

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ТРЕЩИНЕ НА ГРАНИЦЕ СОЕДИНЕНИЯ ДВУХ УПРУГИХ КЛИНЬЕВ

В. М. ВАЙНШЕЛЬБАУМ, Р. В. ГОЛЬДШТЕЙН, М. Л. ХОЛМЯНСКИЙ

(Москва)

Рассмотрена задача о трещине конечной длины, расположенной на границе раздела двух клиньев с различными упругими свойствами, моделирующая один из характерных случаев дефектности реальных элементов конструкций. Задача сводится с помощью преобразования Меллина к системе двух сингулярных интегральных уравнений относительно производных от скачков смещений вдоль трещины.

Строится численное решение системы с учетом его известной асимптотики вблизи концов трещины, в которой помимо корневой особенности имеется еще осциллирующий множитель, и с использованием регулярного представления сингулярных интегралов. Вычислены значения коэффициентов интенсивности напряжений в концах трещины и величины удельной энергии деформации тела с трещиной в широком диапазоне значений углов раствора клиньев при различных удалениях трещины от их вершины и соотношениях между упругими постоянными. Полученные результаты позволяют определять критические размеры трещин на границе раздела двух клиновидных элементов конструкции. На их основе можно при известной трещиностойкости по контакту подбирать углы раствора клиньев так, чтобы трещина, присутствия которой на границе нельзя избежать, была бы при заданных нагрузках безопасной.

Отметим, что поведение напряжений и смещений у вершины трещины, находящейся на границе раздела сред с различными упругими свойствами, исследовано в [1]. Плоская задача об n трещинах на прямолинейной или круговой границе раздела решена в [2]. На основе этого решения в [3] получено условие равновесия такой трещины. В [4] решена осесимметричная задача о дискообразной трещине в плоскости соединения двух полупространств; для анализа ее равновесия использовался, как и в [3], энергетический подход. Не имея возможности останавливаться на дальнейших работах о трещинах на границе сред с различными упругими свойствами, отметим лишь [5], где решена задача о трещине на границе двух клиньев в условиях антиплоской деформации.

1. Постановка задачи и сведение ее к системе интегральных уравнений.

Рассмотрим упругое тело, составленное из двух клиньев с различными упругими свойствами. Пусть θ_k ($k=1, 2$) — углы раствора и μ_k, ν_k — модули сдвига и коэффициенты Пуассона клиньев. Будем считать, что грани $\theta=\theta_1$ первого и $\theta=-\theta_2$ второго клиньев свободны от напряжений (r, θ — полярные координаты). На линии соединения $\theta=0$ имеют место следующие граничные условия:

$$u_\theta(r, +0) = u_\theta(r, -0), \quad u_r(r, +0) = u_r(r, -0) \quad (0 < r < l_1, l_2 < r < \infty) \quad (1.1)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, +0) = \sigma_{\theta\theta}(r, -0), \quad \sigma_{r\theta}(r, +0) = \sigma_{r\theta}(r, -0)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, +0) = \sigma_{\theta\theta}(r, -0) = g_1(r), \quad \sigma_{r\theta}(r, +0) = \sigma_{r\theta}(r, -0) = g_2(r) \quad (l_1 < r < l_2) \quad (1.2)$$

т. е. предполагается, что на линии соединения имеется трещина на участке $[l_1, l_2]$, к берегам которой приложены произвольные нормальные и касательные нагрузки, симметричные относительно линии соединения, а вне трещины материалы полностью соединены.

Отысканию подлежит распределение скачков смещений вдоль разреза $[l_1, l_2]$. Зная эти величины, можно вычислить коэффициенты интенсивности напряжений в концах трещины и удельное изменение энергии деформации при продвижении трещины, а также при необходимости найти поле напряжений и смещений в теле.

