

ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА
ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ
С ХАОТИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

В. М. ЛОГИНОВ, В. Е. ШАПИРО

(Красноярск)

Рассмотрена задача об осцилляторе, собственная частота которого меняется по закону $\omega(t) = \omega_0^2(1 + \mu(t) \cos \Omega t)$, где $\mu(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним и функцией автокорреляции $\langle \mu(t)\mu(t+\tau) \rangle = \langle \mu^2 \rangle \exp(-\nu|\tau|)$. Исследованы средние, среднеквадратичные характеристики движений осциллятора и функция распределения при различных соотношениях между параметрами ν , ω_0 и Ω .

В частности показано, что действие флуктуаций на динамику первых моментов может быть как стабилизирующим, так и дестабилизирующим в зависимости от ширины огибающей спектра ν/Ω . Это характерно, например, для зоны параметрического резонанса $\omega_0 \sim 1/2\Omega$ и зоны $\omega_0 \ll \Omega$. Поведение же вторых моментов имеет существенно иной характер, в частности в отсутствие в системе «затравочного» затухания вторые моменты всегда неустойчивы при любых соотношениях между частотами задачи.

1. Для описания движения частиц, колебательных систем, резонансных явлений, распространения волн часто используется модель линейного осциллятора

$$x'' + 2\alpha x' + \omega x = F \quad (1.1)$$

При этом для многих приложений оказывается важным анализ поведения системы (1.1) в условиях, когда помимо регулярных во времени воздействий (т. е. α , ω и F — заданные функции времени) имеются и хаотические, так что α , ω и F содержат случайно меняющиеся во времени составляющие.

Здесь рассматривается случай, когда $\alpha = \text{const}$, $F = 0$ и

$$\omega(t) = \omega_0^2(1 + \mu(t) \cos \Omega t) \quad (1.2)$$

где $\mu(t)$ — стационарный случайный процесс со средним значением $\langle \mu(t) \rangle = 0$ и функцией корреляции

$$\langle \mu(t)\mu(t+\tau) \rangle = \langle \mu^2 \rangle \exp(-\nu|\tau|) \quad (1.3)$$

Величина $1/\nu$ характеризует время спада корреляций. Угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций процесса $\mu(t)$.

Такая модель интересна тем, что на ней можно проследить переход от чисто динамического поведения осциллятора, когда $\nu = 0$ и (1.1) представляет собой уравнение Матье, к чисто стохастическому, когда $\nu \rightarrow \infty$, что соответствует при $\langle \mu^2 \rangle/\nu = \text{const}$ задаче о параметрическом воздействии в виде белого шума.

Некоторые частные случаи модели (1.1)–(1.3) хорошо изучены. Так, например, при $\nu = 0$ и $\Omega \gg \omega_0$ имеем задачу о маятнике Капицы [1] (см. также [2]), в которой, как известно, высокочастотное регулярное воздействие приводит к эффекту увеличения жесткости системы. В случае чисто

броуновского движения, когда $\nu \rightarrow \infty$ и $\Omega = 0$, результаты кратко таковы (см., например, [3]): первые моменты $\langle x(t) \rangle$, $\langle x^*(t) \rangle$ ведут себя так, словно величина μ в (1.2) тождественно равна нулю, и никакого вклада в жесткость и затухание движения нет, среднеквадратичные же характеристики $\langle \dot{x}^2(t) \rangle$, $\langle x^2(t) \rangle$ и $\langle x(t)x^*(t) \rangle$ при определенных соотношениях между параметрами α , ω_0 и $\langle \mu^2 \rangle$ экспоненциально нарастают со временем (стохастическая неустойчивость).

В случае конечных ν ряд вопросов применительно к механическим системам обсуждался в работах [4, 5] (см., также обзор [6]). Укажем также на работу [7], где задача изучена при произвольных соотношениях между параметрами ν и ω_0 , но $\Omega = 0$, когда в качестве $\mu(t)$ взята случайная функция, принимающая с одинаковой вероятностью только два значения $\pm \mu_0$ в случайные моменты времени t_n , распределенные по закону Пуассона (такой процесс обычно называют дихотомическим или случайным телеграфным сигналом).

