1$ — правый собственный вектор матрицы P_{10}, а из (2.3) и (2.4) вытекает уравнение переноса первого порядка относительно амплитудного фактора

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \xi}R(\alpha)=c_2{}^2c_0{}^{-2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial \tau_2{}^2}\\ R(\alpha)=\frac{\partial \alpha}{\partial \tau_1}+\frac{3(1+m_0)}{2\varepsilon c_0}\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial \xi}-\frac{n_0}{2\varepsilon c_0}\frac{\partial^2\alpha}{\partial \xi^2}\end{gathered} \tag{2.5}$$

которое описывает распространение пучка продольной волны в твердой среде с точностью первого асимптотического приближения согласно лучевому методу. Уравнение (2.5) аналогично уравнению Заболоцкой — Хохлова в жидкой среде [7] записано в форме, характеризующей характер процесса. Правая часть уравнения (2.5) описывает поперечное расхождение пучка, а левая содержит главный волновой оператор $R(\alpha)$ вдоль оси пучка, учитывающий структуру уравнения состояния. В случае стандартной вязкоупругой среды главный волновой оператор имеет вид

$$R(\alpha)=\frac{\partial \alpha}{\partial \tau_1}+\frac{3(1+m_0)}{2\varepsilon c_0}\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial \xi_e}-\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \xi_e}\int\limits_0^{\xi_e}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\exp\left(-\frac{\xi_e-y}{c_{0e}\tau_0}\right)dy$$

или

$$\begin{gathered}R(\alpha)=\frac{\partial \alpha}{\partial \tau_1}+\frac{3(1+m_0)}{2\varepsilon c_0}\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial \xi_i}+\\ +\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon\tau_0c_{0i}(1+\varepsilon_1)}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\int\limits_0^{\xi_i}\alpha\exp\left(-\frac{\xi_i-y}{c_{0i}\tau_0}\right)dy\end{gathered}$$

выписанные на основе равновесной и мгновенной скоростей соответственно, $\xi_k=c_{0k}t-X_1$, $k=i, e$. В случае других уравнений состояния твердой среды уравнение (2.5) остается в силе, а изменяется структура оператора $R(\alpha)$.

Уравнение (2.5) решается при начальном условии $\alpha(\xi, \tau_1, \tau_2)|_{\tau_1=0}=\mathbf{l}_1\varphi(\xi, \tau_2)$, $\mathbf{l}_1=\|0.5\ \ -0.5c_0\ \ 0\|$, где $\mathbf{l}_1$ — левый собственный вектор матрицы P_{01}, и принимается $\mathbf{l}_1\cdot\mathbf{r}_1=1$. При известном α в области его существования из (2.4) определяется также вектор

$$\mathbf{W}_0=\mathbf{M}f(\alpha), \quad f(\alpha)=\int\limits_0^{\xi}\frac{\partial \alpha}{\partial \tau_2}d\xi, \quad \mathbf{M}=(Ic_0-R_{10})^{-1}S_{20}\mathbf{r}_1$$

Согласно проделанному асимптотическому анализу определяются внутри области продольной волны в направлении X_1 следующие компоненты поля деформации:

$$\partial U_{10}/\partial t=\alpha,\quad \partial U_{10}/\partial X_1=-c_0^{-1}\alpha,\quad \partial U_{20}/\partial t=-f(\alpha),\quad \partial U_{20}/\partial X_2=c_0^{-1}f(\alpha) \tag{2.6}$$

Структура системы (1.2) не позволяет прямо определить $\partial U_1/\partial X_2$ и $\partial U_2/\partial X_1$, в этом заключается и недостаток данного асимптотического подхода.