Для решения задачи применим интегральное преобразование Меллина

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} f(s) s^p ds, \quad f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{f}(p) r^{-p-1} dp \quad (1.3)$$

Если

$$f(r) = O(r^{\delta_1}) \quad (r \rightarrow 0), \quad f(r) = O(r^{\delta_2}) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (1.4)$$

то равенства (1.3) справедливы при

$$-1 - \delta_1 < \operatorname{Re} p < -1 - \delta_2, \quad -1 - \delta_1 < \sigma < -1 - \delta_2 \quad (1.5)$$

Ниже предполагается, что

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = O(r^{-1}), \quad u_\theta(r, \theta) = O\left(\ln \frac{r}{r_0}\right), \quad \frac{\partial u_r}{\partial \theta}(r, \theta) = O\left(\ln \frac{r}{r_0}\right) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (1.6)$$

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = O(r^{-1+\varepsilon}), \quad \frac{\partial u_r}{\partial \theta}(r, \theta) = -u^{(1)} \sin \theta + u^{(2)} \cos \theta + O(r^\varepsilon) \quad (i, j = r, \theta)$$

$$u_\theta(r, \theta) = -u^{(1)} \sin \theta + u^{(2)} \cos \theta + O(r^\varepsilon) \quad (r \rightarrow 0)$$

где r_0 — линейный масштаб; $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ — проекции смещения общей вершины клиньев на направления $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ соответственно.

Зависимости между напряжениями и смещениями на грани первого клина имеют вид (см. [6, 7]):

$$\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^\vee(p, +0) = H_{11}^{(1)}(p) \sigma_{\theta\theta}^\vee(p, 0) + H_{12}^{(1)}(p) \sigma_{r\theta}^\vee(p, 0) \quad (1.7)$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^\vee(p, +0) = H_{21}^{(1)}(p) \sigma_{\theta\theta}^\vee(p, 0) + H_{22}^{(1)}(p) \sigma_{r\theta}^\vee(p, 0)$$

$$H_{hk}^{(1)}(p) = [\sin 2\theta_1 p + (-1)^{h-1} p \sin 2\theta_1] / D(p, \theta_1)$$

$$H_{h,3-h}^{(1)}(p) = \left[(-1)^{h-1} \left(\frac{4}{\kappa_1 + 1} p^2 \sin^2 \theta_1 + 2 \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1} \sin^2 p \theta_1 \right) - 2p \sin^2 \theta_1 \right] / D(p, \theta_1) \quad (h=1, 2) \quad (1.8)$$

$$D(p, \theta_1) = \frac{8\mu_1}{1 + \kappa_1} (p^2 \sin^2 \theta_1 - \sin^2 p \theta_1), \quad \kappa_1 = 3 - 4\nu_1, \quad -\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0$$

(предполагается, что имеет место плоская деформация). Зависимости между напряжениями и деформациями на грани $\theta = 0$ второго клина получаются, если в уравнениях (1.7) заменить $(\partial u_i / \partial r)^\vee(p, +0)$, $H_{jk}^{(1)}(p)$ на $(\partial u_i / \partial r)^\vee(p, -0)$, $H_{jk}^{(2)}(p)$ соответственно ($i = r, \theta$; $j, k = 1, 2$); $H_{jk}^{(2)}(p)$ определяются из соотношений (1.8), если в них θ_1 , κ_1 , μ_1 , ν_1 заменить на $-\theta_2$, κ_2 , μ_2 , ν_2 .

Вычитая полученные уравнения из уравнений (1.7) и разрешая полученную систему уравнений относительно $\sigma_{\theta\theta}^\vee(p, 0)$, $\sigma_{r\theta}^\vee(p, 0)$, имеем

$$\sigma^\vee(p) = B(p) v^\vee(p), \quad B(p) = \|B_{ij}(p)\| \quad (i, j = 1, 2) \quad (1.9)$$

$$v(r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} [u_\theta(r, +0) - u_\theta(r, -0)] \\ \frac{\partial}{\partial r} [u_r(r, +0) - u_r(r, -0)] \end{pmatrix}, \quad \sigma(r) = \begin{pmatrix} \sigma_{\theta\theta}(r, 0) \\ \sigma_{r\theta}(r, 0) \end{pmatrix}$$

Для получения интегральных уравнений задачи нужно, применяя к (1.9) формулу обращения (1.3), выразить компоненты тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}(r, 0)$, $\sigma_{r\theta}(r, 0)$ через $v(s)$ и приравнять их к функциям $g_1(r)$, $g_2(r)$, заданным условиями (1.2)

$$\sigma(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} r^{-p-1} B(p) v^\vee(p) dp, \quad -\varepsilon < \sigma < 0 \quad (1.10)$$

Поскольку $v(s) = 0$ при $0 < s < l_1$ и при $l_2 < s < \infty$, то $v^\vee(p)$ — целая функция и $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} v^\vee(\sigma + iy) = 0$ ($y \rightarrow \pm\infty$) при всех σ ; $B(\sigma + iy)$ ограничена при всех σ ; вследствие этого нетрудно убедиться в том, что в формуле (1.10) в качестве пути интегрирования можно выбрать мнимую ось $\operatorname{Re} p = 0$.

