

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

О. Д. ТАНАНАЙКО

(Ленинград)

Известно, что метод конечных элементов в настоящее время служит одним из наиболее распространенных подходов к приближенному решению многих задач математической физики. В частности, при решении плоской задачи теории упругости широко используются «симплексный» и «комплексный» треугольные элементы, а также «мультиплексный» прямоугольный элемент [1]. При этом наименьшее число узлов (на единицу больше размерности пространства) имеют элементы симплексных моделей. Наряду с конечноэлементными широко используются различные стержневые аналоги. Так, в [2-6] рассмотрены модели в виде шарнирно-стержневых ферм, а в [7-8] — в виде ортогональных рам с дополнительными диагоналями в каждой ячейке¹. Различные варианты бездиагональных моделей предложены в [9-11].

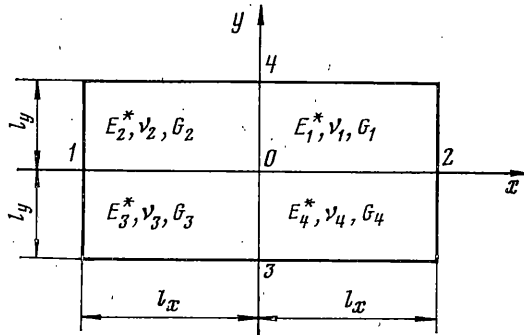
В данной статье указывается на возможность построения двухузловых конечных элементов, применение которых может в ряде случаев оказаться рациональным в отношении порядка разрешающей системы уравнений и точности получаемого результата. Подход, основанный на применении двухузловых элементов, можно рассматривать как обобщение предложенной ранее стержневой модели [12], сфера строгого применения которой ограничена условием $\nu=0$ (влияние коэффициента Пуассона в физических зависимостях для нормальных напряжений игнорируется). Ниже рассматривается общий случай неоднородного изотропного материала с произвольными значениями упругих констант. При этом элементы модели оказываются объектами более сложной природы, чем обычные стержни, но модель в целом сохраняет свою стержневую специфику, что находит отражение прежде всего в ее топологии. В связи с этим элементы описываемой модели называются ниже «квазистержнями», а сама она — «квазистержневой моделью».

1. Фрагмент сетки, образованной осями квазистержней, показан на фиг. 1. Квазистержни каждого из двух направлений должны целиком заполнить плоскую область, поэтому горизонтальные квазистержни имеют ширину $b_x=l_y$, а вертикальные — $b_y=l_x$. Упругие свойства материала (модуль Юнга E , модуль сдвига G , коэффициент Пуассона $\nu=E/2G-1$) считаются, вообще говоря, неодинаковыми в разных точках плоской области. В принимаемой расчетной схеме значения каждой из констант осредняются в пределах одной ячейки (см. фиг. 1, где вместо модуля Юнга указаны «приведенные» модули $E_i^*=E_i/(1-\nu_i^2)$). Следовательно, каждый квазистержень является «составным», так как образующий его материал имеет различные свойства по разные стороны от продольной оси квазистержня. Внешняя распределенная в объеме нагрузка заменяется сосредоточенными узловыми силами P_x и P_y (погрешность такой замены, часто практикуемой и в методе конечных элементов, пропорциональна квадрату длины стороны ячейки).

¹ См. также Тер-Эммануильян Н. Я., Ицков И. Е. Построение стержневых моделей континуальных сред на основе МКЭ. VII Всес. научн. конф. по применению ЭВМ в механике твердого деформируемого тела. Тезисы докл., Ташкент, Ин-т кибернетики АН УзССР, 1975.

Отдельный квазистержень шириной b и длиной l изображен на фиг. 2. Там же показаны положительные (в местных осях $\xi\eta$ данного квазистержня) реактивные силы и моменты, возникающие в его торцевых сечениях. Рассматривая простейшие деформированные состояния квазистержня (растяжение, сдвиг, изгиб) и считая, что в нем в отличие от обычного стержня при продольной деформации ϵ_ξ возникают нормальные напряжения $\sigma_\eta = \nu E^* \epsilon_\xi$ и соответствующие реактивные силы R_η , можно построить матрицу жесткости элемента квазистержневой модели.

