МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1980

УДК 534.014.5

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ВНЕШНЕМ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СЛУЧАЙНОМ ВОЗБУЖДЕНИЯХ

М. Ф. ДИМЕНТБЕРГ

(Москва)

Метод усреднения в сочетании с методом теории марковских процессов представляет собой эффективное средство анализа нелинейных стохастических систем. В частности, для «автономной» (не содержащей периодических воздействий) системы второго порядка с малым нелинейным демпфированием этот метод приводит к стохастическому уравнению первого порядка относительно амплитуды и позволяет найти в явном виде стационарную плотность вероятности амплитуды [1]. Однако простейший вариант метода усреднения, согласно которому в пределах каждого периода колебания рассматриваются как гармонические с фиксированной (не зависящей от амплитуды) частотой, оказывается не очень эффективным для систем с нелинейной жесткостью. В частности, для стохастически неустойчивой системы с линейным демпфированием и широкополосным случайным параметрическим возбуждением такой подход не позволяет описать эффект ограничения роста амплитуд колебаний за счет малой «жесткой» нелинейности восстанавливающей силы.

Вместе с тем существует и более общий вариант метода усреднения, согласно которому система рассматривается как квазиконсервативная, явная зависимость решения от времени вообще не анализируется, а усреднение проводится непосредственно по «быстрым» переменным состояния. Для стохастической системы второго порядка такой метод позволяет получить выражение в явном виде (в квадратурах) для стационарной плотности вероятности энергии [2, 3]. Однако это выражение весьма сложное для нахождения тех или иных статистических характеристик движения прямым анализом или численным расчетом.

В предлагаемой работе проведен приближенный анализ выражения для стационарной плотности вероятности амплитуды колебаний системы второго порядка, полученного в квазиконсервативном приближении. Входящие в это выражение интегралы взяты в конечном виде при помощи приближенного приема, точность которого соответствует точности метода гармонической линеаризации (гармонического баланса). Подробно рассмотрен случай системы с линейным демпфированием и кубически нелинейной жесткостью, одновременно возбуждаемой внешними и параметрическими случайными возмущениями. Дано сопоставление с некоторыми результатами моделирования на ЭЦВМ.

1. Рассмотрим колебания системы, описываемой уравнением

$$x^{\cdot\cdot}+h(x,\ x^{\cdot})+f(x)=\Omega^2 x\xi(t)+\zeta(t) \tag{1.1}$$

в котором $f(x)$ — нечетная монотонно возрастающая непрерывная функция, причем $\Omega^2=f'(0)\neq 0$. Через $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ обозначены стационарные и стационарно связанные центрированные случайные процессы типа белого шума с интенсивностями соответственно D_ξ и D_ζ; последние, так же как и функция h, считаются пропорциональными малому параметру. Функцию $h(x, x^{\cdot})$ полагаем четной относительно x и нечетной относительно $x^{\cdot}$.

При малых h, D_ξ, D_ζ движение системы (1.1) будет мало отличаться от движения соответствующей консервативной системы (получаемой из (1.1) при $h=0$, $D_\xi=D_\zeta=0$) в пределах каждого периода колебаний последней. Введя новую переменную — полную энергию $E(t)$, согласно зависимости

$$E=\frac{1}{2}\dot{x}^2+U(x), \quad U(x)=\int\limits_0^x f(x')\,dx' \tag{1.2}$$

получим из (1.1) систему двух уравнений первого порядка относительно новых переменных состояния E, x. В силу квазиконсервативности системы (1.1) уравнение относительно E будет уравнением в стандартной форме, и правую часть этого уравнения можно усреднить по быстрой переменной x в пределах собственного периода колебаний соответствующей консервативной системы [2, 3]; в результате получается укороченное уравнение

$$\dot{E}=-\frac{Q(E)}{T_0(E)}+\frac{D_\zeta S_0'(E)+\Omega^4 D_\xi S_1'(E)}{2T_0(E)}+\zeta_1(t)+\xi_1(t) \tag{1.3}$$

в котором $\zeta_1(t)$, $\xi_1(t)$ — центрированные случайные процессы типа белого шума с интенсивностями соответственно $D_\zeta S_0(E)/T_0(E)$, $\Omega^4 D_\xi S_1(E)/T_0(E)$. Здесь

$$Q(E)=\int\limits_0^A h\{x,[2E-2U(x)]^{1/2}\}\,dx, \quad S_0(E)=\int\limits_0^A [2E-2U(x)]^{1/2}\,dx$$

$$T_0(E)=S_0'(E)=\int\limits_0^A [2E-2U(x)]^{-1/2}\,dx, \quad S_1(E)=\int\limits_0^A x^2[2E-2U(x)]^{1/2}\,dx \tag{1.4}$$

а через A обозначен корень уравнения $E=U(x)$. В силу свойств симметрии функций $f(x)$, $h(x, \dot{x})$ усреднение проведено в пределах четверти периода фазовой траектории соответствующей консервативной системы (так, что полный период равен $4T_0(E)$). Как и в соответствующей линейной задаче [4], процессы $\zeta_1(t)$, $\xi_1(t)$ оказываются некоррелированными (вследствие обращения в нуль интеграла за период от функции $x[2E-2U(x)]^{1/2}$ независимо от взаимной корреляционной функции процессов $\zeta(t)$, $\xi(t)$; точно так же обращается в нуль и флуктуационная поправка к коэффициенту сноса, содержащая эту взаимную корреляционную функцию.

Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова, соответствующее стохастическому уравнению (1.3), имеет стационарное решение, определяющее плотность вероятности энергии

$$p(E)=CT_0(E)\exp\left[-2\int\limits_0^E\frac{Q(E')\,dE'}{D_\zeta S_0(E')+\Omega^4 D_\xi S_1(E')}\right] \tag{1.5}$$

(C — нормировочная постоянная). Распределение вида (1.5) было получено в [2] и строго обосновано в [3]. Для одного класса систем (1.1) распределение (1.5) будет точным. Именно, для системы с внешним возбуждением и специальным законом демпфирования ($D_\xi=0$, $h(x, \dot{x})=h_0(E)\dot{x}$) в [5] было получено аналитическое решение стационарного уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова, соответствующего исходной системе (1.1). Если в полученном в [5] выражении для совместной плотности вероятности $p(x, \dot{x})$ перейти к совместной плотности вероятности $p(x, E)$, то после интегрирования по x от нуля до A получится зависимость (1.5).

Введем теперь вместо $E(t)$ новую переменную $A(t)$, связанную с $E(t)$ неявной зависимостью $E=U(A)$; в силу принятого допущения о монотонности функции $f(x)$ обратная зависимость A от E будет однозначной. Функция $A(t)$, так же как и $E(t)$, будет медленно меняющейся, причем в силу определения (1.2) значения $A(t)$ в точках максимумов процесса $x(t)$ совпадают с максимальными значениями $x(t)$. Таким образом, функция $A(t)$ имеет смысл амплитуды колебаний системы (1.1). В соответствии с известными [1] правилами нахождения плотности вероятности функции от случайной величины с учетом равенства $|dE/dA|=f(A)$ получаем из (1.5) следующее выражение для стационарной плотности вероятности $p(A)$ амплитуды $A(t)$:

$$p(A)=CT_0(U(A))f(A)\exp\left[-2\int_0^A \frac{Q(U(A'))f(A')dA'}{D_\zeta S_0(U(A'))+\Omega^4 D_\xi S_1(U(A'))}\right] \tag{1.6}$$

2. Прямой анализ выражения (1.6) весьма сложен. В предположении о малой нелинейности восстанавливающей силы его можно провести приближенно определив функции Q, S_0, S_1 в явном виде при помощи аппроксимации функции $2U(A)-2U(x)$ в подынтегральных выражениях в (1.4) квадратичной зависимостью $\Lambda^2(A)(A^2-x^2)$. Такой прием эквивалентен использованию метода гармонической линеаризации, широко применяемого для решения детерминированных задач; в этом нетрудно убедиться, если с самого начала — в исходном уравнении (1.1) — осуществить линеаризацию функции $f(x)$. Аналогия будет полной, если выбрать коэффициент линеаризации $\Lambda^2(A)$ в соответствии с зависимостью

$$\Lambda^2(A)=\frac{4}{\pi A^2}\int_0^A \frac{xf(x)dx}{(A^2-x^2)^{1/2}} \tag{2.1}$$

которая тригонометрической подстановкой приводится к известной формуле гармонического баланса. В принципе можно воспользоваться и точной зависимостью собственной частоты соответствующей консервативной системы от амплитуды $\Lambda(A)=\pi/2T_0(U(A))$; функцию $T_0(U(A))$ можно найти численно, а в некоторых случаях она приводится к эллиптическим интегралам. Однако, как будет видно из дальнейшего, для широкого класса систем плотность вероятности амплитуды слабо зависит от функции $\Lambda(A)$ (которая входит лишь в предэкспоненциальный множитель в (1.6)).

При использовании указанного выше приближения гармонической линеаризации функции Q, S_0, S_1 легко могут быть найдены в конечном виде, если $h(x, x)$ — полином. Остановимся подробнее на случае линейного демпфирования $h(x, x^\cdot)=2\alpha x^\cdot$, когда выражение (1.6) принимает вид

$$p(A)=C_1[f(A)/\Lambda(A)]\exp\left[-4\alpha\int_0^A \frac{f(A')dA'}{D_\zeta+{}^1/_4 D_\xi\Omega^4 A'^2}\right] \tag{2.2}$$

(C_1 — новая нормировочная постоянная). Для линейной системы ($f(A)=\Omega^2 A$) из (2.2) получается распределение, найденное в [4] при помощи обычного варианта метода усреднения.

