МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1980

УДК 531.39

К ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СОСТАВНЫХ РАКЕТ

В. А. КОСМОДЕМЬЯНСКИЙ

(Москва)

Рассмотрена схема составной ракеты в предположении, что вес ступени слагается из веса топлива, веса двигательной установки, веса баков, веса других элементов, не входящих в конструкцию ступени. При помощи специального преобразования конструктивные соотношения в пространстве новых переменных принимают тот же вид, что и конструктивные соотношения схемы Фертрегта [1].

В отличие от известных схем вертикального полета расчет неоднородной ступенчатой ракеты произведен при условии, что движение каждой из субракет можно моделировать прямолинейным движением по соответствующей наклонной направляющей. Действием аэродинамических сил пренебрегается. Поле силы тяжести считается однородным.

Ставится задача о выборе оптимальных параметров — секундных расходов двигателей, моментов отделения веса последовательных субракет, позволяющих найти при заданном полезном грузе максимальное значение скорости в конце активного участка.

Оптимальные соотношения на параметры находятся [2] без представления дифференциальной связи — уравнения движения — в интегрируемой форме [1, 3].

Полученные соотношения позволяют произвести оптимальный расчет как однородных, так и неоднородных ступенчатых конструкций.

В качестве примера рассмотрен предварительный расчет тяжелых ракетных систем на примере (ракет V-2, Сатурна-5).

1. Рассмотрим конструкцию неоднородной составной ракеты в следующих предположениях: тяги, создаваемые двигателями последовательных ступеней, постоянны; относительные скорости отбрасываемых частиц постоянны; двигатели последовательных ступеней работают без пауз.

Введем безразмерную массу составной ракеты [2, 4]: $y=m/m_0$, где m — масса ракеты, меняющаяся по линейному закону, m_0 — стартовая масса. В плоскости переменных (y, t) участки кривой $y=y(t)$, соответствующие рабочему режиму двигателей, изображаются наклонными, участки, соответствующие отделению ступеней,— вертикальными отрезками.

Примем [2, 3], что масса баков i-й ступени пропорциональна массе топлива и равна $k_i(y_{i-1}-y_{i-})$, масса двигательной установки пропорциональна массе i субракеты и секундному расходу топлива β_i и равна $\varkappa_i\beta_i y_{i-1}$, масса не несущей конструкции пропорциональна массе i субракеты и равна $\nu_i y_{i-1}$. Коэффициенты k_i, $\varkappa_i$, ν_i характеризуют конструктивное совершенство составной ракеты. Таким образом, масса $i-1$ субракеты слагается из массы i субракеты, массы баков, массы двигательной установки, массы не несущей конструкции, приходящейся на i-ю ступень

$$\begin{aligned} y_{i-1}=y_i+(y_{i-1}-y_{i-})+k_i(y_{i-1}-y_{i-})+ \\ +(\varkappa_i\beta_i y_{i-1}-\varkappa_{i+1}\beta_{i+1}y_i)+(\nu_i y_{i-1}-\nu_{i+1}y_i) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Схему составной ракеты, определяемую конструктивными соотношениями (1.1) при $\varkappa_i=0$, $\nu_i=0$, принято называть схемой Фертрегта [1].

График $y=y(t)$ описывается системой $2n$ уравнений

$$y_{i-}=y_{i-1}[1-\beta_i(t_i-t_{i-1})],\qquad y_i=(1+k_i)y_{i-}-k_iy_{j-1}\quad {\scriptstyle (i=1,\ldots,n)} \tag{1.2}$$

Представим соотношения (1.1) в виде

$$(1-\varkappa_{i+1}\beta_{i+1}-\nu_{i+1})y_i=(1+k_i)y_{i-}+[(1+k_i)y_{i-1}-(1-\varkappa_i\beta_i-\nu_i)y_i] \tag{1.3}$$

и сделаем преобразование

$$y_{i-1}z_{0i}=z_{i-1},\quad y_{i-}z_{0i}=z_{i-},\quad 1+K_i=(1+k_i)/z_{0i}$$
$$z_{0i}=1-\varkappa_i\beta_i-\nu_i,\quad z_{01}=z_0$$

Кривая $y=y(t)$ перейдет в кривую $z=z(t)$, определяемую уравнениями (см. фиг. 1):

$$z_{i-}=z_{i-1}[1-\beta_i(t_i-t_{i-1}],\qquad z_i=(1+K_i)z_{i-}-K_iz_{i-1}\quad {\scriptstyle (i=1,\ldots,n)} \tag{1.4}$$

