МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1980

УДК 531.3

О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОСТОЯННОЙ ПО МОДУЛЮ УГЛОВОЙ СКОРОСТЬЮ

И. А. ГАЛИУЛЛИН

(Москва)

Выводятся необходимые и достаточные условия движения тяжелого твердого тела с постоянной по модулю угловой скоростью.

Рассматриваются случаи, когда движение твердого тела с постоянной по модулю угловой скоростью является одновременно обобщенной прецессией кинетического момента.

Доказано, что в случае Гесса — Аппельрота движение с постоянной по модулю угловой скоростью невозможно.

В пространстве переменных Гесса строится поверхность, движение изображающей точки по которой соответствует обобщенной прецессии кинетического момента.

1. Рассмотрим систему уравнений Эйлера — Пуассона, описывающую движение твердого тела с одной закрепленной точкой в однородном поле сил тяжести

$$\begin{aligned} &A\dot{p}+(C-B)qr=Mg(z_c\gamma_2-y_c\gamma_3)\\ &B\dot{q}+(A-C)rp=Mg(x_c\gamma_3-z_c\gamma_1)\\ &C\dot{r}+(B-A)pq=Mg(y_c\gamma_1-x_c\gamma_2)\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\dot{\gamma}_1=r\gamma_2-q\gamma_3,\quad \dot{\gamma}_2=p\gamma_3-r\gamma_1,\quad \dot{\gamma}_3=q\gamma_1-p\gamma_2 \tag{1.2}$$

Здесь p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела на оси подвижной системы координат $Oxyz$, направленные по главным осям эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки O, γ_1, γ_2, γ_3 — проекции на те же оси единичного вектора $\boldsymbol{\zeta}$, направленного вертикально вверх, A, B, C — главные моменты инерции тела относительно точки O, x_c, y_c, z_c — координаты центра тяжести в подвижной системе $Oxyz$, M — масса тела, g — ускорение свободного падения.

Система уравнений (1.1), (1.2) обладает следующими первыми интегралами:

интегралом энергии

$$\sigma_1\equiv{}^1/_2(Ap^2+Bq^2+Cr^2)+Mg(x_c\gamma_1+y_c\gamma_2+z_c\gamma_3)=h$$

интегралом момента количества движения

$$\sigma_2\equiv Ap\gamma_1+Bq\gamma_2+Cr\gamma_3=n$$

в которых h и n — постоянные. Также имеет место соотношение $\sigma_0\equiv\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$ (тривиальный интеграл).

От переменных p, q, r перейдем к переменным ω, α, β по формулам:

$$p=\omega\cos\alpha\cos\beta,\qquad q=\omega\cos\alpha\sin\beta,\qquad r=\omega\sin\alpha \tag{1.3}$$

где $\omega=|\boldsymbol{\omega}|$, $-\pi/2\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$, $0\leqslant\beta<2\pi$. Переменные ω, α, β представляют собой сферические координаты конца вектора угловой скорости. Тогда, если якобиан преобразования (1.3) $J=-\omega^2\cos\alpha$ отличен от нуля, то система (1.1), (1.2) будет эквивалентна системе уравнений

$$\begin{aligned}
\omega^{\cdot} &= \left(\frac{m_x}{A}\cos\alpha\cos\beta+\frac{m_y}{B}\cos\alpha\sin\beta+\frac{m_z}{C}\sin\alpha\right)-\\
&\quad -\frac{\omega^2}{4ABC}(A-B)(B-C)(C-A)\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 2\beta\\
\alpha^{\cdot} &= -\frac{1}{\omega}\left(\frac{m_x}{A}\sin\alpha\cos\beta+\frac{m_y}{B}\sin\alpha\sin\beta-\frac{m_z}{C}\cos\alpha\right)-\\
&\quad -\frac{\omega}{2ABC}[(B-C)(C-A)\sin^2\alpha+AB](A-B)\cos\alpha\sin 2\beta\\
\beta^{\cdot} &= -\frac{1}{\omega\cos\alpha}\left(\frac{m_x}{A}\sin\beta-\frac{m_y}{B}\cos\beta\right)-\\
&\quad -\frac{\omega}{AB}[(B-C)B\sin^2\beta+(A-C)A\cos^2\beta]\sin\alpha
\end{aligned}\tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1^{\cdot} &= \omega(\gamma_2\sin\alpha-\gamma_3\cos\alpha\sin\beta)\\
\gamma_2^{\cdot} &= \omega(\gamma_3\cos\alpha\cos\beta-\gamma_1\sin\alpha)\\
\gamma_3^{\cdot} &= \omega(\gamma_1\cos\alpha\sin\beta-\gamma_2\cos\alpha\cos\beta)
\end{aligned}\tag{1.5}$$

