

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ ПУТЕМ ЧИСЛЕННОЙ  
РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**А. Я. АЛЕКСАНДРОВ, В. В. ШУШУНОВ**

*(Новосибирск)*

Численный метод решения линейных задач теории упругости [1-4] с использованием метода последовательных нагружений распространяется на решение геометрически нелинейных задач. На задачах, имеющих точное решение, проводится анализ эффективности применения методов Эйлера, Адамса — Мултона, Рунге — Кутты. Оценивается число необходимых нагружений и приводятся примеры решения смешанных и других основных плоских и пространственных осесимметричных задач. Исследован вопрос о выборе необходимого числа сил (при замене равномерно распределенных нагрузок сосредоточенными силами) и обусловленность используемых матриц.

Полагая, что весь интервал нагружения и деформирования тела может быть разбит на некоторое число этапов, для каждого из которых справедлива гипотеза пропорциональности приращений деформаций и напряжений, и принимая недеформированное состояние тела за начальное, решим линейную задачу теории упругости для первой ступени нагружения. Полученное таким образом деформированное состояние принимаем за исходное для следующей степени нагружения и т. д. Такой процесс продолжается до исчерпания всех ступеней нагружения с учетом поведения нагрузки на каждой из них. Правомочность описанного приема доказана в [5].

Решение линейной задачи на каждом этапе нагружения осуществляется численной реализацией метода интегральных уравнений. Отметим, что применяемая методика сведения интегрального уравнения задачи к системе линейных алгебраических уравнений вписывается в схему метода Крылова — Боголюбова [6].

На каждом этапе нагружения определялись проекции приращения перемещений срединных точек участков, на которые разбивалась поверхность тела. По этим перемещениям для каждой из проекций строились кубические интерполяционные сплайны, по которым находились приращения перемещений граничных точек участков и строился деформированный контур. Компенсирующие нагрузки, равномерно распределенные по участку, заменялись системой эквивалентных сосредоточенных сил.

Решение нелинейных задач методом последовательных нагружений эквивалентно решению задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка [7, 8], и потому здесь возможны различные способы интегрирования по этапам. Ниже рассматриваются: метод Эйлера, метод Рунге — Кутты и экстраполяционный метод Адамса — Мултона. «Запуск» этого метода (в случаях, не оговоренных особо) осуществляется при помощи метода Эйлера.

**1. Обоснование выбора числа сил.** При замене равномерно распределенных по участку компенсирующих нагрузок системой эквивалентных сосредоточенных сил возникает вопрос, сколько следует взять этих сил, чтобы такая замена не привела к слишком большим погрешностям в определении искомых нагрузок. В ряде работ [9, 10] выяснение этого вопроса проводится сравнением значений компонентов напряжений и перемещений, вычисленных при равномерно распределенных нагрузках и заменяющих их сосредоточенных силах. В данной работе применяется другой прием.

Будем считать, что матрица системы уравнений, формируемая от нагрузок, равномерно распределенных по участкам, является «точной» по

отношению к матрице, формируемой от нагрузок в виде сосредоточенных сил. Тогда погрешность в определении компенсирующих нагрузок может быть оценена по формуле [11, 12]:

$$\eta = \frac{\|\delta \Delta \mathbf{q}\|}{\|\Delta \mathbf{q}\|} \leq \frac{\nu_A}{1 - \nu_A \frac{\|\delta A_1\|}{\|A_1\|}} \left( \frac{\|\delta A_1\|}{\|A_1\|} + \frac{\|\delta f_1\|}{\|f_1\|} \right) \quad (1.1)$$

$$\nu_A = \|A_1\| \cdot \|A_1^{-1}\|, \quad \delta A_1 = A_2 - A_1$$

Здесь  $\nu_A$  — коэффициент обусловленности матрицы,  $A_2$  — матрица, формируемая от сосредоточенных сил,  $A_1$  — матрица, формируемая от равномерно распределенных нагрузок,  $\delta f_1$  — погрешность в определении правой части. Для векторов бралась евклидова норма, а для матриц — ей подчиненная. Выбор такой метрики обусловлен тем, что здесь при вычислении  $\nu_A$  не нужно обращать матрицу.