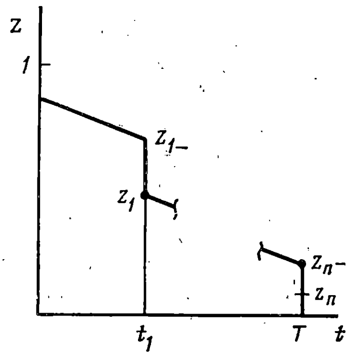
Используя свойство однородности соотношений (1.4), введем обозначения: $z_{i-}/z_{i-1}=u_{i-}$, $z_i/z_{i-1}=u_i$. Тогда система конструктивных соотношений примет вид

$$u_{i-}=1-\beta_i(t_i-t_{i-1}),$$
$$u_i=(1+K_i)u_{i-}-K_i \tag{1.5}$$

причем в промежутке $t_{i-1}+0<t<t_i-0$ будем иметь $u=1-\beta_i(t-t_{i-1})$.

Отметим одну особенность кривых (1.4). Пусть параметры последовательных ступеней одинаковы $\beta_i=\beta$, $K_i=K$. Подставляя тогда первое из соотношений (1.4) во второе, получим $z_i=z_{i-1}-\beta_i\times\times(1+K_i)(t_i-t_{i-1})$ или

$$(z_{i-1}-z_i)/(t_{i-1}-t_i)=-\beta_i(t_{i-1}-t_i)$$



Фиг. 1

Переходя в последнем равенстве к пределу при $t_i\to t_{i-1}$, будем иметь

$$dz/d\tau=-\beta(1+K),\qquad z=z_0-\beta(1+K)t \tag{1.6}$$

Следовательно, огибающая семейства (1.4) по параметру t_i — прямая.

Приведем значения частных производных от функции u по параметрам t_i, β_i в соответствии с конструктивными соотношениями (1.3), (1.5):

$$\frac{\partial u_{i-}}{\partial t_i}=-\beta_i,\qquad \frac{\partial u_{i+1-}}{\partial t_i}=\beta_{i+1},\qquad \frac{\partial u_i}{\partial t_i}=-\beta_i(1+K_i),$$
$$\frac{\partial u_{i+1}}{\partial t_i}=\beta_{i+1}(1+K_{i+1})$$
$$\frac{\partial u_{i+2}}{\partial t_i}=\ldots=\frac{\partial u_n}{\partial t_i}=0,\qquad \frac{\partial u_n}{\partial T}=-\beta_n(1+K_n),\qquad \frac{\partial u_{i-}}{\partial\beta_i}=\frac{u_i-1}{\beta_i(1+K_i)}$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial\beta_i}=\frac{u_i-1}{\beta_i z_{0i}}(1-\beta_i z_{0i}'),\qquad \frac{\partial u_{i+1}}{\partial\beta_i}=\ldots=\frac{\partial u_n}{\partial\beta_i}=0$$

В силу уравнений (1.3), (1.4)

$$z_n=z_0\frac{z_1}{z_0}\ldots\frac{z_n}{z_{n-1}}=z_0u_1\ldots u_n$$

и, следовательно

$$\frac{\partial z_n}{\partial t_i} = z_n \left[\frac{\beta_{i+1}(1+K_{i+1})}{u_{i+1}} - \frac{\beta_i(1+K_i)}{u_i} \right]$$

$$\frac{\partial z_n}{\partial T} = -\beta_n \frac{z_n}{u_n}(1+K_n)$$

$$\frac{\partial z_n}{\partial \beta_1} = \frac{z_n}{z_0 u_1} \left[\frac{(u_1-1) z_0}{\beta_1} + z_0' \right], \quad \frac{\partial z_n}{\partial \beta_i} = \frac{z_n(u_i-1)}{\beta_i u_i z_{0i}}(z_{0i}-\beta_i z_{0i}')$$

2. Рассмотрим движение неоднородной составной ракеты при условии, что движение каждой из ступеней можно моделировать прямолинейным движением по наклонной под углом θ_i к горизонту направляющей. Действием аэродинамических сил пренебрегается, поле силы тяжести считается однородным.

Уравнение движения i-й субракеты будет

$$v^{\cdot} = -g \cos \theta_i - V^r m^{\cdot}/m \tag{2.1}$$

Переходя к новой функции управления u (см. п. 1) и учитывая, что $u^{\cdot} = -\beta$, представим уравнение движения (2.1) в виде

$$v^{\cdot} = -g_i + \beta_i V_i^r/u_i, \quad t \in (t_{i-1}+0 < t < t_i - 0) \tag{2.2}$$

Образуем функцию Лагранжа

$$H = \Psi_v(-g_i + \beta_i V_i^r/u) \tag{2.3}$$

где Ψ_v — множитель Лагранжа решения сопряженного уравнения $\Psi_v^{\cdot} = -\partial H/\partial v = 0$, следовательно, $\Psi_v = \text{const}$. Значение этой константы находим из краевых условий $\Psi_v(T) + \partial(v)/\partial v = 0$, т. е. $\Psi_v = -1$.