Введем в рассмотрение матрицу-столбец реакций в начальном и конечном сечениях квазистержня $r = \{r_n r_h\}$, где $r_n = \{R_\xi^n R_\eta^n M^n\}$, $r_h = \{R_\xi^h R_\eta^h M^h\}$, а также матрицу-столбец узловых смещений $u = \{u_n u_h\} =$



Фиг. 1

$= \{u_\xi^n u_\eta^n \omega^n | u_\xi^h u_\eta^h \omega^h\}$. Здесь $u_\xi^n, u_\eta^n, \omega^n$ — линейные смещения вдоль осей локальной системы координат и угол поворота вокруг нормали к плоскости $\xi\eta$ в начальном сечении квазистержня; $u_\xi^h, u_\eta^h, \omega^h$ — то же в его конечном сечении.

Матрица жесткости K связывает введенные столбцы формулой $r = Ku$ или в блочной записи

$$\begin{Bmatrix} r_n \\ r_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ u_h \end{Bmatrix}$$

Приводим общий вид блока K_{ij} ($i, j = 1, 2$):

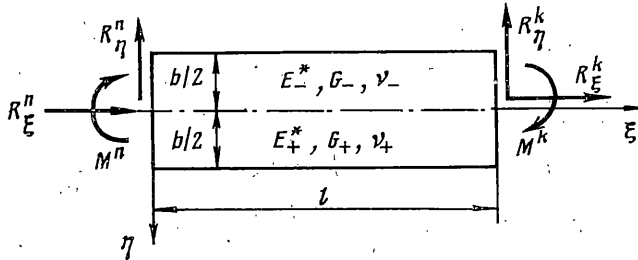
$$\begin{array}{ccc} \frac{(-1)^{i+j} E^* b h}{l} & 0 & \frac{(-1)^{i+j} \Delta E^* b^2 h}{8l} \\ \frac{(-1)^j \Delta (E^* \nu)_i h}{2} & 2(-1)^{i+j} G b h / l + \\ & + (-1)^{i+j} (E^* \nu)_i b h / l & - (-1)^j G b h + \\ & & + (-1)^j (E^* \nu)_i b h \\ \frac{(-1)^{i+j} \Delta E^* b^2 h}{8l} & (-1)^j G b h & \frac{1}{2} G b h l + \\ & & + \frac{(-1)^{i+j} E^* b^3 h}{12l} \end{array}$$

при записи приняты следующие обозначения: $E^* = (E_-^* + E_+^*)/2$; $G = (G_- + G_+)/2$; $\Delta E^* = E_-^* - E_+^*$; $\Delta (E^* \nu) = E_-^* \nu_- - E_+^* \nu_+$. Кроме того, $(E^* \nu)_1$ — значение $E^* \nu$, осредненное в пределах четырех ячеек сетки, примыкающих к начальному торцу квазистержня, а $(E^* \nu)_2$ — осредненное в пределах ячеек, примыкающих к его конечному торцу. Толщина рассчитываемой пластинки обозначена через h .

Несимметричность матрицы K отдельного квазистержня объясняется тем, что в нем, как указывалось выше, возникают пропорциональные коэффициенту Пуассона поперечные реакции R_η при продольной дефор-

мации ε_ξ , тогда как парные им реакции R_ξ при деформации ε_η включены в матрицу жесткости квазистержня, ортогонального данному (это связано с невозможностью выразить деформацию ε_η через перемещения узлов, лежащих на оси ξ). Таким образом, свойство взаимности реакций для модели в целом не нарушается, но взаимно равные реакции возникают не в одном и том же, а в разных квазистержнях из числа примыкающих к данному узлу.