В случае цилиндрической симметрии (ось X_1 совпадает с осью пучка, ось X_2 является радиальной) вместо (2.5) получим

$$\frac{\partial}{\partial\xi}R(\alpha)=c_2^2c_0^{-1}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\tau_2^2}+\frac{1}{\tau_2}\frac{\partial\alpha}{\partial\tau_2}\right)$$

3. Построим асимптотическое уравнение переноса для поперечной волны в направлении X_1. Известно [13], что с точностью модели (1.1), с учетом модулей упругости третьего порядка поперечная волна не подвергается подобно продольной волне искажению, обусловленному нелинейными эффектами, и наблюдается лишь нелинейное взаимодействие с продольной волной, если последняя существует. Поэтому целесообразно в первую очередь исследовать линейную модель упругой среды для выявления эффекта дифракционной расходимости. Для поворота $\omega={}^1/_2(\partial U_2/\partial X_1-\partial U_1/\partial X_2)$, можно написать также волновое уравнение [14]:

$$c_1^2\frac{\partial^2\omega}{\partial X_1^2}+c_1^2\frac{\partial^2\omega}{\partial X_2^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=0$$

Следуя вышеизложенной методике, получим уравнение переноса для поперечной волны с учетом переменных

$$\xi=c_1t-X_1,\quad \tau_1=\varepsilon X_1,\quad \tau_2=\varepsilon^m X_2 \tag{3.1}$$

в виде ($m=1$):

$$R(\alpha)=\frac{\partial\alpha}{\partial\tau_1}=0,\quad \begin{Vmatrix}\partial\omega/\partial t\\ \partial\omega/\partial X_1\\ \partial\omega/\partial X_2\end{Vmatrix}=\alpha\begin{Vmatrix}1\\ -c_1^{-1}\\ 0\end{Vmatrix}$$

т. е. даже в случае равной изменяемости вдоль направлений X_1, X_2 поперечная волна не подвергается дифракционному расхождению.

Так как компоненты деформации $\partial U_1/\partial X_2$ и $\partial U_2/\partial X_1$, вообще говоря, не разделимы, то построим теперь уравнение переноса для одной компоненты сдвиговой деформации. Пусть при $X_1=0$ генерируется $\partial U_2/\partial X_1\neq 0$. Примем

$$\mathbf{V}=\varepsilon^n(\mathbf{V}_0+\varepsilon\mathbf{V}_1+\ldots),\quad \mathbf{W}=\mathbf{W}_0+\varepsilon\mathbf{W}_1+\ldots$$

и в переменных (3.1) получим теперь при $m=n=1$:

$$(Ic_1-R_{10})\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\xi}=0 \tag{3.2}$$

$$\varepsilon(Ic_1-R_{10})\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial\xi}+\varepsilon R_{10}\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\tau_1}-R_{11}\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\xi}+\varepsilon R_{20}\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\tau_2}-$$
$$-\varepsilon S_{20}\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\tau_1}-D_{10}c_1\frac{\partial^2\mathbf{W}_0}{\partial\xi^2}=0 \tag{3.3}$$

$$\varepsilon(Ic_1-P_{10})\frac{\partial\mathbf{V}_0}{\partial\xi}+\varepsilon Q_{20}\frac{\partial\mathbf{W}_0}{\partial\tau_2}-F_{10}c_1\frac{\partial^2\mathbf{W}_0}{\partial\xi^2}=0 \tag{3.4}$$

Из (3.2) вытекает

$$\mathbf{W}_0=\alpha\mathbf{r}_2,\qquad \mathbf{r}_2=\begin{Vmatrix}1\\0\\-c_1^{-1}\end{Vmatrix}$$

и из (3.3), (3.4) следует уравнение переноса первого порядка в виде

$$R(\alpha)=\frac{\partial\alpha}{\partial\tau_1}-\frac{n_1}{2\varepsilon c_1}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi^2}=0 \tag{3.5}$$

Все члены в уравнениях (3.3), (3.4), отвечающие за дифракционную расходимость, оказались вырожденными и согласно первому приближению лучевого метода поперечная волна описывается одномерным уравнением. Начальное условие для уравнения (3.5) вытекает из (1.3) в виде $\alpha(\xi,\tau_1,\tau_2)|_{\tau_1=0}=\mathbf{l}_2\boldsymbol{\psi}_2(\xi,\tau_2)$, $\mathbf{l}_2=\|0.5\ \ 0\ \ -0.5c_1\|$.