Введем в рассмотрение функционал

$$J = v(T) + \mu(z_n - c) + \sum \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} H_i \, dt \tag{2.4}$$

где $v(T)$ — скорость составной ракеты в конце активного участка ($v(T)$ оптимизируемый функционал задачи), z_n — относительная координата полезного груза, μ — постоянный множитель Лагранжа.

Необходимыми условиями экстремума данного функционала по параметрам t_i, β_i будет равенство нулю соответствующих частных производных $\partial J/\partial t_i = 0$, $\partial J/\partial \beta_i = 0$.

Вычисления дают следующие результаты:

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_1} = \frac{\mu z_n}{u_1 z_0} \left[z_0' + \frac{(u_1-1) z_0}{\beta_1} \right] + \frac{V_1^r}{\beta_1} \frac{u_{1-}-1}{u_{1-}} = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_i} = \frac{\mu z_n}{u_i z_{0i}}(u_i-1)(z_{0i}-\beta_i z_{0i}') + \frac{V_i^r}{u_{i-}}(u_{i-}-1) = 0 \quad (i=2,\ldots,n) \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial J}{\partial t_i} = \mu z_n \left[\frac{\beta_{i+1}(1+K_{i+1})}{u_{i+1}} - \frac{\beta_i(1+K_i)}{u_i} \right] -$$

$$- \left[\frac{\beta_i V_i^r}{u_{i-}} - g_i \right] + \left[\frac{\beta_{i+1} V_{i+1}^r}{u_{i+1-}} - g_{i+1} \right] = 0 \quad (i=1,\ldots,n) \tag{2.7}$$

Из уравнений (2.5)—(2.7) выведем ряд полезных расчетных формул. Представим уравнения (2.7) в виде

$$\mu z_n \frac{\beta_{i+1}(1+K_{i+1})}{u_{i+1}} + \frac{\beta_{i+1}V_{i+1}^r}{u_{i+1-}} - g_{i+1} = \mu z \frac{\beta_i(1+K_i)}{u_i} + \frac{\beta_i V_i^r}{u_{i-}} - g_i \tag{2.8}$$

откуда следует, что выражение, входящее в правую часть равенства, не зависит от переменного индекса i, следовательно

$$\mu z_n \frac{\beta_i(1+K_i)}{u_i} + \frac{\beta_i V_i^r}{u_{i-}} - g_i = \text{const} \quad {\scriptstyle (i=1,\dots,n)} \tag{2.9}$$

т. е. произошло разделение переменных по индексам.

Для конечного оптимального момента времени T находим

$$\frac{\partial J}{\partial T} = -\mu z_n \frac{\beta_n(1+K_n)}{u_n} - \frac{\beta_n V_n^r}{u_{n-}} + g_n = 0$$

т. е. константа, введенная в равенство (2.9), равна нулю.

Из уравнения (2.3) находим

$$C = -\frac{1}{\mu z_n} = \frac{z_{0i} - \beta_i z_{0i}'}{z_{0i} V_i^r}(1+K_i) \quad {\scriptstyle (i=2,\dots,n)} \tag{2.10}$$

Далее из соотношения (2.5) следует

$$C = -\frac{1}{\mu z_n} = \frac{u_1 + K_1}{V_1^r u_1}\left[1 + \frac{\beta_1 z_0'}{z_0(u_1 - 1)}\right] \tag{2.11}$$

Из уравнения (2.9) при условии равенства константы нулю получаем

$$-\frac{1}{\mu z_n} = \frac{\beta_i(1+K_i)}{(\beta_i V_i^r/u_{i-} - g_i)u_i} \quad {\scriptstyle (i=1,\dots,n)} \tag{2.12}$$

И, наконец, исключая из уравнений (2.11), (2.12) константу C, окончательно находим

$$\gamma_i = \frac{\beta_i V_i^r}{g_i} = \frac{z_i/z_{i-1} + K_i}{1+K_i}\left(1 - \frac{z_{0i}}{\beta_i z_{0i}'}\right) \tag{2.13}$$