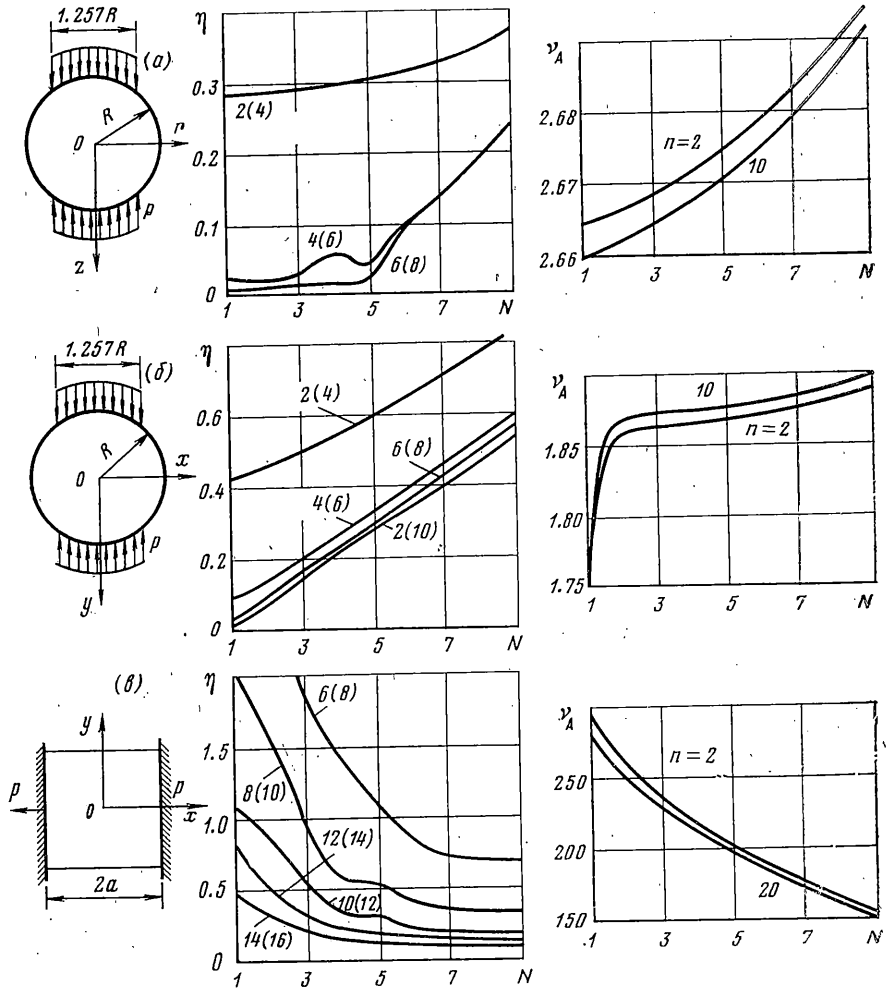
Воспользоваться, однако, этой формулой невозможно, так как отсутствуют необходимые для вычисления матрицы  $A_1$  выражения напряжений и перемещений от нагрузок, равномерно распределенных по некоторой кривой и расположенных в упругом пространстве или плоскости. Поэтому будем сравнивать между собой варианты приближенных решений. Например, матрицу, формируемую при четырех силах на участке, сравним с матрицей при числе сил, равном двум. Если, начиная с некоторого значения числа сил, его дальнейшее увеличение слабо влияет на погрешность, то это число сил и принимается за необходимое. Такой анализ проводится на каждом этапе нагружения, так как матрица в процессе нагружения изменяется.

На фиг. 1, а представлены результаты расчета по формуле (1.1) для осесимметричной пространственной задачи о сфере с нагрузкой, равномерно распределенной по поверхности двух сферических сегментов, расположенных у полюсов. Аналогичные результаты для диска, находящегося в условиях плоского деформированного состояния, показаны на фиг. 1, б. Значения  $\eta$  для задачи о растяжении квадратной пластинки, находящейся тоже в условиях плоского деформированного состояния, заземленной по противоположным сторонам и растягиваемой в своей плоскости, представлены на фиг. 1, в. Там же показано изменение коэффициента обусловленности  $\nu_A$  в зависимости от номера этапа нагружения  $N$  и числа сил на участках  $n$ .