Из (3.4) следует, что вектор $\mathbf{V}_0$ определяется в виде

$$\mathbf{V}_0=\mathbf{N}f(\alpha),\quad f(\alpha)=\int\limits_0^\xi\frac{\partial\alpha}{\partial\tau_2}d\xi,\quad \mathbf{N}=(Ic_1-P_{10})^{-1}Q_{20}\mathbf{r}_2$$

В результате будем иметь $\partial U_{10}/\partial t=f(\alpha)$, $\partial U_{10}/\partial X_1=-c_1^{-1}f(\alpha)$.

4. Рассмотрим решение уравнения переноса продольной волны (2.5). Для более компактной записи введем в рассмотрение безразмерные переменные по формулам

$$\beta=\alpha\alpha_0^{-1},\quad \zeta=\xi\tau_c^{-1},\quad \eta=\tau_2b^{-1},\quad \sigma={}^1\!/_2\tau_1\tau_c^{-1},\quad \varepsilon=3|1+m_0|\alpha_0c_0^{-1},$$

которые позволяют определить параметры, управляющие процессом в компактной безразмерной форме. Здесь α_0 — максимальная амплитуда импульса, τ_c — характерная длина импульса, b — эффективная полуширина пучка. В [7] представлено аналитическое решение уравнения (2.5) для случая $R(\alpha)=\partial\alpha/\partial\tau_1$ при начальном условии $\beta(\zeta,\sigma,\eta)|_{\sigma=0}=\exp(-\eta^2)\sin\zeta$.

Решение имеет вид

$$\begin{gathered}\beta=\exp(-a\eta^2)a^{1/4}\sin(\zeta+\delta),\quad a=(1+d^2)^{-1}\\ \delta=-ad\eta^2+{}^1\!/_2\operatorname{arc\,tg}d,\quad d=4\Delta\sigma,\quad \Delta=c_2^2c_0^{-2}\tau_c^2b^{-2}\end{gathered} \tag{4.1}$$

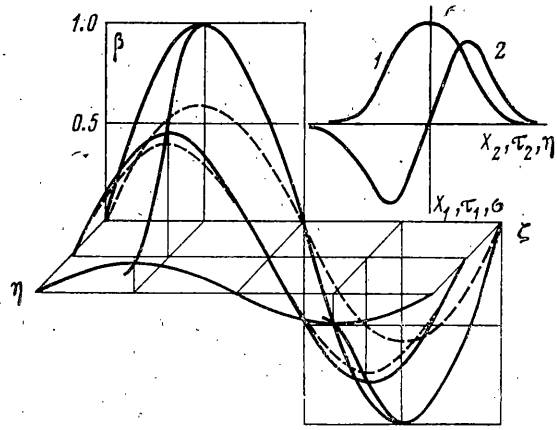
Это решение справедливо в начальной стадии процесса, когда нелинейность еще не сказывается. Оно описывает увеличение ширины пучка (множитель $a^{1/2}$), уменьшение амплитуды (множитель $a^{1/4}$), изменение фазы (сдвиг δ). Увеличение ширины пучка и уменьшение амплитуды имеют монотонный характер при росте пространственной координаты σ. На оси пучка $\eta=0$ выполняется $\delta>0$ и величина его ограничена $\delta\leqslant{}^1\!/_4\pi$. В области $0<\eta<0.5^{1/2}$ возможно появление максимума сдвига при

$$\sigma=\Delta^{-1}\left[-\frac{4}{3}+\left(\frac{16}{9}-\frac{2\eta^2-1}{96\eta^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2}$$

а в области $\eta>0.5^{1/2}$ имеем $\delta<0$ и его абсолютное значение увеличивается монотонно. На основе решения (4.1) проанализируем также генерацию других компонент поля деформации, согласно соотношениям (2.6). Если обозначить $\mathbf{W}_0=\gamma\mathbf{r}_1$, то для γ получим, согласно (2.6), формулу

$$\gamma=2\alpha_0\tau_c\eta a^{5/4}b^{-1}\exp(-a\eta^2)\left(2\sin^2{}^1\!/_2(\zeta+\delta)+d\sin(\zeta+\delta)\right)$$