Итак, достаточно полно изучался случай $\Omega = 0$. При этом характерно, что в случае конечных ν появляется флуктуационный вклад в динамику величины $\langle x(t) \rangle$, причем перенормируется как жесткость, так и затухание.

Новые особенности в поведении осциллятора можно ожидать при $\Omega \neq 0$, поскольку с одной стороны, воздействие $\sim \cos \Omega t$ выделяет некоторые фазы колебаний и в зависимости от соотношения между Ω и ω_0 вызывает их параметрическое гашение или раскачку, с другой — флуктуационное воздействие стремится перемешать фазы и стохастически раскачать систему.

Изучению этих особенностей и посвящена публикуемая работа. Рассматриваются произвольные соотношения между параметрами ν , ω_0 и Ω в рамках модели (1.2), когда $\mu(t)$ — случайный телеграфный сигнал.

2. Уравнение (1.1) с $\omega(t)$ в виде (1.2) удобно переписать в матричной форме. Введем следующие обозначения:

$$\tau = \omega t = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t, \quad \lambda = \omega_0^2 / \omega^2, \quad p = \Omega / \omega \quad (2.1)$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$V(\tau) = \exp\left(-A_1 + \frac{\alpha}{\omega} E\right) \tau \begin{vmatrix} x \\ \frac{\alpha}{\omega} x + x^* \end{vmatrix}$$

где E — единичная матрица. Тогда из (1.1) с учетом (1.2), (2.1) для $V(\tau)$ получаем уравнение

$$dV/d\tau = \lambda \mu(\tau) \exp(-A_1 \tau) B_1 \exp(A_1 \tau) \cos(p\tau) V \quad (2.2)$$

Далее рассмотрена эволюция этой системы при независимых от случайного процесса $\mu(\tau)$ начальных условиях

$$V|_{\tau=0} = V_0 = \begin{vmatrix} x(0) \\ \frac{\alpha}{\omega} x(0) + x^*(0) \end{vmatrix}$$

Усредним обе части уравнения (2.2) по процессу $\mu(\tau)$. При этом среднее $\langle V(\tau) \rangle$ выразится через неизвестное среднее $\langle \mu(\tau) V(\tau) \rangle$, где $V(\tau)$ в силу (2.2) зависит от поведения $\mu(\tau_1)$ на временах $0 \leq \tau_1 < \tau$. Для расцепления корреляций такого вида (когда $V(\tau)$ — запаздывающий функционал процесса μ) предлагается простой метод, основанный на следую-

щей формуле:

$$\frac{d}{dt} \langle \mu(t) V_i[\mu] \rangle = -\nu \langle \mu(t) V_i[\mu] \rangle + \left\langle \mu(t) \frac{dV_i[\mu]}{dt} \right\rangle \quad (2.3)$$

где $V_i[\mu(t_i)]$ — функция t и функционал процесса $\mu(t_i)$, определенный на временах $t_i < t$.

Формула (2.3) верна для случайного телеграфного сигнала, для гауссовского, пуассоновского и ряда других процессов с автокорреляцией (1.2) [8]. Заметим, что с помощью (2.3) и некоторых ее обобщений можно проводить усреднение существенно более широкого, чем уравнение (2.2), класса стохастических дифференциальных уравнений [8].