В (1.4) обозначено $m_x=Mg(z_c\gamma_2-y_c\gamma_3)$, $m_y=Mg(x_c\gamma_3-z_c\gamma_1)$, $m_z=Mg(y_c\gamma_1-x_c\gamma_2)$. Система (1.4), (1.5) будет также обладать интегралами энергии и момента количества движения, которые в новых переменных примут вид соответственно

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &\equiv {}^1/_2\omega^2(A\cos^2\alpha\cos^2\beta+B\cos^2\alpha\sin^2\beta+C\sin^2\alpha)+\\
&\quad +Mg(x_c\gamma_1+y_c\gamma_2+z_c\gamma_3)=h
\end{aligned}\tag{1.6}$$

$$\sigma_2\equiv\omega(A\gamma_1\cos\alpha\cos\beta+B\gamma_2\cos\alpha\sin\beta+C\gamma_3\sin\alpha)=n\tag{1.7}$$

Задавая независимый третий интеграл, построим, согласно методике работ [1, 2], систему дифференциальных уравнений, обладающую этими тремя первыми интегралами. Здесь будет рассматриваться движение твердого тела с постоянной по модулю угловой скоростью, поэтому независимый третий интеграл зададим в виде

$$\sigma_3\equiv\omega=\omega_0,\qquad \omega_0=\text{const}\tag{1.8}$$

Тогда указанная система уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\omega^{\cdot} &= \Phi_\omega,\quad \alpha^{\cdot}=\frac{1}{(\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\zeta})}\left\{\left[\Phi_1-\frac{2T}{\omega}\Phi_\omega-Mg(\boldsymbol{\rho}_c\cdot\mathbf{f})\right](B\gamma_2\cos\beta-A\gamma_1\sin\beta)+\right.\\
&\quad \left.+\frac{1}{2}\left[\Phi_2-\frac{(\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\zeta})}{\omega}\Phi_\omega-(\mathbf{K}\cdot\mathbf{f})\right](A-B)\,\omega\cos\alpha\sin 2\beta\right\}\\
\beta^{\cdot} &= \frac{1}{(\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\zeta})\cos\alpha}\left\{\left[\Phi_1-\frac{2T}{\omega}\Phi_\omega-Mg(\boldsymbol{\rho}_c\cdot\mathbf{f})\right](A\gamma_1\sin\alpha\cos\beta+\right.\\
&\quad +B\gamma_2\sin\alpha\sin\beta-C\gamma_3\cos\alpha)-\frac{1}{2}\left[\Phi_2-\frac{(\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\zeta})}{\omega}\Phi_\omega-(\mathbf{K}\cdot\mathbf{f})\right]\times\\
&\quad \left.\times(A\cos^2\beta+B\sin^2\beta-C)\,\omega\sin 2\alpha\right\}
\end{aligned}\tag{1.9}$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_ω — произвольные функции, обращающиеся в нуль на поверхностях (семействах поверхностей) $\sigma_1=h$, $\sigma_2=n$, $\sigma_3=\omega_0$ соответственно, $T={}^1/_2(Ap^2+Bq^2+Cr^2)$ — кинетическая энергия тела, $\mathbf{K}=\mathbf{K}(Ap, Bq, Cr)$ —

момент количества движения относительно закрепленной точки O, $\boldsymbol{\rho}_c = \boldsymbol{\rho}_c(x_c, y_c, z_c)$ — радиус-вектор центра тяжести тела, $\mathbf{f}=\mathbf{f}(f_1, f_2, f_3)$, где f_1, f_2, f_3 — правые части уравнений (1.5), соответственно, $\mathbf{L}=\mathbf{L}(A(B-C)qr, B(C-A)rp, C(A-B)pq)$, причем в выражениях для T, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ переменные p, q, r заменены по формулам (1.3); предполагается также, что $(\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\zeta})\cos\alpha\neq 0$.

Приравнивая правые части построенной системы уравнений (1.9) и системы (1.4), получим необходимые и достаточные условия существования движений тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой с постоянной по модулю угловой скоростью. При этом полученные равенства в силу указанной выше произвольности функций Φ_1, Φ_2, Φ_ω достаточно рассматривать на интегральном многообразии

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^{3} \{\sigma_i = \mathrm{const}\} \cap \{|\boldsymbol{\zeta}|=1\}.$$

Рассмотрим два частных случая.