В задаче о шаре при  $n=4$  и  $n=6$  (в скобках указано число сил на участках, при котором формировалась матрица  $A_1$ ) кривые достаточно близки, следовательно, в этой задаче можно принять  $n=4$ , так как дальнейшее увеличение не ведет к существенному уменьшению погрешности. В задаче о диске можно принять  $n=6$ . В этих задачах матрица от этапа к этапу нагружения ухудшается, а потому и погрешность в определении компенсирующих нагрузок увеличивается. Это непосредственно следует из анализа формулы (1.1). В задаче о квадратной пластинке принято  $n=8$ . Для этой задачи матрица от этапа к этапу улучшается. Решение указанных задач осуществляется по описанной выше методике.

Анализ изменения  $\nu_A$  в зависимости от числа сил на участках показывает, что замена равномерно распределенной нагрузки сосредоточенными силами в случае задач о шаре и квадратной пластинке ухудшает обусловленность матрицы, а в случае задачи о диске улучшает ее. Однако во всех рассмотренных случаях применяемый здесь способ численной реализации метода интегральных уравнений давал достаточно хорошо обусловленные матрицы, что позволяет считать получаемые результаты вполне достоверными.

Механические характеристики материала для всех задач были приняты  $E=9.8$  МПа,  $\nu=0.5$ . Нагрузка  $p$  в задаче о шаре равна 9.8 МПа, в задаче о диске 98 КН/М, квадратная пластинка удлинялась в два раза. Число участков, на которые разбивалась четверть контура (учитывалась симметрия), при решении задач о шаре и диске принималось равным пяти. В задаче о квадратной пластинке на части контура, где заданы пе-



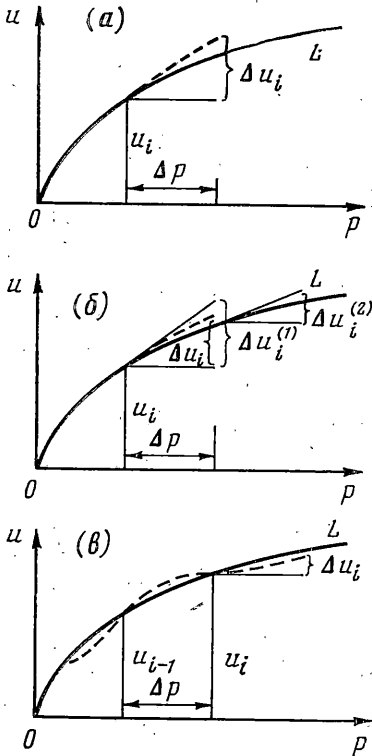
Фиг. 1

ремещения, бралось четыре участка, а там где задавались усилия — шесть (с учетом симметрии рассматривалась четверть контура).

**2. Сопоставление с точными решениями. Оценка необходимого числа нагружений.** Разрешающая система линейных алгебраических уравнений записывается относительно приращений компенсирующих нагрузок. Зная эти приращения, можно определить и соответствующие им приращения перемещений.

Положим, что зависимость перемещения  $U(p)$  какой-нибудь точки тела (в том числе и контурной) от нагрузки, действующей на тело, полученная в результате точного решения задачи, изображается кривой  $L$  (фиг. 2).

Если предположить, что на каждом этапе нагружения зависимость  $U(p)$  аппроксимируется линейной функцией (фиг. 2, а), то деформированное состояние после приложения  $i$ -й ступени нагрузки может быть найдено по формуле  $U_{i+1} = U_i + \Delta U_i$ , где  $\Delta U_i$  — приращения перемещений на  $i$ -м этапе нагружения. Описанная выше методика решения геометрически нелинейных задач в сущности представляет собой использование метода Эйлера. Известно [7], что метод Эйлера имеет погрешность порядка шага  $\Delta p$ . Поэтому для достижения необходимой точности интервал нагружения следует разбивать на достаточно большое число ступеней  $\Delta p$ .



Фиг. 2

Время решения задачи можно уменьшить и одновременно повысить точность при помощи Рунге — Кутты. В методе Эйлера используется информация о поведении функции  $U(p)$  только в начале шага  $\Delta p$ , применяя метод Рунге — Кутты, надо учитывать, кроме того, информацию в дополнительных точках  $\Delta p$ . Рассмотрим вариант этого метода второго порядка точности (фиг. 2, б).