Усредняя (2.2) и используя (2.3), получим

$$\frac{d}{d\tau} \langle V \rangle = \lambda D_1(\tau) \cos p\tau \int_0^\tau \exp[-\delta(\tau-\tau_1)] \left\langle \mu(\tau_1) \frac{dV(\tau_1)}{d\tau_1} \right\rangle d\tau_1 = \quad (2.4)$$

$$= \lambda^2 D_1(\tau) \cos p\tau \int_0^\tau \exp[-\delta(\tau-\tau_1)] D_1(\tau_1) \cos p\tau_1 \langle \mu^2(\tau_1) V(\tau_1) \rangle d\tau_1$$

$$\delta = \frac{\nu}{\omega}, \quad D_1(\tau) \equiv \exp(-A_1\tau) B_1 \exp(A_1\tau) = \begin{vmatrix} \sin \tau \cos \tau & \sin^2 \tau \\ -\cos^2 \tau & -\sin \tau \cos \tau \end{vmatrix}$$

При записи (2.4) учтено, что $\langle V(\tau) \mu(\tau) \rangle|_{\tau=0} = V_0 \langle \mu \rangle = 0$. Для случайного телеграфного сигнала $\langle \mu^2(\tau_1) V(\tau_1) \rangle \equiv \mu_0^2 \langle V(\tau_1) \rangle$ и поэтому уравнение (2.4) становится точным замкнутым уравнением для искомого среднего $\langle V(\tau) \rangle$:

$$\frac{d}{d\tau} \langle V(\tau) \rangle = \lambda^2 \mu_0^2 D_1(\tau) \cos p\tau \int_0^\tau \exp[-\delta(\tau-\tau_1)] D_1(\tau_1) \cos p\tau_1 \langle V(\tau_1) \rangle d\tau_1 \quad (2.5)$$

Ограничимся анализом уравнения (2.5) при малых значениях величины $\varepsilon = \lambda \mu_0 \ll 1$. В этом случае (2.5) является интегродифференциальным уравнением в стандартной форме, пригодной для применения асимптотического метода усреднения [9]. Следуя [9] в первом по ε^2 приближении получаем

$$\frac{d}{d\tau} \langle V(\tau) \rangle = \varepsilon^2 R \langle V(\tau) \rangle \quad (2.6)$$

где постоянная матрица R определяется выражением

$$R = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T D_1(\tau) \cos p\tau d\tau \int_0^\tau \exp[-\delta(\tau-\tau_1)] D_1(\tau_1) \cos p\tau_1 d\tau_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

$$a_1 = \frac{\nu\omega}{16} \left[\frac{-2}{\nu^2 + \Omega^2} + \frac{1}{\nu^2 + (2\omega + \Omega)^2} + \frac{1}{\nu^2 + (2\omega - \Omega)^2} \right]$$

$$b_1 = -\frac{\omega}{16} \left[\frac{2\omega + \Omega}{\nu^2 + (2\omega + \Omega)^2} + \frac{2\omega - \Omega}{\nu^2 + (2\omega - \Omega)^2} \right]$$

Возвращаясь в системе (2.6) к исходным переменным $\langle x(t) \rangle$, $\langle x^*(t) \rangle$ приходим к уравнению осциллятора с перенормированными коэффициен-

¹ Случай $\varepsilon \gg 1$ будет изложен в отдельной работе.

тами затухания α_{ef} и собственной частоты ω_{ef} :

$$\alpha_{ef} = \alpha - \mu_0^2 a_1 \frac{\omega_0^4}{\omega^3}, \quad \omega_{ef}^2 = \omega^2 \left(1 + \mu_0^2 b_1 \frac{\omega_0^4}{\omega^4} \right)^2 + \alpha_{ef}^2 \quad (2.8)$$

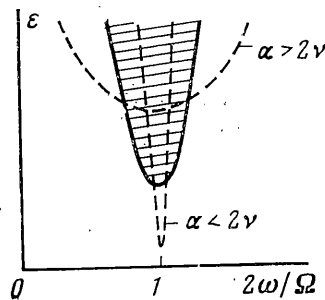
Обсудим полученный результат (2.8). Целесообразно выделить три характерные области изменения параметров: $\omega \sim 1/2\Omega$, $\omega \ll 1/2\Omega$ и $\omega \gg 1/2\Omega$.