Замена $v^\vee(p)$ по первой формуле (1.3) и формальное изменение порядка интегрирования в формуле (1.10) дает интегральное уравнение относительно $v(s)$; однако при этом возникают расходящиеся интегралы в ядре. Поэтому предварительно выделим из матричной функции некоторые постоянные слагаемые. Содержащие их повторные интегралы можно преобразовать к одномерным сингулярным интегралам и внеинтегральным членам. Повторные интегралы, в которые входит оставшаяся часть $B(p)$, уже допускают перемену порядка интегрирования.

Введем обозначения

$$B^{(1)}(y) = \frac{1}{2} [B(iy) + B(-iy)], \quad B^{(2)}(y) = \frac{1}{2i} [B(iy) - B(-iy)]$$

$$M^{(h)} = (-1)^{h-1} \lim_{y \rightarrow \infty} B^{(h)}(y), \quad F^{(h)}(y) = (-1)^{h-1} B^{(h)}(y) - M^{(h)} \quad (h=1, 2)$$

$$M_{ij}^{(1)} = a e_{ij3}, \quad M_{ij}^{(2)} = b \delta_{ij} \quad (i, j=1, 2), \quad a = -c_1 / (-c_1^2 + c_2^2)$$

$$b = \frac{c_2}{(-c_1^2 + c_2^2)}, \quad c_1 = \sum_{h=1}^2 (-1)^{h-1} \frac{\kappa_h - 1}{4\mu_h}, \quad c_2 = \sum_{h=1}^2 \frac{\kappa_h + 1}{4\mu_h}$$

Здесь e_{ij3} — символы Леви — Чивита, δ_{ij} — символы Кронекера [8]. Воспользуемся определением изображения по Меллину $v^\vee(s)$, после чего подставим в формулу (1.10) $\sigma = 0$, $p = iy$, $B(p) = B^{(1)}(y) + iB^{(2)}(y)$. Если собственный интеграл по y представить как предел при $Y \rightarrow \infty$ интеграла по отрезку $[-Y, Y]$, то можно изменить порядок интегрирования и использовать четность $B^{(1)}(y)$ и нечетность $B^{(2)}(y)$. Это дает

$$\sigma(r) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_0^Y \left\{ \frac{1}{\pi r} \int_0^y \left[B^{(1)}(y) \cos\left(y \ln \frac{s}{r}\right) - B^{(2)}(y) \sin\left(y \ln \frac{s}{r}\right) \right] dy \right\} v(s) ds \quad (1.11)$$

Подстановка в (1.11) $B^{(1)}(y) = M^{(1)} + F^{(1)}(y)$ и $B^{(2)}(y) = -M^{(2)} - F^{(2)}(y)$ с учетом тождеств

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\pi r} \int_0^Y \cos \left(y \ln \frac{s}{r} \right) dy \right] v(s) ds = v(r)$$

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\pi r} \int_0^Y \sin \left(y \ln \frac{s}{r} \right) dy \right] v(s) ds = \frac{1}{\pi r} \int_0^{\infty} \left[\frac{v(s)}{\ln(s/r)} \right] ds$$

и того, что предельный переход и интегрирование по s перестановочны, дает

$$\sigma(r) = M^{(1)} v(r) + \frac{1}{\pi r} M^{(2)} \int_0^{\infty} \left[\frac{v(s)}{\ln(s/r)} \right] ds + \frac{1}{\pi r} \int_0^{\infty} L \left(\ln \frac{s}{r} \right) v(s) ds \quad (1.12)$$

$$L(\alpha) = \|L_{ij}(\alpha)\| = \int_0^{\infty} \left[F^{(1)}(y) \cos \left(y \ln \frac{s}{r} \right) + F^{(2)}(y) \sin \left(y \ln \frac{s}{r} \right) \right] dy \quad (i, j=1, 2)$$