На очередной  $i$ -й ступени нагружения прикладываем  $\Delta p$  к тому деформированному состоянию, которое приняли за начальное для  $i$ -го нагружения и решаем линейную задачу, т. е. делаем сначала то же, что и в методе Эйлера. В результате получим значения  $\Delta U_i^{(1)}$ . Используя формулу  $U_{i+1}^{(1)} = U_i + \Delta U_i^{(1)}$ , определяем деформированную форму, к которой прикладываем  $\Delta p$ , и в результате решения линейной задачи получаем  $\Delta U_i^{(2)}$ . После этого определяется деформированное состояние, принимаемое в качестве начального для следующей ступени нагружения:

$$U_{i+1} = U_i + 1/2 (\Delta U_i^{(1)} + \Delta U_i^{(2)}) \quad (2.1)$$

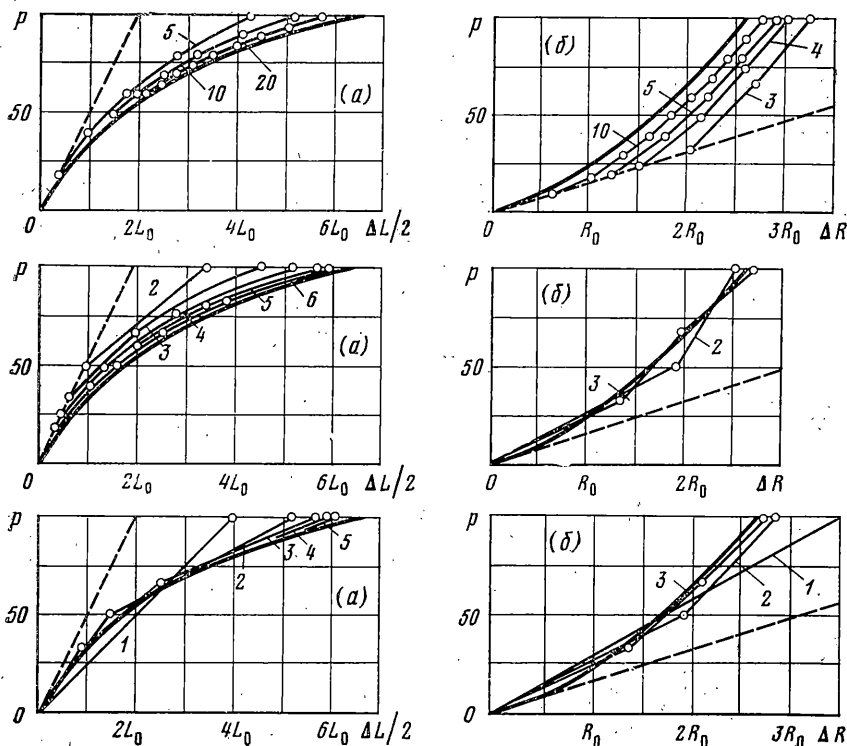
Погрешность такого способа есть величина порядка  $\Delta p^2$ . На каждом этапе нагружения необходимо решать линейную задачу два раза, в этом случае функция  $U(p)$  на отрезке  $\Delta p$  аппроксимируется параболой второй степени.

Применялся также вариант метода Рунге — Кутты четвертого порядка точности. В этом случае на каждом этапе нагружения необходимо решать линейную задачу уже четыре раза, а формула (2.1) записывается в этом случае так:

$$U_{i+1} = U_i + 1/6 (\Delta U_i^{(1)} + 2\Delta U_i^{(2)} + 2\Delta U_i^{(3)} + \Delta U_i^{(4)}) \quad (2.2)$$

Здесь  $\Delta U_i^{(1)}$  то же, что и  $\Delta U_i^{(1)}$  в формуле (2.1),  $\Delta U_i^{(2)}$  — решение линейной задачи для деформированного состояния  $U_{i+1}^{(1)} = U_i + 1/2 \Delta U_i^{(1)}$ ;

$\Delta U_i^{(3)}$  — то же для  $U_{i+1}^{(2)} = U_i + 1/2 \Delta U_i^{(2)}$ ;  $\Delta U_i^{(4)}$  — то же для  $U_{i+1}^{(3)} = U_i + \Delta U_i^{(3)}$ ,



Фиг. 3

На отрезке  $\Delta p$  функция  $U(p)$  аппроксимируется параболой четвертого порядка.