Рассмотрим влияние флуктуаций на основной параметрический резонанс $\omega \sim 1/2\Omega$. Область параметрического возбуждения колебаний определяется условием

$$\mu_0^2 a_1 (\omega_0^4 / \omega^3) \geq \alpha \quad (2.9)$$

Величина a_1 , согласно (2.7) при $|\Omega| \sim 2\omega$ и малых ν , имеет резкий положительный пик в максимуме $a_1 = \Omega / 32\nu$, так что при $\nu \rightarrow 0$ условие возбуждения легко выполняется даже при больших затуханиях α .

Область параметрического резонанса при малых расстройках $|\xi| = |1 - 2\omega/\Omega| \ll 1$ и $\nu \ll \Omega$ изображена (заштрихована) на фиг. 1. Там же для сравнения нанесены пунктиром кривые, соответствующие параметрическому резонансу уравнения Матве: $x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2(1 + \mu_0 \cos \Omega t)x = 0$. В случае малых расстройок $|\xi|$ выражение для границ устойчивости (2.9) принимает вид



Фиг. 1

$$\varepsilon^2 \geq 64 \frac{\alpha}{\nu} \left(\frac{\nu^2}{\Omega^2} + \xi^2 \right) \quad (2.10)$$

В то же время для выписанного уравнения Матве условие устойчивости имеет вид

$$\varepsilon^2 \geq 16 \left(\frac{4\alpha^2}{\Omega^2} + \xi^2 \right)$$

Таким образом, если случайные толчки $\mu(t)$ редкие, так что $\nu < \alpha$, то их наличие благоприятствует параметрической неустойчивости, но область неустойчивости сужается. При $\nu > \alpha$ наоборот, порог благодаря случайным толчкам повышается, но область неустойчивости расширяется.

Рассмотрим случай $\omega \ll 1/2\Omega$. Из (2.7); (2.8) имеем

$$\frac{2\alpha_{ef}}{\omega_0} \approx -\mu_0^2 \frac{\omega_0^3 k(3-k^2)}{\Omega^3 (1+k^2)^3} \quad (2.11)$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_{ef} - \omega_0}{\omega_0} \approx \frac{1}{4} \mu_0^2 \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \frac{1-k^2}{(1+k^2)^2}$$

где для простоты принято $\alpha = 0$ и обозначено $k = \nu/\Omega$.

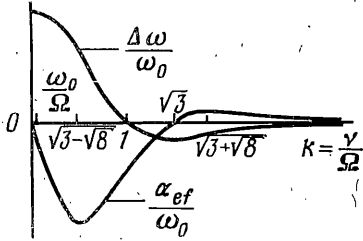
Из (2.11) следует, что при $k \rightarrow \infty$ вклад флуктуаций в движение $\langle x(t) \rangle$ отсутствует, как и должно быть при модуляции белым шумом (см. [3]).

В другом пределе $k = 0$ получаем известный результат для маятника в быстроосциллирующем поле [1, 2] — эффективно меняется жесткость маятника, она возрастает на величину $\Delta\omega/\omega_0 \approx 1/4 \mu_0^2 \omega_0^2 \Omega^{-2}$. Вклад в затухание отсутствует, т. е. $\alpha_{ef} = 0$.

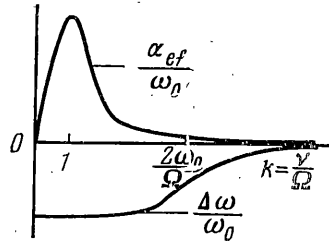
¹ Заметим, что резонанс $\omega \sim 1/2\Omega$ численно изучался в [10]; однако в рамках несколько иной модели: когда $\Omega = 0$, а $\mu(t)$ — гауссовский стационарный процесс с корреляцией $\langle \mu(t)\mu(t+\tau) \rangle = \langle \mu^2 \rangle \exp(-\nu|\tau|) (\cos \theta\tau + \nu\theta^{-1} \sin \theta|\tau|)$.