аналогично

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1 V_1^r}{g_1} = \frac{z_1/z_0 + K_1}{1+K_1}\left[1 + \frac{(u_1-1)z_0}{\beta_1 z_0'}\right] \tag{2.14}$$

Если рассматривается линейная модель зависимости массы двигательной установки от секундного расхода, то $z_{0i}' = -\varkappa_i$ и при $\nu_i = 0$ из формул (2.13), (2.14) следует

$$\gamma_i = \frac{1}{1 - z_{0i}} \frac{z_i/z_{i-1} + K_i}{1+K_i}, \qquad \gamma_1 = \frac{1-z_1}{1-z_0}\left(1 + \frac{z_1 - z_0}{1+k_1}\right)$$

Данные зависимости можно получить комбинацией формул (8.10) из [3] (стр. 149).

3. Полученные соотношения (2.10)—(2.14) позволяют провести предварительный расчет как однородной, так и неоднородной ступенчатых конструкций.

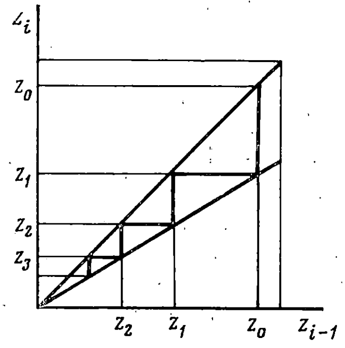
Рассмотрим бессиловую модель составной ракеты. Известно, что достижение определенной скорости не зависит от способа расхода топлива, поэтому следует использовать формулы (2.7), (2.12). Полагая в соотношении (2.12) величину $g_i=0$, найдем

$$\frac{(1+K_1z_1/z_0)}{V_1^r}=\ldots=\frac{(1+K_nz_n/z_{n-1})}{V_n^r} \tag{3.1}$$

Для однородной конструкции ракеты при $k_i=k$, $V_i^r=V^r$ будем иметь

$$z_1/z_0=z_2/z_1=\ldots=z_n/z_{n-1}=\delta \tag{3.2}$$

Введем, следуя [4], плоскость переменных (z_{i-1}, z_i) (фиг. 2). В силу уравнения (3.2) координаты относительных весов последовательных субракет распределены по закону геометрической прогрессии. В плоскости переменных (z_{i-1}, z_i) эти координаты лежат на прямой $z_i=\delta z_{i-1}$, проходящей через начало координат. Было установлено (п.1), что бесконечно ступенчатая, непрерывная ракета изображается биссектрисой первого координатного угла и по свойству огибающей координаты z_i также лежат на этой огибающей. Задаваясь числом δ, строим прямую $z_i=\delta z_{i-1}$. Найдем точку пересечения данной прямой с прямой $z=z_0$ и определим координату z_1. Проводим из этой точки горизонтальный отрезок до пересечения с биссектрисой; из найденной точки проводим вертикальную прямую до пересечения с прямой $z_i=\delta z_{i-1}$. Полученная вновь точка определяет координату z_2.



Фиг. 2

Нетрудно заметить, что задача оптимального разбиения однородной составной ракеты сводится к процедуре вписывания лестницы [5] в соответствующие прямые. Конечная координата нижней ступеньки определяет координату полезного груза, число ступеней лестницы равно минимальному числу ступеней, позволяющих достичь заданного значения скорости. Приращение скорости достаточно сосчитать лишь для первой ступени, так как приращение скоростей в результате работы двигателей последовательных субракет одинаково.

Если рассматривается вертикальное движение составной ракеты при действии силы тяжести, то из соотношений (2.12), полагая $K_i=K$, $\beta_i=\beta$, $z_{0i}=z_0$, будем иметь

$$z_2/z_1=z_3/z_2=\ldots=z_n/z_{n-1} \tag{3.3}$$

Задаемся конструктивным параметром k_1, конкретным значением z_0, определяющим долю относительного веса двигательной установки в относительном весе ракеты первой субракеты, начальной тяговооруженностью γ_1, из соотношения (2.13) находим z_1. Строим далее прямую $z_i=\delta z_{i-1}$ и вписываем лестницу по описанной выше процедуре.