Если $0 < r < l_1$, $l_2 < r < \infty$, то $u_i(r, +0) = u_i(r, -0)$ ($i=r, \theta$). Это дает возможность преобразовать формулу для $\sigma(r)$:

$$\sigma(r) = M^{(1)} v(r) + \frac{1}{\pi r} M^{(2)} \int_{l_1}^{l_2} \left[\frac{v(s)}{\ln(s/r)} \right] ds + \frac{1}{\pi r} \int_{l_1}^{l_2} L \left(\ln \frac{s}{r} \right) v(s) ds \quad (1.13)$$

и вывести

$$\int_{l_1}^{l_2} v(s) ds = \int_0^{\infty} v(s) ds = 0 \quad (1.14)$$

Окончательно, делая замену переменных

$$r = \sqrt{l_1 l_2} \exp(\lambda x), \quad s = \sqrt{l_1 l_2} \exp(\lambda t), \quad \lambda = 1/2 \ln(l_2/l_1)$$

и обозначая

$$e^{\lambda x} [\sigma_{\theta\theta}(r, 0) - i\sigma_{r\theta}(r, 0)] = f(x), \quad e^{\lambda x} [v_r(r) + i v_\theta(r)] = \varphi(x)$$

$$K_{2,1}(x, t) = \frac{\lambda}{2} \{ L_{12}[\lambda(t-x)] \pm L_{21}[\lambda(t-x)] \pm i L_{11}[\lambda(t-x)] - i L_{22}[\lambda(t-x)] \} \quad (1.15)$$

можно получить уравнение с разностным ядром

$$f(x) = a\varphi(x) + \frac{b}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 [K_1(x, t)\varphi(t) + K_2(x, t)\overline{\varphi(t)}] dt \quad (1.16)$$

и дополнительное условие

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt = 0 \quad (1.17)$$

Соотношение (1.16) является сингулярным интегральным уравнением относительно неизвестной комплексной функции $\varphi(t)$ ($-1 < t < 1$). Функция $f(x)$ находится по первой формуле (1.15), в которой $\sigma_{\theta\theta}(r, 0)$ и $\sigma_{r\theta}(r, 0)$ заменяются на $g_1(r)$ и $g_2(r)$ соответственно. Решение $\varphi(t)$ отыскивается в классе функций h_0 [9], имеющих в точках ± 1 интегрируемые особенности. Существует бесконечное множество таких решений, причем каждое из них имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \psi(t)w(t), \quad w(t) = (1-t)^{-1/2+i\omega} (1+t)^{-1/2-i\omega} = \\ &= \{ \cos \ln[(1-t)/(1+t)] + i \sin \ln[(1-t)/(1+t)] \} / \sqrt{1-t^2} \\ \omega &= \frac{1}{2\pi} \ln[(b+a)/(b-a)] \quad (-1 < t < 1) \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $\psi(t)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$. Это следует [9, 10] из того факта, что ядра $K_1(x, t)$, $K_2(x, t)$ и функция $f(x)$ удовлетворяют условию Гельдера при $x, t \in [-1, 1]$; последнее верно, если $g_k(r)$ ($k=1, 2$) удовлетворяют условию Гельдера при $r \in [l_1, l_2]$. Выбор единственного решения, имеющего физический смысл, осуществляется при помощи дополнительного условия (1.17).

2. Метод численного решения системы интегральных уравнений. Для численного решения уравнения (1.16) был применен метод, близкий к предложенному ранее¹ для решения сингулярного интегрального уравнения, к которому сводится осесимметричная задача о трещине на границе раздела слоев в многослойной среде.

Используем представление (1.18) решения, в котором выделена функция $w(t)$, учитывающая его асимптотику вблизи концов трещины, и выберем в качестве новой неизвестной функцию $\psi(t)$. Сведем далее уравнение (1.16) к системе линейных алгебраических уравнений, аппроксимируя интегралы при помощи квадратурных формул и осуществляя коллокацию.

Для этого сначала дадим регулярное представление входящего в (1.16) сингулярного интеграла, пользуясь легко проверяемым тождеством

$$a\varphi(x)w(x) + \frac{b}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\psi(t)w(t)}{t-x} dt = \frac{b}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x} w(t) dt \quad (2.1)$$

Отметим, что этот прием применялся при численном решении одномерных сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах [11].