По мере роста k вклад в жесткость уменьшается и возникает затухание (см. фиг. 2). Последнее в области $0 < k < \sqrt{3}$ отрицательно. При $k = (3 - \sqrt{8})^{1/2}$ затухание достигает минимума, когда $2\alpha_{ef}/\omega_0 \approx -0.7\mu_0^2\omega_0^3\Omega^{-2}$. В области $k \sim 1$ α_{ef} и $\Delta\omega$ меняют знаки, а затем при $k \gg 1$ спадают до нуля. В точке $k = \sqrt{3}$ имеем $\Delta\omega/\omega_0 \approx -1/32\mu_0^2\omega_0^2\Omega^{-2}$. Максимум затухания приходится на точку $k = (3 + \sqrt{8})^{1/2}$, в которой $2\alpha_{ef}/\omega_0 \approx 0.01\mu_0^2\omega_0^3\Omega^{-2}$.

Таким образом, за счет конечности ν появляется вклад как в жесткость, так и в затухание. Существенно, что они ведут себя немонотонно с изме-



Фиг. 2



Фиг. 3

нением k , причем при $0 < k < \sqrt{3}$ имеет место стохастическая неустойчивость.

Случай $\omega \gg 1/2\Omega$. Из (2.7), (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha_{ef}}{\omega_0} &\approx \mu_0^2 \frac{\omega_0^3}{\Omega^3} \frac{k}{(1+k^2)(k^2+4\omega_0^2/\Omega^2)} \\ \frac{\Delta\omega}{\omega_0} &\approx -\frac{1}{4} \mu_0^2 \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \frac{1}{k^2+4\omega_0^2/\Omega^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Видно, что вклад в жесткость всюду отрицателен, а в затухание — положителен (см. фиг. 3). Параметр α_{ef} велик в области, где $k \sim 1$ и максимален при $k = 2/\sqrt{3}$, где $2\alpha_{ef}/\omega_0 \approx 0.1\mu_0^2\omega_0\Omega^{-1} \gg 0.1\mu_0^2$ (так как $\omega_0/\Omega \gg 1$). Заметим, что эти выражения при $\Omega \rightarrow 0$ отличаются от соответствующих $\Omega = 0$. Связано это с тем, что при $\Omega \rightarrow 0$ время Ω^{-1} становится больше времени $(\mu_0\omega_0)^{-1}$, которое при усреднении (2.5) считалось наибольшим.

Непосредственное усреднение уравнения (2.5) при $\Omega = 0$ дает

$$\frac{\alpha_{ef}}{\omega_0} \approx \mu_0^2 \frac{\omega_0^3}{\nu(\nu^2+4\omega_0^2)}, \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx -\mu_0^2 \frac{\omega_0^2}{\nu^2+4\omega_0^2}$$

что совпадает с известным результатом (см., например, [11]).

3. Из уравнения (1.1) легко получить следующую систему стохастических уравнений, описывающих поведение квадратичных характеристик движения осциллятора

$$\frac{dU}{d\tau} = \lambda\mu(\tau) \cos p\tau \exp(-A_2\tau) B_2 \exp(A_2\tau) U \quad (3.1)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(\tau) = \exp(-A_2\tau) \begin{pmatrix} z^2 \\ y^2 \\ zy \end{pmatrix}$$

$$z = \exp(\alpha\tau/\omega)x, \quad y = dz/d\tau$$

Так как $U(\tau)$ является запаздывающим функционалом процесса μ , то усредняя обе части (3.1) и используя формулу (2.3), получаем

$$\frac{d}{d\tau} \langle U \rangle = \varepsilon^2 D_2(\tau) \cos p\tau \int_0^\tau \exp[-\delta(\tau-\tau_1)] D_2(\tau_1) \cos p\tau_1 \langle U(\tau_1) \rangle d\tau_1 \quad (3.2)$$

Отметим, что (3.2) так же как и (2.5) является точным замкнутым уравнением для определения среднего $\langle U(\tau) \rangle$.