На фиг. 1 представлена схема поперечного распределения импульсов; кривая *1* соответствует вектору $\mathbf{V}_0$, кривая *2* — вектору $\mathbf{W}_0$. При $\eta=0$ имеем $\gamma=0$ и γ достигает максимума при $\eta=\pm(2a)^{-1/2}$ (при $X_1=0$ имеем $\eta=\pm0.5^{1/2}$). Первая часть импульса γ, имеющая множитель $2\sin^2{}^1/_2(\zeta+\delta)$, монотонно убывает с ростом σ; вторая часть импульса γ, имеющая множитель $d\sin(\zeta+\delta)$, достигает максимума при $\sigma=(2\sqrt{6}\Delta)^{-1}$, после чего монотонно убывает. Вне области $\beta\neq0$ продольная волна в направлении X_2



Фиг. 1, 2

генерируется по начальному распределению, полученному из соотношения (2.6).

В случае $R(\alpha)=\partial\alpha/\partial\tau_1-(n_0/2\varepsilon c_0)(\partial^2\alpha/\partial\xi^2)$ решение определяется формулой

$$\beta=\exp(-\Gamma^{-1}\sigma)\exp(-a\eta^2)a^{1/4}\sin(\zeta+\delta)$$
$$\Gamma=3|1+m_0|\alpha_0\tau_c n_0^{-1} \qquad (4.2)$$

В случае

$$R(\alpha)=\frac{\partial\alpha}{\partial\tau_1}-\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi_e}\int\limits_0^{\xi_e}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\exp\left(-\frac{\xi-y}{c_{0e}\tau_0}\right)dy$$

решение в высокочастотной ($Z_e\gg1$, $Z_e=c_{0e}\tau_0\tau_c^{-1}$) области будет иметь вид

$$\beta=\exp(-\Xi_e Z_e^{-1}\sigma)\exp(-a\eta^2)a^{1/4}\sin(\zeta+\Xi_e\sigma+\delta)$$
$$\Xi_e={}^1/_3\varepsilon_1 c_{0e}(|1+m_0|\alpha_0)^{-1} \qquad (4.3)$$

а в низкочастотной ($Z_e\ll1$) области

$$\beta=\exp(-\Xi_e Z_e\sigma)\exp(-a\eta^2)a^{1/4}\sin(\zeta+\Xi_e Z_e^2\sigma+\delta)$$

В решениях (4.2), (4.3) видно влияние диссипации в виде появления дополнительного экспоненциального члена. Кроме того, в случае модели стандартного вязкоупругого тела сдвиг фазы зависит от параметров ε_1 и τ_0.

В случае сильных нелинейных эффектов аналитическое решение уравнения (2.5) неизвестно. В [7] предлагается найти решение задачи распространения звукового пучка в бедиссипативной жидкой среде методом малого параметра по степеням Δ^{-1} (случай умеренных нелинейных эффектов) или в виде римановского приближения (случай сильных нелинейных эффектов). В обоих случаях принципиальная структура решения осталась подобной структуре решения (4.1).

В [8, 9] представлены результаты численного интегрирования уравнения (2.5) для задачи распространения звукового пучка в жидкой среде. Представим здесь пример численного интегрирования подобной задачи распространения волны деформации в твердой среде. На фиг. 2 показаны профили продольной волны для стали ($m_0=-9.55$) при начальном условии

$$\alpha(\xi,\tau_1,\tau_2)|_{\tau_1=0}=\alpha_0\sin(\tau_c^{-1}\xi)\exp(-\tau_2^2b^{-2})[H(\xi)-H(\xi-\tau_c)]$$

где $H(\xi)$ — функция Хевисайда. При этом $b=0.015$ м, $\alpha_0=49$ МПа, $\tau_c=0.063$ м. Сплошная линия соответствует начальному импульсу, пунктирная — импульсу при $X_1=0.05$ м. Искажение импульса главным образом обусловлено диссипативностью и дифракционной расходимостью.

5. В нелинейной среде, как известно, возможно образование ударной волны (разрыва) при гладких краевых условиях. Проблема определения координаты и времени возникновения разрыва обычно анализируется в одномерной постановке [1, 2], лишь в [7] на основе римановского приближения определена координата возникновения разрыва для звукового пучка. Рассмотрим более подробно эту задачу в свете выведенных уравнений переноса и установим характер развития разрыва.