2. Рассмотрим сходимость решения, основанного на квазистержневой модели, к точному решению плоской задачи теории упругости. С этой целью, используя приведенную матрицу жесткости, составим уравнения равновесия узла 0. Начнем с получения суммы моментов, приложенных



Фиг. 2

к узлу. Эти моменты возникают, во-первых, при сдвиге квазистержней, во-вторых, при их чистом изгибе, а также вследствие неоднородности материала в пределах квазистержня. В число моментов, действующих на узел 0, войдут, очевидно, моменты в примыкающих к этому узлу торцевых сечениях квазистержней 0-1, 0-2, 0-3 и 0-4. При этом сумма моментов, вызванных сдвигом, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & G_0 b_x b_y h \left(\frac{v_2 - v_1}{l_x} - 2\omega_0 - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - \frac{u_4 - u_3}{l_y} - \frac{\omega_3 + \omega_4}{2} \right) + \\ & + \frac{b_x b_y h}{2} \left[l_x^2 \frac{\delta' G}{l_x} \left(\frac{v_2 - 2v_0 + v_1}{l_x^2} - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2l_x} \right) - \right. \\ & \left. - l_y^2 \frac{\delta'' G}{l_y} \left(\frac{u_4 + 2u_0 + u_3}{l_y^2} + \frac{\omega_4 - \omega_3}{2l_y} \right) \right] \quad (2.1) \\ \delta' G = & \frac{G_1 + G_4}{2} - \frac{G_2 + G_3}{2}, \quad \delta'' G = \frac{G_1 + G_2}{2} - \frac{G_3 + G_4}{2} \end{aligned}$$

Здесь u_t, v_t, ω_t — линейные смещения и углы поворота узла t ($t=0, 1, 2, 3, 4$) в глобальных осях xy ; G_0 — среднее значение модуля сдвига в окрестности узла 0. Члены, включенные в квадратную скобку выражения для Σ_1 , имеют порядок на две единицы более высокий, чем остальные члены, и в дальнейшем не учитываются.

Сумма моментов, связанных с чистым изгибом, приводится к виду

$$\begin{aligned} \Sigma_2 = & \frac{b_x b_y h}{12} \left[b_x^2 \left(E_0^* \frac{\omega_2 - 2\omega_0 + \omega_1}{l_x^2} + \frac{\delta' E^*}{l_x} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2l_x} \right) + \right. \\ & \left. + b_y^2 \left(E_0^* \frac{\omega_4 - 2\omega_0 + \omega_3}{l_y^2} + \frac{\delta'' E^*}{l_y} \frac{\omega_4 - \omega_3}{2l_y} \right) \right] \quad (2.2) \end{aligned}$$

где $E_0^*, \delta' E^*, \delta'' E^*$ определяются аналогично $G_0, \delta' G, \delta'' G$.

Сумму Σ_3 моментов, возникающих за счет неоднородности материала, представим в форме

$$\Sigma_3 = \frac{b_x b_y h}{8} \left[b_x \left(\frac{E_1^* - E_4^*}{l_y} \frac{u_2 - u_0}{l_x} - \frac{E_2^* - E_3^*}{l_y} \frac{u_0 - u_1}{l_x} \right) + b_y \left(\frac{E_1^* - E_2^*}{l_x} \frac{v_4 - v_0}{l_y} - \frac{E_4^* - E_3^*}{l_x} \frac{v_0 - v_3}{l_y} \right) \right] \quad (2.3)$$

Дроби $(E_1^* - E_4^*)/l_y$ и $(u_2 - u_0)/l_x$ содержат в числителе односторонние разности и аппроксимируют значения соответствующих производных в узле 0 с погрешностью порядка l_x . Поскольку сказанное в равной мере относится и ко второму слагаемому в первой круглой скобке, то вся эта скобка является величиной порядка l_x , а вторая круглая скобка — величиной порядка l_y . Отсюда следует, что Σ_3 (как и Σ_2) содержит слагаемые, имеющие порядок малости на две единицы более высокий, чем первая круглая скобка в Σ_1 . При учете только этой скобки требование равенства нулю суммы моментов относительно узла 0 приводит к уравнению

$$G_0 b_x b_y h \left(\frac{v_2 - v_1}{l_x} - \frac{u_4 - u_3}{l_y} - 2\omega_0 - \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4}{2} \right) = 0 \quad (2.4)$$

и так как $(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)/4 \rightarrow \omega_0$, то в пределе получаем дифференциальное уравнение

$$\omega = 1/2 (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y) \quad (2.5)$$

показывающее, что предельные значения углов поворота узлов квазистержневой модели связаны с предельными значениями линейных смещений этих узлов той же зависимостью, которой в теории упругости связан с перемещениями точки плоской области средний угол поворота ее окрестности. Погрешность, с которой аппроксимируется в модели равенство (2.5), имеет порядок λ^2 , где $\lambda = \max(l_x, l_y)$.