Для интеграла (2.1) построим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^1 \frac{\psi(t)-\psi(x_h)}{t-x_h} w(t) dt = \sum_{j=-2n}^{2n} C_{hj} \psi(x_j) \quad (2.2)$$

¹ См. В. М. Вайншельбаум, Р. В. Гольдштейн «Об одном классе смешанных осесимметричных задач теории упругости для многослойной среды (трещина на границе раздела слоев; штамп, сцепленный с многослойным основанием)». М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1975, препринт № 61.

В. М. Вайншельбаум, Р. В. Гольдштейн «Об одном классе смешанных осесимметричных задач теории упругости для многослойных сред». VI Всес. конф. по прочностим и пластичности. Тезисы докл. М., 1975.

основанную на квадратичной интерполяции $\psi(t)$ на каждом из $2n$ равных интервалов, составляющих отрезок $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \psi(x_{j-1}) [2n^2(t-x_j)(t-x_{j+1})] - \psi(x_j) [4n^2(t-x_{j-1})(t-x_{j+1})] + \\ & + \psi(x_{j+1}) [2n^2(t-x_{j-1})(t-x_j)], \text{ если } t \in \Delta_j, \\ \Delta_j = & [x_j - 1/(2n), x_j + 1/(2n)]. \quad (j = -2n+1, -2n+3, \dots, 2n-1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Узлы квадратурных формул и точки коллокации выбраны совпадающими и равными

$$x_j = j/(2n) \quad (j = -2n, -2n+1, \dots, 2n) \quad (2.4)$$

Для получения коэффициентов C_{kj} требуется вычислить интегралы по отрезкам Δ_j от произведений $w(t)$ на функции вида $Q(t)/(t-x_k)$, где $Q(t)$ — квадратичный полином. Если $x_h \in \Delta_j$, то $Q(t)$ содержит множитель $(t-x_h)$ и соответствующая функция — полином; следовательно, нет необходимости вычислять сингулярные интегралы.

Для вычисления регулярных интегралов, входящих в уравнение (1.16) и дополнительное условие (1.17), используем квадратурные формулы

$$\int_{-1}^1 \Phi(t) w(t) dt = \sum_{j=-2n}^{2n} d_j \Phi(x_j)$$

они также основаны на интерполяции (2.3). Осуществляя коллокацию, получим систему $4n+1$ линейных уравнений для определения $4n+1$ неизвестных $\psi(x_j)$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=-2n}^{2n} \left\{ \left[C_{kj} + d_j \frac{i}{b} K(x_k, x_j) \right] \psi(x_j) + \bar{d}_j \frac{i}{b} K_2(x_k, x_j) \overline{\psi(x_j)} \right\} = \\ = \frac{\pi i}{b} f(x_k) \quad (k = -2n, -2n+1, \dots, 2n) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Дополнительное условие

$$\sum_{j=-2n}^{2n} d_j \psi(x_j) = 0 \quad (2.6)$$

включается в систему (2.5) вместо одного из уравнений (соответствующего $k=0$). В полученной системе разделяются действительная и мнимая части и в качестве новых неизвестных выбираются $\operatorname{Re} \psi(x_j)$, $\operatorname{Im} \psi(x_j)$. Таким образом получается система $8n+2$ уравнений с $8n+2$ действительными неизвестными, которая решается методом Гаусса.

Если найдена функция $\psi(t)$, то по формуле (1.15) можно определить $v(s)$ ($l_1 < s < l_2$); первое равенство (1.12) дает возможность определить $\sigma(r)$ ($0 < r < l_1$, $l_2 < r < \infty$).

Нетрудно определить асимптотическое поведение напряжений у концов трещины на линии раздела клиньев

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, 0) - i\sigma_{r\theta}(r, 0) = \\ = \mp i \sqrt{b^2 - a^2} e^{\pm \lambda} 4^{\pm i\omega} \left(\frac{\pm \lambda}{e^{\pm 2\lambda} - 1} \right)^{1/2 \pm i\omega} \psi(\mp 1) \left(\frac{h}{L} \right)^{1/2 \mp i\omega} + O(1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

где верхние знаки выбираются при $h=l_1-r \rightarrow +0$, нижние — при $h=r-l_2 \rightarrow +0$; через L обозначена половина длины трещины $(l_2-l_1)/2$.