Скорость в конце активного участка равна

$$v=\Sigma v_i,\quad v_i/V_i^r=-(1-u_{i-})/\gamma_i-\ln u_{i-} \tag{3.4}$$

Расстояние, пройденное i-й субракетой, будет

$$s_i=V_i^rT_i-{}^1/_2g_iT_i^2+(V_i^ru_{i-}/\beta_i)\ln u_{i-} \tag{3.5}$$

Пример 1. Пусть для маневра в космосе используется гипотетическая двухступенчатая конструкция со следующими характеристиками: $z_0=0.98$, $k_1=0.06$, $V_1^r=4000$ м/с – первая ступень; $z_{02}=0.9$, $k_2=0.1$, $V_2^r=4500$ м/с, $z_2=y_2=0.8$ – вторая ступень.

z_{0i}	0.9792	0.97	0.981
z_i	0.3574	0.1267	0.047
u_i	0.365	0.3545	0.371
k_i	0.0363	0.078 (0.0357)	0.128 (0.06)
K_i	0.0583	0.1112 (0.0677)	0.15 (0.0806)
u_{i-}	0.4	0.419	0.453
$\alpha_i=1-u_{i-}$	0.6	0.581	0.547
V_i^r, мс$^{-1}$	3500 (2300)	4100	4250
β_i, с$^{-1}$	0.00475	0.00162	0.001
$\gamma_i^\circ=\beta_i V_i^r / g$	1.697 (1.133)	0.677	0.47
γ_i	12.36	4.41	14.61
		$\sin\theta_2=\gamma_2^\circ / \gamma_2=0.1535$	$\sin\theta_3=\gamma_3^\circ / \gamma_3=0.032$
θ_i	30°	8.83°	1.84°
v_i, мс$^{-1}$	2867	3026	3206
X_i, км	115.2	232.9	752.5
Y_i, км	66.42	36.2	24.1
T_i, с	126.3	358.6	547

По соотношениям (1.3) находим $k_1=0.082$, $k_2=0.222$; из соотношений (3.1) определим $z_1=0.862$, тогда $\Delta v_1=472$ м/с, $\Delta v_2=273$ м/с. Полное приращение скорости в этом случае будет $\Delta v=745$ м/с. Пусть спутник, двигаясь по круговой орбите радиуса $r_p=R_3+100$ км, получил касательный импульс скорости, равный Δv. Тогда скорость спутника станет равной $v_p=7.84$ км/с$+0.745$ км/с и он перейдет на эллиптическую орбиту с размерами $r_a / r_p=1.496$, т. е. $r_a=9678$ км.

Пример 2. Проведем расчет одноступенчатой конструкции типа V-2. По данным [3] находим $\varkappa\beta=0.0732$, $\nu=0.023$; применяя линейную весовую модель двигателя, получим $z_0=1-\varkappa\beta-\nu=0.9037$, $k_1=0.01348$, $K_1=0.2557$, $z_1=0.075$. По формуле (2.14) найдем $\gamma_1=2.59$. Величина $u_{1-}=0.27$, доля топлива $\alpha_1=1-u_1=0.73$. Конечная скорость будет $v_k=2158$ м/с.

Полагая, что движение ракеты происходит по направляющей под углом $\theta=55°$ к горизонту, по формуле (3.5) найдем $S=58$ км. Высота $Y=51$ км, дальность $X=33$ км, стартовая тяговооруженность $\gamma=\beta V^r / g=2.1$, время $T=74.15$ с. Полученные величины соответствуют практически реализованным.

Пример 3. Рассмотрим расчет составной ракеты типа Сатурн-5 (S-5) по характеристикам, приведенным в [1, 6]. При расчете по формулам (2.13), (2.14) использовалось то обстоятельство, что диапазон изменения величин, входящих в эти уравнения, известен. Задавая, поэтому, конкретные значения величин, входящих нелинейно, относительно других переменных, получим линейные соотношения. Результаты расчетов для трех ступеней ракеты приведены выше. Величины, указанные в скобках, соответствуют практически реализованным. Однако использование этих числовых значений приводит к оптимальному разбиению конструкции, существенно отличному от практически реализованного. Таким образом, конечная скорость составной ракеты $v=\Sigma v_i=9100$ м/с, высота $Y=\Sigma Y_i=127$ км, дальность $X=\Sigma X_i=1100$ км, время полета $T=\Sigma T_i=1032$ с.

Поступила 30 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фертрегт М.* Основы космонавтики. М., «Просвещение», 1969.
2. *Космодемьянский В. А.* Достаточные условия абсолютного экстремума в одной задаче вариационного типа Больца – Майера. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
3. *Воробьев Л. М.* К теории полета ракет. М., «Машиностроение», 1970.
4. *Космодемьянский В. А.* Оптимальный подбор ступеней составной ракеты. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, вып. 1.
5. *Пиявский С. А., Брусов В. С., Хвилон Е. А.* Оптимизация параметров многоцелевых летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1974.
6. *Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В.* Механика космического полета с малой тягой. М., «Наука», 1966.