Применяя к уравнению (3.2) асимптотический метод усреднения, в первом по ε^2 приближении получаем

$$\frac{d\eta}{dt} = \begin{vmatrix} -2\alpha + a_2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha + b_+ & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha + b_- \end{vmatrix} \eta \quad (3.3)$$

где компоненты η_1, η_2, η_3 вектора η представляют собой сглаженные по периоду $2\pi/\omega$ среднеквадратичные характеристики движения $\langle x^2 \rangle, \langle x\dot{x} \rangle, \langle \dot{x}^2 \rangle$ и

$$a_2 = \frac{\varepsilon^2 \nu \omega_0^4}{4 \omega^2} \frac{\Omega^2 + \nu^2 + 4\omega^2}{(\Omega^2 + \nu^2 - 4\omega^2)^2 + 16\nu^2 \omega^2} \quad (3.4)$$

$$b_{\pm} = \frac{\varepsilon^2 \nu \omega_0^3}{8 \omega^2} \left[\frac{\nu \pm 2i\omega}{\Omega^2 + (\nu^2 \pm 2i\omega)^2} - \frac{2\nu}{\Omega^2 + \nu^2} \right]$$

Из (3.3), (3.4) видно, что поведение вторых моментов отличается от рассмотренного в п. 2 поведения усредненных (дрейфовых) движений $\langle x(t) \rangle$: при любых соотношениях между параметрами Ω, ω и ν вторые моменты в отсутствие затравочного затухания экспоненциально нарастают во времени. Условие возбуждения такой стохастической неустойчивости определяется параметром a_2 и имеет вид

$$a_2 > 2\alpha \quad (3.5)$$

Ограничимся здесь рассмотрением поведения инкремента a_2 при $\nu \ll \Omega$ в окрестности основного параметрического резонанса $\omega \sim 1/2 \Omega$. При этом

$$a_2 \approx \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\omega_0^4}{\Omega^3} \frac{\nu/\Omega}{\xi^2 + \nu^2/\Omega^2}$$

и условие (3.5) совпадает с условием (2.10). Таким образом, неустойчивость первых и вторых моментов наступает при одних и тех же значениях интенсивности флуктуаций ε .

Отметим еще, что в пределе очень быстрых флуктуаций $\nu \gg \Omega$ условие стохастической раскачки (3.5) переходит в известный (см., например, [3]) результат задачи о параметрическом возбуждении осциллятора белым гауссовским шумом, если считать $\varepsilon^2/2\nu = D$, где D — интенсивность белого шума.

Из проведенного анализа в частности следует, что маятник Капицы всегда неустойчив (если трение $\alpha = 0$) при наличии сбой периодической силы.

¹ Отметим, что поскольку рассмотрение ограничивалось первым по ε^2 приближением, то резонансное поведение параметров $a_{1,2}, b_1, b_{\pm}$, определяющих динамику системы, проявляется на частоте $\omega \sim 1/2 \Omega$. Каждое следующее по ε приближение выявляет параметрические резонансы все более высокого порядка $\omega = \pm 1/2 \Omega n$, где $n = 2, 3, \dots$

4. Выведем кинетическое уравнение для функции распределения осциллятора (1.1), (1.2) с $\alpha=0$, $F=0$. Вместо переменных $x(\tau)$ и $\dot{x}(\tau)$ удобно ввести медленные переменные $A(\tau)$ и $\varphi(\tau)$, связанные с $x(\tau)$ и $\dot{x}(\tau)$ соотношениями

$$x(\tau) = A(\tau) \sin(\tau + \varphi(\tau)), \quad \dot{x}(\tau) = A(\tau) \cos(\tau + \varphi(\tau)) \quad (4.1)$$

Представляя амплитуду $A(\tau)$ в виде $A = \exp u(\tau)$, используя (4.1) и уравнение осциллятора приходим к следующей системе уравнений для «амплитуды» $u(\tau)$ и фазы $\varphi(\tau)$:

$$\dot{\varphi} = \mu(\tau) \cos p\tau \sin^2 \psi, \quad \dot{u} = -\frac{1}{2} \mu(\tau) \cos p\tau \sin 2\psi, \quad \psi = \tau + \varphi(\tau). \quad (4.2)$$

Введем функцию распределения осциллятора $W(\tau, \varphi, u)$, означающую вероятность того, что осциллятор в момент времени τ будет иметь значение амплитуды u и фазы φ при условии, что в начальный момент $\tau=0$ они были соответственно равны $u=u_0$ и $\varphi=\varphi_0$.