Существенным недостатком метода Рунге — Кутты является то, что на каждом этапе нагружения необходимо решать линейную задачу несколько раз. Если проведено несколько этапов нагружения, то можно воспользоваться имеющейся информацией о функции  $U(p)$  на предыдущих этапах и с ее учетом вычислять  $\Delta U_i$  (фиг. 2, в). В этом случае функция  $U(p)$  интерполируется многочленом на всем интервале (или его части) изменения нагрузки вплоть до  $i$ -й ступени нагружения и необходимо воспользоваться следующей формулой:

$$U_{i+1} = U_i + \sum_{j=0}^i b_j^i \Delta U_{i-j} \tag{2.3}$$

$$b_j^i = \frac{(-1)^j}{j!(i-j)!} \int_0^1 \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+i)(\alpha+j)^{-1} d\alpha$$

Здесь  $\Delta U_{i-j}$  — решения линейных задач на предыдущих и  $i$ -м нагружениях. Формула (2.3) учитывает все предыдущие  $\Delta U$ . Это есть экстраполяционный метод Адамса — Мултона. При использовании такого метода необходимо на каждом этапе нагружения решать линейную задачу только один раз и помнить значения  $\Delta U$  на предыдущих этапах. Погрешность здесь пропорциональна числу учитываемых  $\Delta U$ .

Получим, далее, точные решения некоторых простейших нелинейных задач и на них путем сравнения проиллюстрируем эффективность рассмотренных численных методов решения.

1. Стержень, растянутый (сжатый) равномерно распределенной нагрузкой  $p$ , приложенной к торцам.

Зависимость изменения площади поперечного сечения  $F$  от логарифмической деформации  $\varepsilon_1$  записывается так:  $F = F_0 \exp(-2\nu\varepsilon_1)$ , где  $F_0$  — площадь сечения недеформированного стержня,  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала стержня,  $\varepsilon_1 = \ln(1 + \varepsilon)$ . Отсюда находим

$$\frac{1}{2} d\Delta L = \frac{dP(L_0 + \Delta L)^{1+2\nu}}{EF_0 L_0^{2\nu}}, \quad dP = dp F_0 \quad (2.4)$$

где  $\Delta L$  — искомое изменение длины стержня,  $L_0$  — первоначальная длина стержня,  $E$  — модуль упругости. Интегрирование (2.4) дает

$$\frac{1}{2} \Delta L = L_0 \left[ \mp 1 \pm \left( 1 \mp 2\nu \frac{P}{EF_0} \right)^{-1/2\nu} \right] \quad (2.5)$$

В частном случае при  $\nu = 0$  получаем

$$\frac{1}{2} \Delta L = L_0 \left[ \mp 1 \pm \exp\left(\pm \frac{P}{EF_0}\right) \right] \quad (2.6)$$

что совпадает с решением аналогичной задачи в [13]. Верхние знаки берутся в случае растяжения, нижние — сжатия.

2. Сферическая полость в пространстве под внутренним давлением. В этом случае

$$\Delta R = R_0 \{ -1 + \sqrt{1 + [p(1 + \nu)]/E} \} \quad (2.7)$$

Здесь  $R_0$  — первоначальный радиус полости,  $\Delta R$  — его приращение,  $\nu$ ,  $E$  — коэффициент Пуассона и модуль упругости пространства,  $p$  — давление, относенное к первоначальной площади полости  $F_0$ .

3. Для стержня соответствующие формулы запишутся так (приращение нагрузки одинаковы):

в случае метода Эйлера

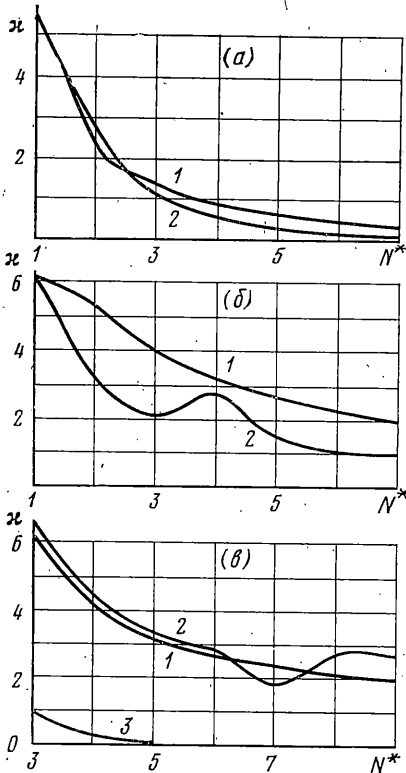
$$\Delta L_{i+1} = \Delta L_i + [\Delta P(L_i + \Delta L_i)]/EF_0$$