Введем в рассмотрение предположение, что поперечное распределение в пучке, определенное из линейной задачи, остается асимптотически справедливым до возникновения разрыва. Применение этого предположения оправдывается тем, что согласно [7] высшие гармоники, генерируемые в нелинейной среде, локализируются в приосевой области пучка. Рассмотрим процесс в нелинейной среде с волновым оператором

$$R(\beta)=\frac{\partial\beta}{\partial\sigma}+a_1\beta\frac{\partial\beta}{\partial\zeta},\quad a_1=\operatorname{sign}(1+m_0) \tag{5.1}$$

В безразмерных переменных процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial R}{\partial\zeta}=\Delta\frac{\partial^2\beta}{\partial\eta^2} \tag{5.2}$$

Следуем методу Уизема [15], согласно которому решение линейной задачи используется для определения характеристик нелинейной задачи. Ищем решения уравнения (5.2) в виде

$$\begin{gathered}\beta=\beta_1(\zeta,\sigma)g(\sigma,\eta)f(\sigma),\\ g(\sigma,\eta)=\exp(-a\eta^2),\quad f(\sigma)=a^{1/4}\end{gathered} \tag{5.3}$$

коэффициент $a=a(\sigma)$ определен в соотношении (4.1). После интегрирования уравнения (5.2) по ζ и с учетом (5.3), получим для β_1 уравнение

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\sigma}+a_1\beta_1\frac{\partial\beta_1}{\partial\zeta}fg+\beta_1\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln fg=-2\Delta a(1-2a\eta^2)\int\limits_0^\zeta\beta_1\,d\zeta$$

На основе закона сохранения энергии главный момент импульса остается постоянным и выполняется равенство

$$\int\limits_0^\zeta\beta_1\,d\zeta=\int\limits_0^{\zeta_0}\beta_{10}(\zeta_0)\,d\zeta=\frac{1}{2}M_0(\zeta_0)$$

где $\zeta=\zeta_0$, $\beta_1=\beta_{10}$ при $\sigma=0$. Тогда возможно выписать характеристические уравнения и решить их по стандартной методике. Решение в этом случае будет иметь вид

$$\beta_1=g(0,\eta)(fg)^{-1}[\beta_{10}(\zeta_0)-\Delta M_0 g^{-1}(0,\eta)I_1]$$

$$\zeta=\zeta_0+a_1g(0,\eta)\beta_{10}(\zeta_0)\sigma-a_1\Delta M_0\int_0^\sigma I_1\,d\sigma$$

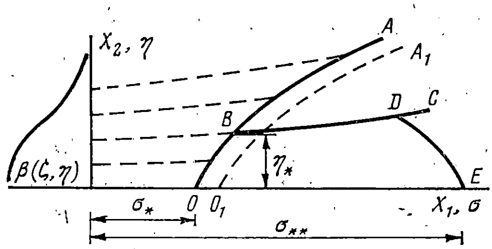
$$I_1=\int_0^\sigma a(1-2a\eta^2)fg\,d\sigma$$

В случае существования разрыва характеристики должны иметь огибающую [15]. Условие существования огибающей получим дифференцированием уравнения характеристик по ζ_0. Тогда имеем

$$0=1+a_1g(0,\eta)\beta_{10}'(\zeta_0)\sigma-a_1\Delta M_0'\int_0^\sigma I_1\,d\sigma$$

где штрих обозначает производную по ζ_0. Имея в виду, что на фронте $\zeta=0$ до образования разрыва выполняется $\beta_{10}(\zeta_0)=0$, получим следующее соотношение для определения координаты разрыва σ_* на фронте: $\sigma_*=-[a_1\beta_{10}'(\zeta_0)g(0,\eta)]^{-1}$. На оси пучка $\eta=0$ это совпадает с решением одномерной задачи.

