**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1980**

УДК 539.3

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СРЕДЕ (ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОВЕРКА УСЛОВИЯ АДАМАРА)

Е. Л. ГУРВИЧ, А. И. ЛУРЬЕ

(Ленинград)

Исследовано важное в нелинейной теории упругости условие Адамара. Физический смысл этого условия разъяснен в [1], связь с теоремами существования для краевых задач нелинейной теории обсуждалась в [2], специализация для изотропного материала дана в [3–5], ряд результатов частного характера получен в [6–9].

Применение методики проверки условия Адамара, предложенной в [5] для случая изотропного, несжимаемого материала, значительно осложнено необходимостью исследования ряда неравенств, зависящих от вспомогательных параметров – компонент нормали к фронту волны.

Ниже указана конечная система элементарных (не содержащих вспомогательных параметров и не допускающих, вообще говоря, дальнейшего упрощения) неравенств, к проверке которых сводится проверка условия Адамара, когда материал изотропен. Если материал изотропен и несжимаем, то указанная система принимает сравнительно простой вид и выписана явно. Приведены примеры.

1. Условие Адамара. Пусть в упругом теле, подверженном некоторой начальной аффинной деформации, распространяется плоская волна малой амплитуды, характеризуемая полем вектора перемещений

$$\mathbf{w}=\mathbf{a}f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}-ct) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{a}$ — вектор амплитуды, $\mathbf{n}$ — единичный вектор, определяющий направление распространения, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор текущей точки, c — скорость распространения волны.

Для определения амплитуды $\mathbf{a}$ и скорости c вводится [1, 3, 5] зависящий от направления распространения $\mathbf{n}$ симметричный тензор второго ранга $\mathbf{Q}$, называемый также акустическим тензором. Амплитуда $\mathbf{a}$ и скорость c находятся из уравнения

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}=\rho c^2\mathbf{a} \tag{1.2}$$

где $\rho>0$ — плотность рассматриваемого тела. Исключив $\mathbf{a}$ из (1.2), получим также кубическое относительно c^2 уравнение

$$\det(\mathbf{Q}-\rho c^2\mathbf{I})=0 \tag{1.3}$$

Требование действительности корней (1.3) вне зависимости от направления распространения волны представляет собой ограничение на закон состояния упругого тела, обычно называемое условием Адамара. Нарушение этого условия приводит к физически бессмысленным последствиям, объединяемым понятием «неустойчивость материала» [7].

Если материал несжимаем, то требование инвариантности объема влечет за собой ортогональность векторов амплитуды и направления

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=0 \tag{1.4}$$

Решения уравнения (1.2) не должны удовлетворять этому равенству, и (1.2) заменяется на

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}=q\mathbf{n}+\rho c^2\mathbf{a} \tag{1.5}$$

где q — некоторая постоянная. Из уравнений (1.4) и (1.5) находятся одно нулевое и (с точностью до знака) два, вообще говоря, различных ненулевых значения скорости c. Условие Адамара по-прежнему заключается [5, 9] в требовании действительности этих значений для всех направлений распространения волны.

2. Алгебраическая задача. Сформулируем алгебраическую задачу, к решению которой сводится проверка условия Адамара, когда рассматриваемый упругий материал изотропен.

Пусть исходная аффинная деформация характеризуется тензором Фингера $\mathbf{F}$ и $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — собственные вектора, а v_1^2, v_2^2, v_3^2 — собственные значения $\mathbf{F}$. Положительные числа v_1, v_2, v_3 называются главными растяжениями деформации. Удельная потенциальная энергия деформации изотропного материала есть функция главных растяжений. Эта функция $\Pi=\Pi(v_1, v_2, v_3)$ симметрична (не меняется при перестановке своих аргументов) и предполагается дважды непрерывно дифференцируемой.

Обозначим

$$\Pi_i=\frac{\partial\Pi}{\partial v_i},\qquad \Pi_{ij}=\frac{\partial^2\Pi}{\partial v_i\,\partial v_j}\qquad (i,j=1,2,3)$$