в случае метода Адамса — Мултона

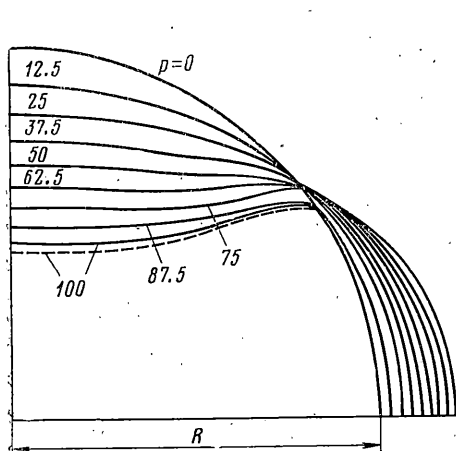
$$\Delta L_{i+1} = \Delta L_i + \sum_{j=0}^4 b_j^i \Delta L_{i-j}$$

в случае метода Рунге — Кутты второго порядка точности

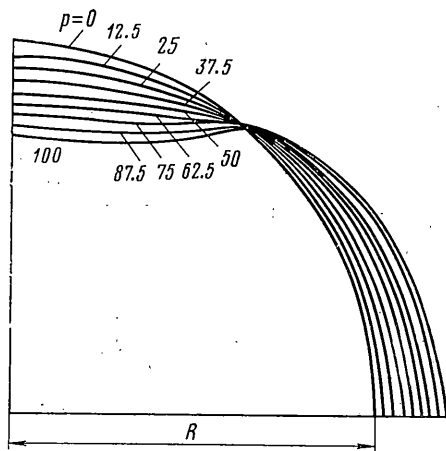
$$\Delta L_{i+1} = \Delta L_i + \frac{\Delta P L_i}{2EF_0} \left( 2 + \frac{\Delta P}{EF_0} \right)$$



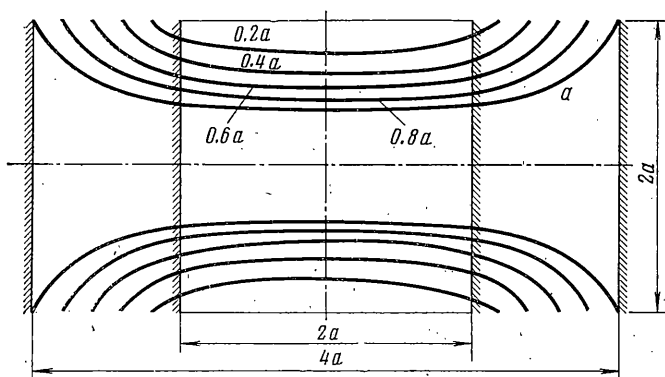
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Формулы записаны (в силу симметрии) для половинного удлинения. Обозначения величин прежние.

Результаты расчетов по данным формулам представлены на фиг. 3, а. Первому по вертикали соответствует метод Эйлера, второму — метод Адамса — Мултона, третьему — метод Рунге — Кутта. Сплошные линии соответствуют точному решению, пунктирные — линейной теории. Числа на остальных линиях указывают, какое число нагружений использовалось для решения. Для стержня принималось:  $\nu=0$ ,  $E=9.8$  МПа,  $P=981$  Н. Из этих графиков видно, что при применении метода Эйлера для уменьшения погрешности требуется существенное увеличение числа нагружений. Более быструю сходимость для этой задачи дают методы Адамса — Мултона и Рунге — Кутта.

Для полости аналогичные формулы запишутся так:  
в случае метода Эйлера

$$\Delta R_{i+1} = \Delta R_i + \frac{\Delta p(1+\nu)}{2E(R_i + \Delta R_i)}$$

в случае метода Адамса — Мултона

$$\Delta R_{i+1} = \Delta R_i + \sum_{j=0}^i b_j^i \Delta R_{i-j}$$

в случае метода Рунге — Кутты второго порядка точности

$$\Delta R_{i+1} = \Delta R_i + \frac{\Delta p(1+\nu)}{4E} \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_{i+1/2} [\Delta p(1+\nu)] / ER_i} \right)$$

Результаты расчетов показаны (фиг. 3, б). Для полости принималось:  $\nu=0.25$ ,  $E=9.8$  МПа,  $p=98$  МПа. Последовательность расположения графиков та же, что на фиг. 3, а. Как видно, быстрее сходится метод Рунге — Кутты. Представленные на втором графике (фиг. 3, б) результаты соответствуют методу Адамса — Мултона с «запуском» по Рунге — Кутту второго порядка точности. «Запуск» по Эйлеру дает несколько ухудшенные результаты.