Функция $W(\tau, u, \varphi)$ удовлетворяет стохастическому уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + \mu(\tau) \frac{\partial}{\partial \varphi} (W \cos p\tau \sin^2 \psi) - \frac{1}{2} \mu(\tau) \frac{\partial}{\partial u} (W \cos p\tau \sin 2\psi) = 0 \quad (4.3)$$

Для расщепления корреляций в уравнении (4.2) между переменными $\mu(\tau)$ и $W(\tau, u, \varphi)$ воспользуемся формулой дифференцирования (2.3). В результате ее применения и свойства $\mu^2(\tau) \equiv \mu_0^2$ получаем следующее точное замкнутое уравнение для $\langle W \rangle$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle W \rangle}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \cos p\tau \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin^2 \psi \int_0^\tau \exp[-\delta(\tau - \tau_1)] \times \\ & \quad \times \left\{ -\cos p\tau_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} (\langle W(\tau_1, u, \varphi) \rangle \sin^2 \psi) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \cos p\tau_1 \sin 2\psi \frac{\partial}{\partial u} \langle W(\tau_1, u, \varphi) \rangle \right\} d\tau_1 - \\ & - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos p\tau \sin 2\psi \frac{\partial}{\partial u} \int_0^\tau \exp[-\delta(\tau - \tau_1)] \left\{ -\cos p\tau_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} (\langle W(\tau_1, u, \varphi) \rangle \sin^2 \psi) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \cos p\tau_1 \sin 2\psi \frac{\partial}{\partial u} \langle W(\tau_1, u, \varphi) \rangle \right\} d\tau_1 = 0 \quad (4.4) \end{aligned}$$

Будем считать параметр ε малым, $\varepsilon \ll 1$. При этом уравнение (4.4) является интегродифференциальным уравнением в стандартной форме и к нему можно применить метод усреднения (см., например [12, 13]). В результате после несколько громоздких вычислений в первом по ε^2 приближении получаем искомое кинетическое уравнение для функции распределения $\langle W(\tau, u, \varphi) \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle W \rangle}{\partial \tau} = L \langle W \rangle & \equiv \left(-2\varepsilon^2 \alpha_1 \frac{\partial}{\partial u} + \varepsilon^2 \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2\varepsilon^2 \alpha_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} + \varepsilon^2 \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \langle W \rangle \\ \alpha_0 & = \frac{\omega_0}{32} \left[\frac{2\omega_0 + \Omega}{v^2 + (2\omega_0 + \Omega)^2} + \frac{2\omega_0 - \Omega}{v^2 + (2\omega_0 - \Omega)^2} \right] \quad (4.5) \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \frac{\nu\omega_0}{32} \left[\frac{1}{\nu^2 + (2\omega_0 + \Omega)^2} + \frac{1}{\nu^2 + (2\omega_0 - \Omega)^2} \right]$$

$$\alpha_2 = \frac{\nu\omega_0}{32} \left[\frac{4}{\nu^2 + \Omega^2} + \frac{1}{\nu^2 + (2\omega_0 + \Omega)^2} + \frac{1}{\nu^2 + (2\omega_0 - \Omega)^2} \right]$$