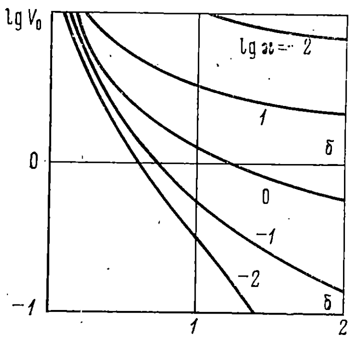
Для системы с кубически нелинейной жесткостью ($f(x)=\Omega^2x+\gamma x^3$, $\gamma\geqslant 0$, $\Lambda^2(A)=\Omega^2+{}^3/_4\gamma A^2$) из (2.2) можно получить следующие выражения для плотностей вероятности $p(A)$ и $w(V)$ амплитуды $A(t)$ и безразмерного квадрата амплитуды $V=\gamma A^2/\Omega^2$:

$$p(A)=C_2A(\Omega^2+\gamma A^2)(\Omega^2+{}^3/_4\gamma A^2)^{-1/2}(\varkappa+\gamma A^2/\Omega^2)^{-\delta(1-\varkappa)}\exp(-\delta\gamma A^2/\Omega^2) \tag{2.3}$$

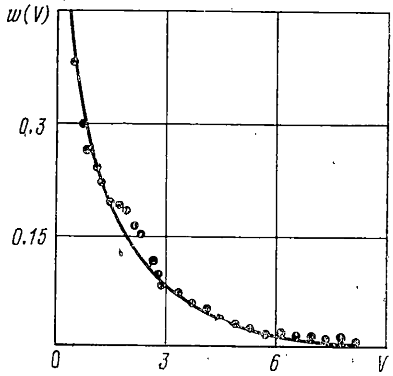
$$w(V)=C_3(1+V)(1+{}^3/_4V)^{-1/2}(\varkappa+V)^{-\delta(1-\varkappa)}\exp(-\delta V)$$

$$\delta=8\alpha/D_\xi\Omega^2,\qquad \varkappa=4\gamma D_\zeta/D_\xi\Omega^6$$

Выражения (2.3), (2.4) будут действительно представлять соответствующие стационарные плотности вероятности лишь при условии их интегрируемости в нуле и на бесконечности. При $D_\xi \neq 0$, $\gamma > 0$ оба эти условия всегда выполнены. Если же $D_\xi = 0$ (чисто параметрическое возбуждение), то стационарные распределения (2.3), (2.4) существуют лишь при $\delta < 1$ и $\gamma > 0$. В случае $\delta > 1$ распределения (2.3), (2.4) оказываются неинтегрируемыми в нуле; равенство $\delta = 1$ представляет границу стохастической устойчивости соответствующей линейной ($\gamma = 0$) системы, так что при $\delta > 1$, $D_\xi = 0$ в системе вообще нет никаких колебаний. Если же $\delta < 1$,



Фиг. 1



Фиг. 2

то независимо от величины D_ξ при $\gamma \leq 0$ не выполняется условие интегрируемости на бесконечности; это означает, что рост амплитуды колебаний при стохастической неустойчивости линейной системы может быть ограничен лишь введением в систему жесткой ($\gamma > 0$) нелинейности.

На фиг. 1 приведены графики зависимостей среднего значения $V_0 = \langle V \rangle$ безразмерного квадрата амплитуды от параметра δ при различных $\varkappa$ (получены численным интегрированием). Видно, что при увеличении параметра δ возрастает относительное влияние внешнего возбуждения: кривые, соответствующие различным значениям $\varkappa$, удаляются одна от другой и становятся более пологими. Напротив, в области $\delta < 1$ наблюдаются довольно резкие изменения величины V_0 при возрастании избыточной глубины модуляции $1-\delta$ даже при не очень малых $\varkappa$ (напомним, что если $\varkappa = 0$, то $V_0 = 0$ при $\delta > 1$).

На фиг. 2 дано сопоставление зависимости $w(V)$, полученной согласно (2.4) при $\varkappa = 0$, $\delta = 0.5$, с результатами (отмечены точками) прямого численного моделирования системы (1.1) на ЭЦВМ Р-40. Примечательно хорошее совпадение результатов в области больших амплитуд ($V > 2.5$), т. е. там, где можно было опасаться появления ошибок, связанных с использованием квазилинейного приближения при построении аналитического решения.

Поступила 7 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., «Сов. радио», 1961.
2. *Ланда П. С., Стратонович Р. Л.* К теории флуктуационных переходов различных систем из одного стационарного состояния в другое. Вестн. МГУ. Сер. физ., астрон., 1962, № 1.
3. *Хасьминский Р. З.* О работе консервативной системы при воздействии малого трения и малого случайного шума. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
4. *Диментберг М. Ф., Сидоренко А. С.* О взаимодействии между колебаниями, возникающими в линейной системе при действии внешних и параметрических случайных возмущений. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3.
5. *Caughey T. K.* On the response of a class of nonlinear oscillators to stochastic excitation. Div. Engng and Appl. Sci., California Inst. of Technol. Pasadena, California, 1964. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1965, № 3).