3. Переходим к составлению уравнения равновесия, получаемого проектированием сил, приложенных к узлу 0, на ось x . Это уравнение может быть записано в виде

$$\Sigma_1^\circ + \Sigma_2^\circ + \Sigma_3^\circ + \Sigma_4^\circ + P_x = 0 \quad (3.1)$$

где сумма Σ_1° учитывает силы, возникающие при продольных деформациях горизонтальных квазистержней, Σ_2° — силы, связанные со сдвигом вертикальных квазистержней, Σ_3° — силы, появляющиеся в уравнениях равновесия в связи с учетом влияния коэффициента Пуассона, и Σ_4° — силы, оказывающиеся результатом неоднородности материала квазистержней. Указанные силы определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \Sigma_1^\circ &= b_x b_y h \left[E_0^* \frac{u_2 - 2u_0 + u_1}{l_x^2} + \frac{\delta' E^*}{l_x} \frac{u_2 - u_1}{2l_x} \right] \\ \Sigma_2^\circ &= 2b_x b_y h \left[G_0 \left(\frac{u_4 - 2u_0 + u_3}{l_y^2} + \frac{\omega_4 - \omega_3}{2l_y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\delta'' G}{l_y} \left(\frac{u_4 - u_3}{2l_y} + \frac{\omega_3 + 2\omega_0 + \omega_4}{4} \right) \right] \\ \Sigma_3^\circ &= b_x b_y h \left[\frac{1}{2} \left(\frac{E_1^* \nu_1 - E_2^* \nu_2}{l_x} \frac{v_4 - v_0}{l_y} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{E_4^* \nu_4 - E_3^* \nu_3}{l_x} \frac{v_0 - v_3}{l_y} \right) + (E^* \nu)_0 \left(\frac{u_4 - 2u_0 + u_3}{l_y^2} + 2 \frac{\omega_4 - \omega_3}{2l_y} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\Sigma_4^{\circ} = \frac{b_x b_y h}{8} \left[\frac{b_x^2}{b_y} \left(\frac{E_1^* - E_4^*}{l_y} \frac{\omega_2 - \omega_0}{l_x} - \frac{E_2^* - E_3^*}{l_y} \frac{\omega_0 - \omega_1}{l_x} \right) \right]$$

Аналогичным образом приходим к выводу, что все члены Σ_4° имеют порядок на две единицы больший, чем порядок членов, входящих в Σ_1° , Σ_2° , Σ_3° ; поэтому в дальнейшем Σ_4° не учитывается.

Подставляя выражения для Σ_1° , Σ_2° , Σ_3° в (3.1) и принимая во внимание, что сила P_x является равнодействующей объемных сил X , т. е. $P_x = X b_x b_y h$, получаем после сокращения на $b_x b_y h$ и перехода к пределу уравнение

$$E^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial E^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial G}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \omega \right) + E^* \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial (E^* \nu)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + X = 0 \quad (3.3)$$

или с учетом равенства (2.5)

$$E^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial E^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial G}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + E^* \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial (E^* \nu)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + X = 0 \quad (3.4)$$

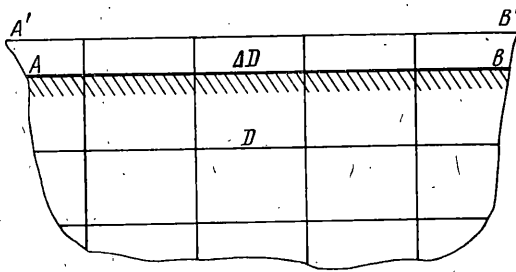
Это уравнение совпадает с первым уравнением Ламэ в плоской задаче теории упругости для случая неоднородного материала, когда упругие константы являются произвольными функциями координат. Если теперь просуммировать силы, приложенные к узлу 0 и действующие параллельно оси y , то придем в пределе ко второму уравнению Ламэ, получаемому из (3.4) путем подстановок $x \rightleftharpoons y$, $u \rightleftharpoons v$, $X \rightleftharpoons Y$. Порядок аппроксимации предельных уравнений, как и для уравнения (2.5), равен двум.