Таблица 1

θ_1	θ_2	R_{11}	R_{12}	R_{21}	R_{22}
15°	15°	52.7 45.2 —	20.7 18.1 —	7.01 5.32 —	3.99 3.07 —
		15.0 13.4 —	8.92 8.05 —	3.89 2.90 —	2.87 2.24 —
15°	180°	24.9 38.4 47.9	10.3 15.4 18.3	2.79 3.88 4.60	1.83 2.27 2.48
		7.92 11.5 12.6	5.01 6.97 7.54	1.71 2.04 2.10	1.48 1.67 1.67
90°	15°	27.7 9.21 —	11.4 4.39 —	3.21 2.02 —	1.95 1.45 —
		8.58 3.69 —	5.34 2.59 —	1.76 1.38 —	1.47 1.24 —
90°	180°	1.38 1.48 1.44	1.16 1.20 1.18	1.37 1.48 1.52	1.15 1.20 1.21
		1.13 1.16 1.15	1.08 1.09 1.08	1.13 1.16 1.16	1.07 1.09 1.09

Таблица 2

l_1 / L	E_2 / E_1	R_{11}	R_{12}	R_{21}	R_{22}
0.4	100 000	41.3	16.5	4.13	2.37
0.4	100	41.0	16.4	4.10	2.36
1	100 000	12.3	7.39	2.11	1.71
1	100	12.2	7.34	2.10	1.71

Концентрация напряжений у каждой из вершин трещины характеризуется двумя действительными числами — коэффициентами интенсивности напряжений N_1, N_2 :

$$N_1 + iN_2 = \lim [\sigma_{\theta\theta}(r, 0) - i\sigma_{r\theta}(r, 0)] / (h/L)^\gamma \quad (2.8)$$

где $h = l_1 - r \rightarrow +0$, $h = r - l_2 \rightarrow +0$, а $\gamma = \alpha$, $\gamma = \beta$ соответственно.

Удельное изменение упругой энергии тела при продвижении конца трещины определяется формулой (см. [3]):

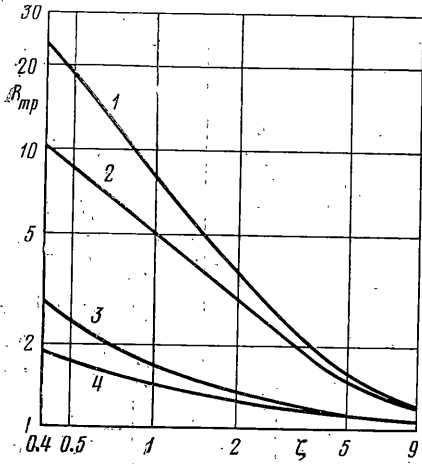
$$\delta W / \delta S = (\pi/2b) (N_1^2 + N_2^2) \quad (2.9)$$

Вычисления проводились для случаев нагружения берегов трещины равномерной нормальной нагрузкой $\sigma_{\theta\theta} = \text{const}$, $\sigma_{r\theta} = 0$ (нормальное нагружение) и равномерной касательной нагрузкой $\sigma_{r\theta} = \text{const}$, $\sigma_{\theta\theta} = 0$ (касательное нагружение). В каждом из этих случаев $N_1, N_2, \delta W / \delta S$ для каждого конца трещины зависят от $l_1, L, \theta_k, \mu_k, \nu_k$ ($k=1, 2$). Если $l_1 \rightarrow \infty$, а остальные параметры неизменны, то $\lambda \rightarrow 0$ и сингулярное интегральное уравнение (1.16) переходит, согласно (1.15), в характеристическое [9, 10]. Решив его [9, 10] (см. также [12]), можно вычислить значения $N_1 = N_1^{(0)}$, $N_2 = N_2^{(0)}$, $\delta W / \delta S = \delta W^{(0)} / \delta S$.