1. *Если* $\alpha=\pm{}^1/_2\pi$, *якобиан преобразования* (1.3) *тождественно равен нулю.* Поэтому будем рассматривать непосредственно уравнения (1.1), (1.2). Так как $p=q=0$, $r=\pm\omega_0$, то из уравнений Пуассона получим

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = (1-\gamma_3^2)^{1/2}\sin(\pm\omega_0 t+\varphi_0) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma_3=\mathrm{const}, \quad \varphi_0=\mathrm{const} \\ &\gamma_2 = (1-\gamma_3^2)^{1/2}\cos(\pm\omega_0 t+\varphi_0) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Подставляя эти выражения в уравнения Эйлера (1.1), определим, что движение с постоянной по модулю угловой скоростью в рассматриваемом случае сводится к перманентным вращениям вокруг произвольной оси, если $x_c=y_c=z_c=0$, или вокруг вертикальной оси, если $x_c=y_c=0$, $z_c\neq 0$.

2. *Случай Эйлера:* $x_c=y_c=z_c=0$. Здесь $m_x=m_y=m_z=0$ обращается в нуль только тогда, когда среди моментов инерции есть равные, что является, согласно [3], условием движения твердого тела с постоянной по модулю угловой скоростью в случае Эйлера. Это движение представляет собой регулярную прецессию вокруг оси, направленной вдоль вектора кинетического момента, который сохраняет свое направление и величину. Если, например, $A=B$, то решение уравнений (1.4) имеет вид

$$\begin{aligned} &\omega=\omega_0, \quad \alpha=\alpha_0, \quad \beta=(C-A)A^{-1}\omega_0\sin\alpha_0\cdot t+\beta_0 \\ &\alpha_0=\mathrm{const}, \quad \beta_0=\mathrm{const} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Отметим, что в случае $m_x=m_y=m_z=0$ движение с постоянной по модулю угловой скоростью исследовалось в работе [4].

2. Как указывалось в п. 1, выражения, полученные приравниванием правых частей систем уравнений (1.4) и (1.9) и являющиеся необходимыми и достаточными условиями существования движения твердого тела, при котором модуль угловой скорости сохраняет постоянное значение, достаточно рассматривать на интегральном многообразии Σ. Для этого нужно положить $\omega=\omega_0$ и исключить γ_1, γ_2, γ_3, следуя Гессу, с помощью указанных выше интегралов согласно изложенному в [5]. Переменные γ_1, γ_2, γ_3 определяются из формул

$$\begin{aligned} \gamma_1(\rho_c^2K^2-\nu^2) &= \varkappa(Bqz_c-Cry_c)+x_c(\mu K^2-n\nu)+Ap(n\rho_c^2-\mu\nu) \\ \gamma_2(\rho_c^2K^2-\nu^2) &= \varkappa(Crx_c-Apz_c)+y_c(\mu K^2-n\nu)+Bq(n\rho_c^2-\mu\nu) \\ \gamma_3(\rho_c^2K^2-\nu^2) &= \varkappa(Apy_c-Bqx_c)+z_c(\mu K^2-n\nu)+Cr(n\rho_c^2-\mu\nu) \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\rho_c^2=x_c^2+y_c^2+z_c^2, \qquad K^2=A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2$$
$$\nu=Apx_c+Bqy_c+Crz_c$$

$$
\begin{gathered}
\mu=-{}^1/_2(Mg)^{-1}(Ap^2+Bq^2+Cr^2-2h)\\
\varkappa=\pm[(\rho_c{}^2K^2-\nu^2)-(\mu\mathbf{K}-n\rho_c)^2]^{1/2}
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

При этом выражение для $\varkappa$ представляет собой смешанное произведение

$$
\varkappa=((\boldsymbol{\rho}_c\times\boldsymbol{\zeta})\cdot\mathbf{K})=(\boldsymbol{\zeta}\cdot(\mathbf{K}\times\boldsymbol{\rho}_c))
\tag{2.3}
$$

в котором γ_1, γ_2, γ_3 уже исключены с помощью первых интегралов. В (2.1) и (2.2) p, q, r следует, разумеется, заменить по формулам (1.3).

Интересным представляется случай, при котором переменные γ_i ($i=1$, 2, 3) определяются из соотношений (2.1) однозначным образом при выполнении равенства

$$
\varkappa=0
\tag{2.4}
$$

Это означает, что в процессе движения твердого тела вектор кинетического момента остается в подвижной плоскости, проходящей через вертикаль и центр тяжести тела. Такое движение, согласно данному в работе [6] определению, представляет собой частный вид обобщенной прецессии кинетического момента.