4. Кинематические граничные условия легко могут быть учтены путем постановки в узлах на контуре области соответствующих опорных закреплений. Что касается статических граничных условий, то нагрузки, действующие на опорной части контура, должны быть приведены в качестве заданных внешних сил к узлам, лежащим на границе области. Следовательно, учет контурных усилий выполняется принципиально так же, как и учет объемных сил. Такой прием можно рассматривать как разновидность «метода фиктивных областей» [13], основанного на присоединении к рассматриваемой области D дополнительных участков ΔD с физическими характеристиками, резко отличающимися от заданных в D .

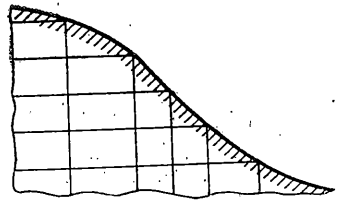
Действительно, пусть граница AB области D (фиг. 3) параллельна, например, оси x . Примем за границу расширенной области линию $A'B'$ (параллельную AB); в дополнительной области ΔD , заключенной между $A'B'$ и AB , будем считать упругие константы $\bar{E}^* = E^*/(1-\nu^2)$, $\bar{G} = E^*/2(1+\nu)$ отличными от констант E^* , G в области D . Узлы на границе $A'B'$ рассматриваются как неподвижные (для расширенной области все граничные условия оказываются кинематическими). Физически очевидно, что если контурные усилия заменены статически эквивалентными нагрузками в узлах на AB , то при $\bar{E}^* \ll E^*$, $\bar{G} \ll G$, $\nu \ll \nu$ решение для расширенной области должно мало отличаться от решения для области D . Для расширенной области сохраняют силу обычные теоремы сходимости и оценки погрешности метода сеток. В частности, если выполнены необходимые ограничения на степень гладкости искомого решения, то справедлива оценка [14]: $\|u - u_0\| \leq k_1 \lambda^2$, где u и u_0 — соответственно точное и конечно-

разностное решения, k_1 — некоторая постоянная, не зависящая от густоты сетки.

Пусть A — матрица системы записанных в перемещениях уравнений равновесия узлов квазистержневой рамы, заменяющей расширенную область $\bar{D}=D+\Delta D$. Пусть, далее A_0 — матрица конечно-разностных уравнений для той же области. Тогда, как следует из предыдущего, $A=A_0+\Delta A$, причем ΔA имеет порядок λ^2 . Если \bar{u} — решение, полученное для квазистержневой рамы, f — вектор свободных членов уравнений равновесия



Фиг. 3



Фиг. 4

(узловых сил P_x, P_y), то

$$u_0 = A_0^{-1}f, \quad \bar{u} = A^{-1}f = (E - A_0^{-1}\Delta A + \dots)u_0$$

Поэтому (при учете порядка малости ΔA) получаем оценку нормы разности конечно-разностного и квазистержневого решений

$$\|u_0 - \bar{u}\| = \|A_0^{-1}\Delta A u_0 - \dots\| \leq k_2 \lambda^2$$

Далее имеем

$$\|u - \bar{u}\| = \|(u - u_0) + (u_0 - \bar{u})\| \leq \|u - u_0\| + \|u_0 - \bar{u}\| \leq (k_1 + k_2)\lambda^2$$

Это означает, что скорость сходимости решения для квазистержневой рамы, заполняющей расширенную область \bar{D} , такая же, как скорость сходимости конечно-разностного решения. Полагая для этой рамы $\bar{E}^* = 0$, $\bar{G} = 0$, $\bar{v} = 0$, имеем оценку сходимости квазистержневого решения к точному для заданной области D .

При наличии криволинейного контура сетка осей квазистержневой рамы может оказаться нерегулярной (если во избежание понижения точности располагать граничные узлы в точках контура области, как показано на фиг. 4); однако нерегулярность сетки не вызывает принципиальных затруднений при численной реализации квазистержневого подхода.