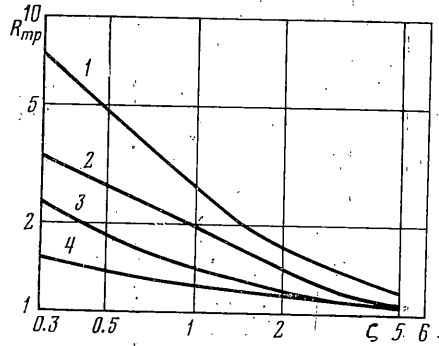
В качестве окончательных результатов приводятся безразмерные величины $R_{mp} = (\delta W / \delta S)_{mp} / (\delta W^{(0)} / \delta S)_{mp}$ в зависимости от $E_k = 2(1 + \nu_k) \mu_k$ — модулей Юнга материалов клиньев, $\nu_k, \theta_k, l_1 / L$ ($k, m, p=1, 2$). Значение $m=1$ соответствует случаю нормального нагружения, $m=2$ соответствует случаю касательного нагружения. При $p=1$ рассматривается ближний к вершине клиньев конец трещины ($r=l_1$); при $p=2$ — дальний конец ($r=l_2$).

3. Результаты расчетов. Все вычисления проводились на ЭЦВМ БЭСМ-4М. В расчетах бралось $n=4$ (17 узлов). Для проверки точности осуществлялось сравнение с результатами счета при $n=3$ (13 узлов). При этом различие в коэффициентах интенсивности напряжений находилось в пределах 1.5% (при $E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2 = 0.3, \theta_1 = 15^\circ, \theta_2 = 165^\circ, 2l_1 \sin \theta_1 / (l_2 - l_1) = 0.1$).

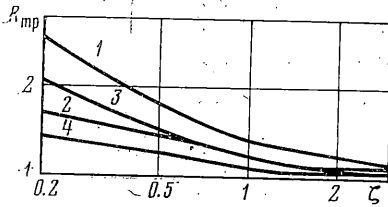
При указанных значениях параметров рассматриваемая задача сводится к задаче о прямолинейной трещине в упругой полуплоскости. Сравнение с результатами,



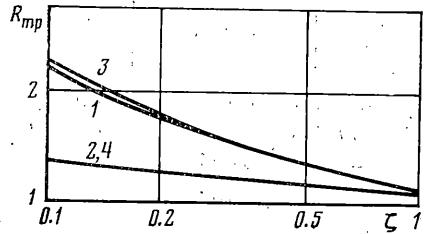
Фиг. 1



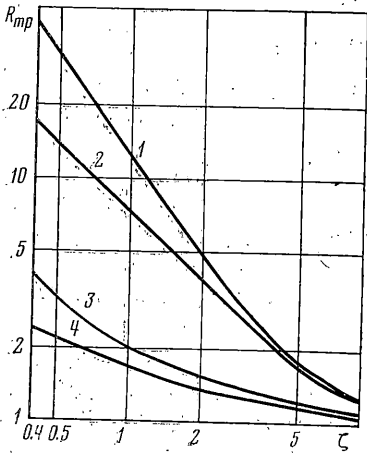
Фиг. 2



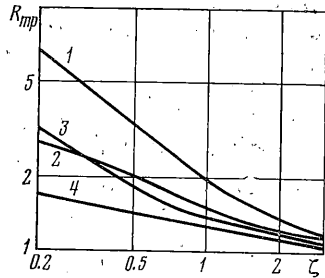
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



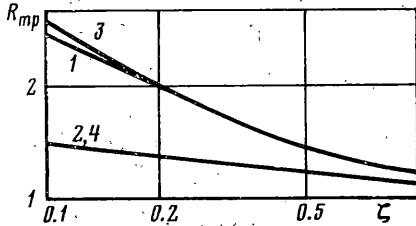
Фиг. 6

полученными другим способом [13], показывает, что при $n=4$ различие в коэффициентах интенсивности напряжений не превышает 0.2%. При приближенном вычислении значений ядер и коэффициентов квадратурных формул ставилось условие получения четырех правильных значащих цифр в значениях R_{mp} . На фиг. 1–4 показаны значения R_{mp} при $E_2/E_1=1$, $\nu_1=\nu_2=0.3$, $\theta_2=180^\circ$, $\theta_1=15, 30, 60, 90^\circ$ соответственно. На фиг. 5–8 показаны R_{mp} при $E_2/E_1=100\,000$, $\nu_1=0.5$, $\nu_2=0.3$, $\theta_2=180^\circ$, $\theta_1=15, 45, 90, 135^\circ$ соответственно. На всех фигурах цифры 1, 2, 3, 4 указывают на $R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$ соответственно; аргументом является $\zeta=l_1/L$; масштаб по осям логарифмический.