Уравнение (4.5) будем решать при следующих начальных условиях:

$$\langle W(\tau, u, \varphi) \rangle|_{\tau=0} = \delta(u - u_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \quad (4.6)$$

$$u_0 = \frac{1}{2} \ln(x_0^2 + x_0'^2), \quad \varphi_0 = \arctg(x_0/x_0')$$

Результат (4.5) показывает, что усредненные по периоду осцилляций статистические характеристики амплитуды и фазы осциллятора статистически независимы, т. е. $\langle W \rangle = P(\tau, u)Q(\tau, \varphi)$. Решение уравнения (4.5) при начальных условиях (4.6) имеет гауссовское распределение

$$P(\tau, u) = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi}\alpha_1\tau} \exp\left[-\frac{(u - u_0 - 2\varepsilon^2\alpha_1\tau)^2}{4\varepsilon^2\alpha_1\tau}\right] \quad (4.7)$$

$$Q(\tau, \varphi) = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi}\alpha_2\tau} \exp\left[-\frac{(\varphi - \varphi_0 + 2\varepsilon^2\alpha_2\tau)^2}{4\varepsilon^2\alpha_2\tau}\right] \quad (4.8)$$

Полученное решение уравнения (4.5) полностью решает задачу о нахождении вероятностных характеристик движения осциллятора со случайно амплитудно модулированной частотой в ε^2 приближении. Результаты для $\langle x \rangle$ и $\langle x' \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle xx' \rangle$, $\langle x'^2 \rangle$ (п. 1–3) получаются из (4.7), (4.8). Аналогично можно вычислять средние от $u(\tau)$ и $\varphi(\tau)$, а соответственно и от $x(\tau)$, $x'(\tau)$, более высокого порядка. Заметим, что в области устойчивости движений осциллятора поведение во времени корреляционной функции $\langle x(\tau)x_0 \rangle$ определяется ходом $\langle x(\tau) \rangle$, т. е. характерное время спада корреляций движений осциллятора равно α_{ef}^{-1} .

Рассмотренная модель осциллятора (1.1), (1.2) позволила провести стыковку результатов по динамическому и стохастическому режимам поведения. Существенной особенностью перехода от одного режима к другому является немонотонное (с изменением знаков) поведение параметров α_{ef} и $\Delta\omega$ для средних движений $\langle x(t) \rangle$, что при определенных условиях приводит к стохастической раскачке этих движений.

Представляется интересной возможность управления порогом и шириной зоны параметрического резонанса за счет хаотической модуляции параметрической силы.

Следует указать, что полученные в рамках модели (1.2), (1.3) результаты нечувствительны (при $\varepsilon \ll 1$ и $\nu \gg \omega$) к выбору статистики процесса $\mu(t)$.

С помощью подхода [8] результаты могут быть легко обобщены на случай коррелирующих $\mu(t)$ и $F(t)$, а также коррелирующих (но неупреждающим образом) с $\mu(t)$ начальными условиями.

Выведенный в п. 4 кинетический оператор L^V является основой для получения многоточечных функций распределения для движений $x(t)$.

Поступила 17 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. ЖЭТФ, 1951, т. 21, вып. 5.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 1. М., «Наука», 1973.
3. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М., «Наука», 1975.

4. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, М., «Сов. радио», 1961.
5. Диментберг М. Ф. Резонансные свойства системы с одной степенью свободы со случайно изменяющейся собственной частотой. Инж. ж. МТТ, 1966, № 1.
6. Диментберг М. Ф., Фролов К. В. Некоторые параметрические задачи статистической динамики. В сб.: Нелинейные и оптимальные системы, М., «Наука», 1971.
7. Bourret R. C., Frish U., Pouquet A. Brownian motion of harmonic oscillator with stochastic frequency. Physica, 1973, vol. 65, No. 2.
8. Shapiro V. E., Loginov V. M., «Formulae of differentiation» and their use for solving stochastic equations. Physica, 1978, Ser. A, vol. 91, No 3/4.
9. Вахабов Г. К вопросу обоснования метода усреднения для интегродифференциальных уравнений. Укр. матем. ж., 1969, т. 21, № 6.
10. Болотин В. В., Москвин В. Г. О параметрических резонансах в стохастических системах, Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 4.
11. Terwiel R. H. Projection operator method applied to stochastic differential equations. Physica, 1974, vol. 76, No. 2.
12. Филагов А. Н., Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. Ташкент, «Фан», 1974.
13. Митропольский Ю. А., Мосенков Б. И. Асимптотическое решение уравнений в частных производных. Киев, «Вища школа», 1976.