На основе анализа рассмотренных примеров был принят в качестве основного метод Адамса — Мултона. О сходимости этого метода можно судить по результатам, представленным на фиг. 4, а—в (кривые 2, а — шар, б — диск, в — пластина). Здесь  $\kappa = \ln(1 + (s_{N^*+1} - s_{N^*}) \cdot 10^3)$ ,  $N^*$  — число нагружений, используемое для получения решения,  $s$  — длина контура.

Кривые 1 соответствуют методу Эйлера. В обеих задачах (шар и диск) принято  $N^*=8$ . В задаче о квадратной пластинке метод Эйлера в пределах рассмотренного числа нагружений не дал удовлетворительных результатов, поэтому для решения задачи был применен метод Рунге — Кутты четвертого порядка точности (фиг. 4, в; кривая 3), что позволило ограничиться  $N^*=5$ .

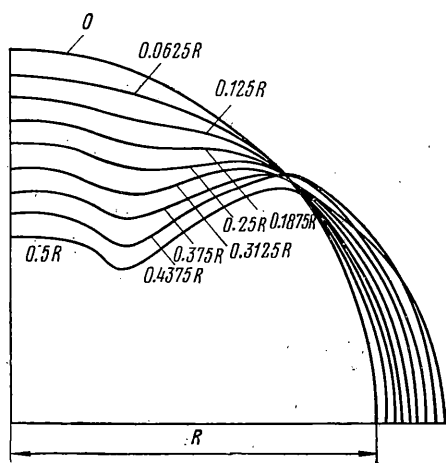
Механические характеристики, число участков и нагрузки принимались такими же, как в п. 1. Число сил принималось в соответствии с исследованиями п. 1. Оценка точности проводилась по разнице длин контуров, полученных за  $N^*$  и  $N^*+1$  нагружение.

4. Приведем в окончательном виде решения рассмотренных выше задач. На фиг. 5—7 показано изменение контуров (шара, диска и пластины) в процессе нагружения, причем на фиг. 5 показано (пунктирная линия) решение, которое дает метод Эйлера за такое же число нагружений, что и метод Адамса — Мултона.

Кроме того, была решена смешанная задача о шаре, сдавливаемом сфероидами штампами (фиг. 8). Устройство штампов не препятствует горизонтальным перемещениям шара. Число сил, участков и механические характеристики для этой задачи были такими же, как и в случае первой задачи о шаре. Интегрирование осуществлялось методом Адамса — Мултона.

Авторы признательны Б. М. Зиновьеву за помощь в работе.

Поступила 12 IV 1979



Фиг. 8



## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Я. Об одном приближенном методе решения плоских контактных задач теории упругости. Тр. Новосиб. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1955, вып. 11.
2. Александров А. Я. Некоторые решения осесимметричных контактных задач теории упругости. Тр. Новосиб. ин-та инж. ж.-д. трансп. 1955, вып. 11.
3. Александров А. Я. Решение основных трехмерных задач теории упругости для тел произвольной формы путем численной реализации метода интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 2.
4. Александров А. Я. Решение основных задач теории упругости путем численной реализации метода интегральных уравнений. В сб.: Успехи механики деформируемых сред, М., «Наука», 1975.
5. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
6. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962.
7. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М., «Мир», 1976.
8. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ, ч. 2. (Под ред. А. Ф. Смирнова). М., Стройиздат, 1976.
9. Антонов Н. И., Зиновьев Б. М. Точное и приближенное решения задачи о действии распределенных нагрузок внутри упругих пространства и плоскости. Тр. Новосиб. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1978, вып. 190/3.
10. Адлуцкий В. Я. О границах применимости кубатурной формулы прямоугольников при вычислении напряжений и перемещений от распределенных в упругом пространстве нагрузок. В сб.: Динамика и прочность машин. Изд. Днепропетровск. ун-та, 1977, вып. 2.
11. Ланкастер П. Теория матриц. М., «Наука», 1978.
12. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. М., «Наука», 1977.
13. Амиро И. Я., Варвак А. П. К задаче о больших деформациях идеально упругих тел. Проблемы прочности, 1971, № 9.