Как известно [1, 3], акустический тензор $\mathbf{Q}$, соответствующий направлению распространения $\mathbf{n}$, можно представить в виде

$$\mathbf{Q}=\frac{1}{v_1v_2v_3}\left[\sum_{i,j}p_{ij}n_in_jv_iv_j\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j+\sum_{i<j}q_{ij}(n_j^2v_j^2\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i+n_i^2v_i^2\mathbf{e}_j\mathbf{e}_j)\right] \tag{2.1}$$

$$p_{kk}=\Pi_{kk},\quad n_k=\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_k\quad (k=1,2,3)$$

$$p_{ij}=\Pi_{ij}+\frac{v_j\Pi_i-v_i\Pi_j}{v_i^2-v_j^2}\quad (i,j=1,2,3;\ i\neq j)$$

$$q_{ij}=\frac{v_i\Pi_i-v_j\Pi_j}{v_i^2-v_j^2}\quad (1\leqslant i<j\leqslant 3)$$

Действительность корней уравнения (1.3), очевидно, эквивалентна неотрицательности собственных значений тензора $\mathbf{Q}$ и, поскольку $\mathbf{Q}$ симметричен, его неотрицательной определенности:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}\geqslant 0 \tag{2.2}$$

для всех $\mathbf{a}$. Обозначив $b_i=v_in_i$ ($i=1, 2, 3$), получим, что условие Адамара выполнено тогда и только тогда, когда

$$C(\mathbf{a},\mathbf{b})=\sum_{i,j}p_{ij}a_ia_jb_ib_j+\sum_{i<j}q_{ij}(a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2)\geqslant 0 \tag{2.3}$$

для произвольных векторов $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$.

Если материал несжимаем, то условие Адамара равносильно, как легко видеть, «относительной неотрицательной определенности» тензора $\mathbf{Q}$, т. е. выполнению неравенства (2.2) для всех $\mathbf{a}$, удовлетворяющих условию ортогональности (1.4). В новых обозначениях равенство (1.4) записывается в виде

$$c(\mathbf{a},\mathbf{b})=\sum_i \frac{a_i b_i}{v_i}=0 \tag{2.4}$$

и условие Адамара в данном случае эквивалентно выполнению неравенства (2.3) для всех $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, удовлетворяющих соотношению (2.4).

Отметим, что удельная энергия деформации несжимаемого материала $\Pi=\Pi(v_1, v_2, v_3)$ определена, вообще говоря, только если $v_1v_2v_3=1$. Различные способы продолжения Π до функции, определенной при всех v_1, v_2, $v_3>0$, приводят в общем случае к разным значениям производных Π_i, Π_{ij} и коэффициентов p_{ij}, q_{ij} формы $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Однако легко проверить, что возникающие таким образом различные представления $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ отличаются на выражение, обращающееся в нуль, если только $c(\mathbf{a}, \mathbf{b})=0$, и способ продолжения не оказывает поэтому никакого влияния на выполнение неравенства (2.3).

3. Упрощение задачи. Найдем ограничения на коэффициенты p_{ij}, q_{ij}, необходимые и достаточные для выполнения (2.3) для всех $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ (соответственно для всех $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, удовлетворяющих (2.4)).

Для вектора $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ рассмотрим [4] неравенство

$$D(\mathbf{x})=\sum_{i,j} p_{ij}x_ix_j+2\sum_{i<j} q_{ij}|x_i||x_j|\geqslant 0 \tag{3.1}$$

и ограничение

$$d(\mathbf{x})=\sum_i \frac{x_i}{v_i}=0 \tag{3.2}$$

Покажем, что $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})\geqslant 0$ для всех $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ (соответственно для всех $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, таких, что $c(\mathbf{a}, \mathbf{b})=0$) тогда и только тогда, когда имеют место неравенства

$$q_{ij}\geqslant 0 \quad (1\leqslant i<j\leqslant 3) \tag{3.3}$$

и для всех $\mathbf{x}$ (соответственно для всех $\mathbf{x}$, таких что $d(\mathbf{x})=0$) будет $D(\mathbf{x})\geqslant 0$.

Для доказательства достаточности заметим, что если для данных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ положить $x_i=a_ib_i$ $(i=1, 2, 3)$, то

$$C(\mathbf{a},\mathbf{b})=D(\mathbf{x})+\sum_{i<j} q_{ij}(|a_ib_j|-|a_jb_i|)^2\geqslant 0$$