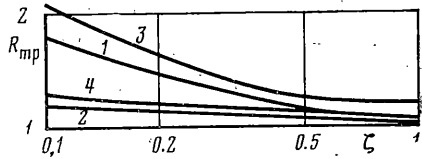
В табл. 1 приведены значения R_{mp} для трех комбинаций упругих постоянных. В каждой клетке таблицы имеются три столбца, каждый из которых содержит два числа. Номер столбца внутри клетки указывает на номер комбинации упругих постоянных: $E_2/E_1=1, \nu_1=0.5, \nu_2=0.3$; $E_2/E_1=10, \nu_1=0.5, \nu_2=0.3$; $E_2/E_1=1000, \nu_1=\nu_2=0.3$. Верхнее число в столбце соответствует $l_1/L=0.4$; нижнее число соответствует $l_1/L=1$. В табл. 2 приведены значения R_{mp} при $\nu_1=0.5, \nu_2=0.3, \theta_1=15^\circ, \theta_2=180^\circ$.

Результаты счета позволяют сделать следующий вывод: при возрастании l_1 и неизменных L, θ_k, E_k, ν_k значения R_{mp} монотонно убывают. При этом если минимальное расстояние от конца трещины $r=l_1$ до границы составного тела не менее $1.5L$, то $1 < R_{mp} < 1.3$ ($m, p=1, 2$).

Сравнение значений R_{mp} ($m, p=1, 2$) при $\theta_1=15^\circ, \theta_2=180^\circ, l_1/L=0.4$ и $l_1/L=1$ и различных значениях упругих постоянных дает основание заключить следующее.



Фиг. 7



Фиг. 8

При увеличении коэффициента Пуассона второго клина (ν_2) от 0.3 до 0.5 ($E_2 \geq E_1$) значения R_{mp} уменьшаются для всех $m, p=1, 2$ при малых l_1 ($l_1/L=0.4$); при больших l_1 ($l_1/L=1$) увеличение ν_2 приводит к уменьшению R_{1p} и к незначительному (до 3%) увеличению R_{2p} ($p=1, 2$). Увеличение E_2/E_1 (от 1 до 100 000) при сохранении коэффициентов Пуассона ($\nu_1=0.5, \nu_2=0.3$) приводит к возрастанию R_{mp} ($m, p=1, 2$); от 80 до 85% этого приращения происходит при увеличении E_2/E_1 до 10.

Численные результаты показывают, что если отношение E_2/E_1 велико, то естественно R_{mp} ($m, p=1, 2$) слабо зависят от E_2/E_1 и θ_2 . Это означает, что при больших E_2/E_1 второй клин можно считать абсолютно жестким и не учитывать конкретного значения E_2/E_1 (лишь бы оно было достаточно большим), а также значений θ_2 и ν_2 . На практике можно предполагать, что второй клин абсолютно жесткий при $E_2/E_1 \geq 100$; при этом ошибка в R_{mp} составит не более 1%.

Поступила 27 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

- Williams M. L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. Bull. Seismol. Soc. America, 1959, vol. 49, No. 2.
- Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 1.
- Салганик Р. Л. О хрупком разрушении склеенных тел. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
- Моссаковский В. И., Рыбка М. Т. Обобщение критерия Гриффитса — Снеддона на случай неоднородного тела. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
- Erdogan F., Gupta G. D. Bonded wedges with an interface crack under anti-plane shear loading. Internat. J. Fracture, 1975, vol. 11, No. 4.
- Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968.
- Храпков А. А. Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
- Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1973.
- Мухомелидзе Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
- Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., «Наука» 1977.
- Фан Ван Хан. О применении метода замены интеграла конечной суммой к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений. Вестн. МГУ. Математика и механика, 1969, № 3.
- Карпенко Л. Н. Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
- Ashbaugh N. Stress solutions for a crack at an arbitrary angle to an interface. Internat. J. Fracture, 1975, vol. 11, No. 2.