Качественная схема развития разрыва представлена на фиг. 3 (из-за симметрии процесса указана лишь половина пучка с $\eta>0$). Кривая OA соответствует границе областей непрерывного и разрывного решений, в случае модели нелинейной упругой среды она описывается монотонно изменяющейся функцией. Подобный результат получен для $\Delta\ll1$ в [7]. Так как амплитуда импульса в случае пространственной задачи уменьшается, то в рамках сделанных предпосылок можно ждать, что действительная граница сдвинута в сторону бóльших σ (штриховая линия O_1A_1 на фиг. 3).



Фиг. 3

Пусть теперь $R(\beta)=\partial\beta/\partial\sigma+a_1\beta(\partial\beta/\partial\zeta)+a_2\beta$, где, например, $a_2=\Xi_eZ_e^{-1}$, согласно высокочастотному процессу (4.3) в стандартном вязкоупругом теле. Аналогично проделанному, условие существования огибающей получит вид (здесь учтено, что $\beta_{10}=0$ при $\zeta=0$):

$$0=1+a_1a_2^{-1}\beta_{10}'(\zeta_0)g(0,\eta)[1-\exp(-a_2\sigma)]$$

Оно выполняется при условии

$$\beta_{10}'(\zeta_0)g(0,\eta)>-a_2a_1^{-1} \tag{5.4}$$

координата разрыва определяется из формулы

$$\sigma_*=-a_2^{-1}\ln[1+a_2(a_1\beta_{10}'(\zeta_0)g(0,\eta))^{-1}]$$

Если (5.4) выполняется при $\eta=0$, то оно может выполняться до определенной $\eta=\eta_*$, а при $\eta>\eta_*$ решение остается непрерывным. Качественная схема этого случая дается на фиг. 3, где граница разрывной области показана линией $OBDC$, при этом кривая BC лежит на линии равных амплитуд.

Теперь необходимо решить задачу развития разрыва. Рассмотрим волновой оператор (5.1), но воспользуемся разрывными величинами. Записывая уравнение переноса на обеих сторонах разрыва и вычитывая их, получим

$$\left[\frac{\partial R}{\partial \xi}\right]=a_3\left[\frac{\partial^2\alpha}{\partial \tau_2^2}\right], \quad [R]=\left[\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}\right]+a_1[\alpha]\left[\frac{\partial \alpha}{\partial \xi}\right], \tag{5.5}$$

где квадратные скобки обозначают разрыв указанной в скобках величины [16]. С учетом кинематических условий совместности [16] и формул перехода на лучевые координаты, получим

$$\frac{d[R]}{dt}=(c_0-V)\left[\frac{\partial R}{\partial \xi}\right]+\varepsilon V\left[\frac{\partial R}{\partial \tau_1}\right]$$

где V — скорость ударной волны. На основе анализа звуковых пучков [7] считаем, что в случае сильных нелинейных эффектов справедливо риманово приближение и поэтому $\alpha=\alpha_1 g(\tau_2)$, где $g(\tau_2)$ определяет поперечное распределение в пучке. Тогда имеем $[\partial^2\alpha/\partial\tau_2^2]=(\partial^2 g/\partial\tau_2^2)[\alpha_1]$.

Считаем также, что $[\partial R/\partial\tau_1]$ медленно изменяющаяся величина. Из решения одномерной задачи известно [17], что выполняется соотношение

$$\varepsilon V[R]=g\frac{d[\alpha_1]}{dt}+Bg^2[\alpha_1]\frac{\partial\alpha_1}{d\xi}\bigg|_{X_1=X_*-0}, \quad B=\frac{3}{4}(1+m_0)$$

где X_* — координата разрыва. Тогда из (5.5) следует уравнение

$$\frac{d^2[\alpha_1]}{dt^2}+C_1\frac{d[\alpha_1]}{dt}+C_2[\alpha_1]^2=0 \tag{5.6}$$

$$C_1=Bg\frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi}\bigg|_{X_1=X_*-0} \qquad C_2=-B\varepsilon Va_3\frac{\partial^2 g}{\partial\tau_2^2}$$

Здесь использовано также соотношение $c_0-V={}^3/_4(1+m_0)[\alpha]$. Известно, что с точностью одномерной задачи разрыв описывается [17] уравнением первого порядка $d[\alpha]/dt+C_1[\alpha]=0$. Если волновой оператор имеет вид (5.4), то уравнение (5.6) сохраняет силу с соблюдением условия

$$C_1=B\left(g\frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi}\bigg|_{X_1=X_*-0}+\lambda_*\right)$$

где λ_* — критический градиент деформации, определенный из одномерной задачи. Так как в данном случае необходимо определить критический градиент с учетом скорости ударной волны, то он превышает критический градиент, определенный из гладкого решения для установления условия возникновения разрыва [18].