Для доказательства необходимости, положив $a_1=b_2=1$, $a_2=a_3=b_1=b_3=0$, найдем $q_{12}=C(\mathbf{a}, \mathbf{b})\geqslant 0$. Аналогично получаются два других неравенства из (3.3). Далее, для данного $\mathbf{x}$, обозначив $a_i=|x_i|^{1/2}$, $b_i=|x_i|^{1/2}\operatorname{sign}(x_i)$, получим, что

$$a_ib_i=x_i,\quad a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2=2|x_i|\,|x_j| \quad (i, j=1, 2, 3)$$

$$D(\mathbf{x})=C(\mathbf{a}, \mathbf{b})\geqslant 0$$

Простые неравенства (3.3) записываются в виде

$$\frac{v_1\Pi_1-v_2\Pi_2}{v_1^2-v_2^2}\geqslant 0,\qquad \frac{v_2\Pi_2-v_3\Pi_3}{v_2^2-v_3^2}\geqslant 0,\qquad \frac{v_3\Pi_3-v_1\Pi_1}{v_3^2-v_1^2}\geqslant 0 \tag{3.4}$$

и мало отличаются (знак $\geqslant$ вместо $>$) от известных неравенств Бейкера — Эриксена [1]. Проверка условия Адамара сводится теперь к проверке выполнения неравенства (3.1), возможно с учетом ограничения (3.2).

4. Проверка неравенства (3.1). Рассмотрим квадратичные формы

$$P_0(\mathbf{y}) = \sum_{i,j} p_{ij} y_i y_j, \qquad Q(\mathbf{y}) = \sum_{i<j} q_{ij} y_i y_j, \qquad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \tag{4.1}$$

Определим далее формы P_1, P_2, P_3, заменив y_1 (соответственно y_2 или y_3) в выражении для P_0 на $-y_1$ (соответственно $-y_2$ или $-y_3$). Например

$$P_3(\mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{2} p_{ij} y_i y_j - 2y_3 \sum_{i=1}^{2} p_{i3} y_i + p_{33} y_3^2 \tag{4.2}$$

Положим, наконец

$$K_l(\mathbf{y}) = P_l(\mathbf{y}) + 2Q(\mathbf{y}) \quad (l=0,1,2,3) \tag{4.3}$$

Определение. Квадратичную форму $L(\mathbf{y})$, зависящую от n-мерного вектора $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, назовем частично неотрицательно-определенной, если $L(\mathbf{y}) \geqslant 0$ для всех $\mathbf{y}$, таких, что $y_i \geqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Для вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ определим вектор $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, положив $y_i = |x_i|$ $(i=1, 2, 3)$. Ясно, что для каждого из восьми октантов пространства изменения $\mathbf{x}$ существует l $(l=0, 1, 2, 3)$, такое, что $D(\mathbf{x}) = K_l(\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{x}$, принадлежащих этому октанту. Поэтому $D(\mathbf{x}) \geqslant 0$ для всех $\mathbf{x}$ тогда и только тогда, когда квадратичные формы K_0, K_1, K_2, K_3 частично неотрицательно определены. В общем случае (сжимаемый материал) проверка условия Адамара сводится, таким образом, к проверке частичной неотрицательной определенности четырех квадратичных форм от трех переменных.

Перейдем к рассмотрению неравенства (3.1) с учетом ограничения (3.2) (несжимаемый материал).

Введем линейные формы

$$\begin{aligned} R_0(\mathbf{y}) &= \frac{y_1}{v_1} + \frac{y_2}{v_2} + \frac{y_3}{v_3}, & R_1(\mathbf{y}) &= -\frac{y_1}{v_1} + \frac{y_2}{v_2} + \frac{y_3}{v_3} \\ R_2(\mathbf{y}) &= \frac{y_1}{v_1} - \frac{y_2}{v_2} + \frac{y_3}{v_3}, & R_3(\mathbf{y}) &= \frac{y_1}{v_1} + \frac{y_2}{v_2} - \frac{y_3}{v_3} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ясно, что $D(\mathbf{x}) \geqslant 0$ для всех $\mathbf{x}$, таких, что $d(\mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда для каждого $l=0, 1, 2, 3$ будет $K_l(\mathbf{y}) \geqslant 0$ для всех $\mathbf{y}$, для которых

$$R_l(\mathbf{y}) = 0, \quad y_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,3) \tag{4.5}$$

Если $l=0$, то неравенство $P_0(\mathbf{y}) \geqslant 0$ очевидным образом выполнено, поскольку из (4.5) в этом случае следует $\mathbf{y} = 0$.