Отличие рассмотренной модели от «обычного» метода конечных элементов состоит, во-первых, в наличии у каждого элемента всего двух узлов и, во-вторых, в том, что каждый узел имеет три степени свободы.

Для сопоставления возможностей обычного метода конечных элементов с возможностями квазистержневой модели рассмотрим прямоугольную область, на которую нанесена сетка, имеющая $(m+2) \times (n+2)$ узлов. Будем считать, что контур области закреплен, тогда перемещения контурных узлов отсутствуют и разрешающая система уравнений будет содержать по методу конечных элементов (при использовании симплексных треугольных элементов с линейной аппроксимацией перемещений) $N_1 = 2mn$ неизвестных, а для квазистержневой рамы — $N_2 = 3mn$. Однако при переходе к комплексным треугольным элементам с дополнительными узлами в середине каждой грани число неизвестных оказывается равным $N_3 = 2(4mn - 2m - 2n + 1)$, так, что если m, n достаточно велики, то $N_3 \gg N_2$.

Точность решения для симплексной и комплексной моделей резко снижается при наличии узких, вытянутых треугольников с малыми внутренними узлами. Что касается прямоугольных мультиплексных элементов, то простейшие из них обеспечивают точность не более высокую, чем симплекс, а усложненные мультиплексы дают

повышение точности ценой значительного увеличения порядка системы. Ясно также, что прямоугольные элементы несколько хуже аппроксимируют криволинейную границу.

Следует отметить, что многим конечным элементам свойственна неспособность передавать состояние чистого изгиба (в [15] реагирование конечных элементов на деформации, соответствующие чистому изгибу, названо «паразитическим сдвигом»). Можно показать, что этот недостаток сказывается тем ощутимее, чем больше отношение длин сторон прямоугольного элемента. В то же время элементы квазистержневой модели при любом отношении длин сторон точно воспроизводят чистый изгиб и, таким образом, в деформированных состояниях, близких к изгибу, сетка узлов для расчета по квазистержневой модели может быть принята менее плотной, чем для расчета по методу конечных элементов, а характер сгущения сеток не связан требованием близости формы ячейки к квадратной.

Поступила 15 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М., «Мир», 1976.
2. *Hrennikoff A.* Solution of problems of elasticity by the framework method. J. Appl. Mech., 1941, vol. 8, No. 4.
3. *McHenry D.* A lattice analogy for the solution of stress problems. J. Inst. Civil Engrs, 1943, vol. 21, No. 2.
4. *Шарпан И. А.* О возможности моделирования шарнирно-стержневой системой упругого континуума с произвольным значением коэффициента Пуассона. Тр. Ленинградск. инж.-строит. ин-та, 1969, № 60.
5. *Длугач М. И.* Розрахункова модель методу сіток. Прикл. механіка, 1956, т. 2, вип. 3.
6. *Смирнов А. С.* Об одной аналогии механики сплошных и дискретных сред. Тр. Московск. ин-та инж. геодезии, аэрофотосъемки и картографии, 1962, вып. 49.
7. *Мак-Кормик С. У.* Решение плоской задачи теории упругости. В сб.: Расчет строят. конструкций с применением электронных машин. Стройиздат, 1967.
8. *Yettam A. L., Hussain H. M.* Plane-framework methods of plates in extension. J. Engng Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1966, vol. 92, No. EM1.
9. *Музыченко Ю. Н.* О стержневой модели метода сеток. Тр. Ростовск. инж.-строит. ин-та, Ростов-на-Дону, 1961, вып. 19.
10. *Левин М. А.* Представление анизотропного тела в виде регулярной стержневой модели. Докл. АН БССР, 1964, т. 8, № 12.
11. *Гильман Г. Б.* Практические методы расчета балок-стенок по стержневым расчетным схемам. Строительство и архитектура, 1965, № 3.
12. *Тананайко О. Д.* Построение стержневой модели типа системы перекрестных полос конечной ширины для приближенного решения плоской задачи теории упругости. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3.
13. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М., «Наука», 1977.
14. *Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л.* Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., «Наука», 1965.
15. *Cook R.* Avoidance of parasitic shear in plane elements. J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1975, vol. 101, No. 6.