Уравнение (5.6) решается при начальных условиях

$$[\alpha_1]_{t=t_*}=[\alpha_1]_0, \quad \frac{d[\alpha_1]}{dt}\bigg|_{t=t_*}=\frac{d[\alpha_1]}{dt}\bigg|_0$$

Асимптотический анализ уравнения (5.6) показывает, что при малых временах решение можно аппроксимировать выражением $[\alpha_1] = A(t) \exp(-C_1 t)$, где $A(t)$ определяется через эллиптическую функцию Вейерштраса.

На основе такого анализа можно утверждать, что основные следствия, полученные из решения одномерной задачи [18], остаются в силе при произвольном выпуклом законе $g(\tau_2)$ и поведение разрыва управляется качественно значением коэффициента C_1. Разрывное решение существует в области $\sigma_* < \sigma < \sigma_{**}$ (область *OBDE* на фиг. 3), что в полном согласии с результатами численного интегрирования [15].

Необходимо отметить, что многомерная задача определения параметров движения в окрестности фронтов волн малой интенсивности в вязкотермомагнитоупругой среде решена в [19], в которой на основе лучевого метода приводятся уравнения для определения скорости частицы. При этом главное внимание уделено термоупругим и магнитоупругим волнам.

Поступила 4 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Taniuti T.* Reductive perturbation method for far fields of wave equations. Suppl. Progr. Theoret. Phys., 1974, No. 55, p. 1—35.
2. *Asano N.* Wave propagation in non — uniform media. Suppl. Progr. Theoret. Phys., 1974, No. 55, p. 52—79.
3. *Tatsumi T., Tokunaga H.* One — dimensional shock turbulence in a compressible fluid. J. Fluid Mech., 1974, vol. 65, pt 3, p. 581—601.
4. *Островский Л. А., Пелиновский Е. Н.* О приближенных уравнениях для волн в средах с малыми нелинейностью и дисперсией. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
5. *Jeffrey A., Kakutani T.* Weak nonlinear dispersive waves: a discussion centered around the Korteweg — de Vries equation. SIAM Review, 1972, vol. 16, No. 4, p. 582—643.
6. *Germaine P.* Progressive waves. Jahrb. DGLR, 1971; Köln, 1972, p. 11—30.
7. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М., Наука, 1975.
8. *Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.* Нелинейное распространение звукового пучка в недиссипативной среде. Акуст. ж., 1976, т. 22, вып. 4.
9. *Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.* Сфокусированные звуковые пучки конечной амплитуды. Акуст. ж., 1978, т. 24, вып. 1.
10. *Engelbrecht J.* Theory of nonlinear wave propagation with application to the interaction and inverse problems. Internat. J. Nonlinear Mech., 1977, vol. 12, No. 4, p. 189—201.
11. *Энгельбрехт Ю. К.* О теории нелинейных волновых процессов в диссипативной среде. Изв. АН СССР. 1977, № 2.
12. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел. Таллин, Изд. Ин-т кибернет. АН ЭССР, 1972.
13. *Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные продольные и поперечные волны в полупространстве. Теоретична и приложна мех., 1974, № 3.
14. *Brepta R., Prokopec M.* Šiřeni napětóvých vln a rázy v tělesech, Praha, Academia, 1972.
15. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
16. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
17. *Энгельбрехт Ю. К.* Теория одномерных волн в нелинейных диссипативных средах. Механика полимеров, 1976, вып. 2.
18. *Engelbrecht J.* One — dimensional deformation waves in nonlinear viscoelastic media. Wave Motion, 1979, vol. 1, No. 1, p. 65—74.
19. *Багдоев А. Г.* Уравнения нелинейной вязкотермомагнитоупругой среды вблизи фронтов волн. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1974, т. 27, № 1.