Для $l=1, 2, 3$ удовлетворим (4.5), положив для $z_1, z_2 \geqslant 0$ соответственно

$$\begin{aligned} &y_1 = v_1(z_1+z_2), \quad y_2 = v_2 z_1, \quad y_3 = v_3 z_2 \\ &y_1 = v_1 z_2, \quad y_2 = v_2(z_1+z_2), \quad y_3 = v_3 z_1 \\ &y_1 = v_1 z_1, \quad y_2 = v_2 z_2, \quad y_3 = v_3(z_1+z_2) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Определим квадратичные формы

$$K_l^\circ(\mathbf{z}) = K_l(\mathbf{y}) \quad (l=1,2,3) \tag{4.7}$$

где $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ и $\mathbf{y}$ выражено через $\mathbf{z}$ в соответствии с (4.6).

Ясно, что $D(\mathbf{x})\geqslant 0$ для всех $\mathbf{x}$, таких, что $d(\mathbf{x})=0$ тогда и только тогда, когда квадратичные формы $K_1°$, $K_2°$, $K_3°$ частично неотрицательно определены. Таким образом, если материал несжимаем, то проверка условия Адамара сводится к проверке частичной неотрицательной определенности трех квадратичных форм от двух переменных.

5. Частичная неотрицательная определенность. Рассмотрим зависящую от n-мерного вектора $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ квадратичную форму

$$L(\mathbf{x})=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{5.1}$$

Рассмотрим также соответствующую симметричную $n\times n$ матрицу $A=\|a_{ij}\|$ и присоединенную к A матрицу A', элементы которой есть алгебраические дополнения к соответствующим элементам матрицы A. Для $l=1, 2, \ldots, n$ обозначим через $A^{(l)}$ матрицу, полученную из A вычеркиванием l-го столбца и l-й строки, а через $L^{(l)}$ — соответствующую квадратичную форму от $(n-1)$ переменной.

Теорема. Квадратичная форма L частично неотрицательно определена тогда и только тогда, когда: квадратичные формы $L^{(l)}$ $(l=1, 2, \ldots, n)$ частично неотрицательно определены; если все элементы матрицы A' неотрицательны, то $\det A\geqslant 0$.

В случае $n=2$

$$A=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22}\end{vmatrix}, \quad A'=\begin{vmatrix} a_{22}, & -a_{12} \\ -a_{21}, & a_{11}\end{vmatrix} \tag{5.2}$$

и указанные условия эквивалентны следующим: $a_{11}\geqslant 0$ и $a_{22}\geqslant 0$; если $a_{12}\leqslant 0$, то $a_{11}a_{22}-a_{12}^2\geqslant 0$.

Для доказательства достаточно воспользоваться представлением

$$L(x)=(a_{11}^{1/2}x_1-a_{22}^{1/2}x_2)^2+2[(a_{11}a_{22})^{1/2}+a_{12}]x_1x_2$$

В случае $n=3$ квадратичные формы $L^{(1)}$, $L^{(2)}$, $L^{(3)}$ зависят только от двух переменных и соответствующие условия на основании изложенного выше также могут быть выписаны в явном виде. Доказательство теоремы слишком громоздко и здесь не приводится.

Для случая, когда $n\geqslant 4$, представляющего здесь лишь общий интерес, авторы не располагают полным доказательством сформулированной теоремы.

6. Проверка условия Адамара. В общем случае (сжимаемый материал) описанная методика проверки условия Адамара довольно громоздка и требует рассмотрения, хотя и конечного, но большого (несколько десятков) количества элементарных неравенств. Поэтому иногда целесообразно, проведя лишь часть стандартных вычислений, попытаться применить какой-либо искусственный прием. Пусть, например, [1, 3, 4, 10]:

$$\begin{aligned}\Pi(v_1, v_2, v_3)={}&{}^1/_2C\{(v_1-1)^2+(v_2-1)^2+(v_3-1)^2-\\&-p[(v_1-v_2)^2+(v_2-v_3)^2+(v_3-v_1)^2]\}\end{aligned} \tag{6.1}$$

причем $C>0$, $0<p<{}^1/_3$ (полулинейный материал). Заметим, что указанное ограничение на p соответствует ограничению на коэффициент Пуассона [10]: $0<\nu=p/(1-p)<{}^1/_2$.

Неравенства (3.4) записываются в виде

$$\begin{gathered}(1-2p)(v_2+v_3)+pv_1\geqslant 1\\(1-2p)(v_3+v_1)+pv_2\geqslant 1\\(1-2p)(v_1+v_2)+pv_3\geqslant 1\end{gathered} \tag{6.2}$$

Докажем, что (6.2) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями. Обозначим $v_{(12)}=v_3$, $v_{(23)}=v_1$, $v_{(13)}=v_2$ и выпишем левую часть (3.1)

$$D(\mathbf{x})=C\left[(1-2p)\left(\sum_i x_i\right)^2+\right.$$

$$\left.+2\sum_{i<j}\frac{(1-2p)(v_i+v_j)+pv_{(ij)}-1}{v_i+v_j}(|x_i||x_j|-x_ix_j)\right]$$

Ясно, что если (6.2) имеют место, то $D(\mathbf{x})\geqslant 0$ для всех $\mathbf{x}$ и условие Адамара выполнено.

Если материал несжимаем, то проверка условия Адамара значительно упрощается. Опустив промежуточные выкладки, приведем лишь окончательный результат.

Для каждой перестановки (i, j, k) индексов (1, 2, 3) обозначим

$$\alpha_k=\frac{v_i\Pi_i-v_j\Pi_j}{v_i-v_j},\quad \beta_k=v_i^2\Pi_{ii}+v_j^2\Pi_{jj}-2v_iv_j\Pi_{ij}+2v_iv_j\frac{\Pi_i+\Pi_j}{v_i+v_j}$$

$$\gamma_k=v_k^2\Pi_{kk}+v_iv_j\Pi_{ij}-v_kv_i\Pi_{ki}-v_kv_j\Pi_{kj}+v_iv_j\frac{\Pi_i-\Pi_j}{v_i-v_j}+$$

$$+v_kv_i\frac{\Pi_k+\Pi_i}{v_k+v_i}+v_kv_j\frac{\Pi_k+\Pi_j}{v_k+v_j}$$

Энергия П удовлетворяет условию Адамара для данных v_1, v_2, v_3 тогда и только тогда, когда: $\alpha_k\geqslant 0$ $(k=1, 2, 3)$; $\beta_k\geqslant 0$ $(k=1, 2, 3)$; для произвольной перестановки (i, j, k) индексов (1, 2, 3) неравенство $\gamma_k\leqslant 0$ влечет за собой $\beta_i\beta_j\geqslant\gamma_k^2$.

Таким образом, задача сводится к проверке девяти элементарных условий. Пусть, например, [5]: $\Pi=f(I_1)$, $I_1=v_1^2+v_2^2+v_3^2$.

Для перестановки (i, j, k) получим

$$\alpha_k=2(v_i+v_j)f',\quad \beta_k=2(v_i+v_j)^2[f'+2(v_i-v_j)^2f'']$$

$$\gamma_k=2(v_k+v_i)(v_k+v_j)[f'+2(v_k-v_i)(v_k-v_j)f'']$$

$$\beta_i\beta_j-\gamma_k^2=2(v_i-v_j)^2f'f''$$

Первые два условия записываются в виде

$$f'\geqslant 0,\quad f'+2(v_i-v_j)^2f''\geqslant 0\quad (1\leqslant i<j\leqslant 3)$$

и являются не только необходимыми, но и достаточными для выполнения условия Адамара. Пусть для определенности $v_1\geqslant v_2\geqslant v_3$. Если $f''\geqslant 0$, то третье условие заведомо удовлетворено. Если $f''<0$, то, учитывая, что

$$f'+2(v_k-v_i)(v_k-v_j)f''\geqslant f'+2(v_1-v_3)^2f''\geqslant 0$$

получим $\gamma_k\geqslant 0$ $(k=1, 2, 3)$ и третье условие выполнено.

Поступила 22 X 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., «Мир», 1975.
2. *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1977, vol. 63, No. 4, p. 337—403.

3. *Лурье А. И.* Критерий эллиптичности уравнений равновесия нелинейной теории упругости. Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 2.
4. *Гурвич Е. Л.* Условие Адамара в нелинейной теории упругости. Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 1.
5. *Sawyers K. N., Rivlin R. S.* On the speed of propagation of waves in a deformed elastic material. Z. angew. Math. und Phys. (ZAMP), 1977, vol. 28, p. 1045—1057.
6. *Эриксен Дж.* Исследования по механике сплошных сред. М., «Мир», 1977.
7. *Sawyers K. N., Rivlin R. S.* Instability of an elastic material. Internat. J. Solids Struct., 1973, vol. 9, No. 5, p. 607—613.
8. *Sawyers K. N., Rivlin R. S.* A note on the Hadamard criterion for an incompressible isotropic elastic material. Mech. Res. Communs., 1978, vol. 5, No. 4, p. 211—214.
9. *Ericksen J. L.* On the propagation of waves in isotropic incompressible perfectly elastic materials. J. Rat. Mech. and Analysis, 1953, vol. 2, No. 2, p. 329—337.
10. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.