В данной работе будут описаны все случаи, когда указанная прецессия совершается вследствие постоянства модуля угловой скорости, иными словами, когда равенство (2.4) выполняется на множестве $p^2+q^2+r^2=\omega_0{}^2$. Полагая $\varkappa^2|_{p,\,q,\,r\to\omega,\,\alpha,\,\beta}=S(\omega,\alpha,\beta)$, будем иметь тогда, что равенство

$$
S(\omega_0,\alpha,\beta)=0
\tag{2.5}
$$

должно представлять тождество по α и β. Будут также рассмотрены случаи, когда для некоторого конечного числа значений α равенство (2.5) является тождеством по переменной β и, наоборот, для некоторого конечного числа значений β равенство (2.5) представляет тождество по переменной α. В этих двух случаях уравнения (1.4), (1.5) должны, конечно, допускать решение $\alpha=\mathrm{const}$ и $\beta=\mathrm{const}$ соответственно.

Выражение $\varkappa^2$ есть многочлен шестой степени от p, q, r:

$$
\begin{gathered}
\varkappa^2=-{}^1/_4(Mg)^{-2}\{A^4p^6+A^2B(2A+B)p^4q^2+A^2C(2A+C)p^4r^2+AB^2(A+2B)p^2q^4+\\
+2ABC(A+B+C)p^2q^2r^2+AC^2(A+2C)p^2r^4+B^4q^6+B^2C(2B+C)q^4r^2+BC^2(B+2C)q^2r^4+\\
+C^4r^6+4A^3hp^4-4AB(A+B)hp^2q^2-4AC(A+C)hp^2r^2-4B^3hq^4-4BC(B+C)hq^2r^2-\\
-4C^3hr^4+4MgA^2nx_cp^3+4MgABny_cp^2q+4MgACnz_cp^2r+4MgABnx_cpq^2+4MgACnx_cpr^2+\\
+4MgB^2ny_cq^3+4MgBCnz_cq^2r+4MgBCny_cqr^2+4MgC^2nz_cr^3+4A^2[h^2-(y_c{}^2+z_c{}^2)(Mg)^2]p^2+\\
+8ABx_cy_c(Mg)^2pq+8ACx_cz_c(Mg)^2pr+4B^2[h^2-(x_c{}^2+z_c{}^2)(Mg)^2]q^2+\\
+8BCy_cz_c(Mg)^2qr+4C^2[h^2-(x_c{}^2+y_c{}^2)(Mg)^2]r^2-8Ax_chnMgp-8By_chnMgq-\\
-8Cz_chnMgr+4(Mg)^2n^2\rho_c{}^2\}
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Полагая в формулах (1.3) $\omega=\omega_0$, подставим далее в (2.6) выражения для p, q, r. Понижая степень по известным тригонометрическим формулам, получим выражение для $S(\omega_0,\alpha,\beta)$ в виде следующего тригонометрического полинома:

$$
\begin{gathered}
S(\omega_0,\alpha,\beta)\equiv P(\alpha,\beta)=-{}^1/_4(Mg)^{-2}(\overset{(cc)}{c_{66}}\cos 6\alpha\cos 6\beta+\overset{(cc)}{c_{64}}\cos 6\alpha\cos 4\beta+\\
+\overset{(cc)}{c_{62}}\cos 6\alpha\cos 2\beta+\overset{(c)}{c_{60}}\cos 6\alpha+\overset{(cc)}{c_{46}}\cos 4\alpha\cos 6\beta+\overset{(cc)}{c_{44}}\cos 4\alpha\cos 4\beta+\\
+\overset{(cc)}{c_{42}}\cos 4\alpha\cos 2\beta+\overset{(c)}{c_{40}}\cos 4\alpha+\overset{(sc)}{c_{32}}\sin 3\alpha\cos 2\beta+\overset{(s)}{c_{30}}\sin 3\alpha+\overset{(cs)}{c_{33}}\cos 3\alpha\sin 3\beta+\\
+\overset{(cc)}{c_{33}}\cos 3\alpha\cos 3\beta+\overset{(cs)}{c_{31}}\cos 3\alpha\sin\beta+\overset{(cc)}{c_{31}}\cos 3\alpha\cos\beta+\overset{(ss)}{c_{21}}\sin 2\alpha\sin\beta+
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

$$+c_{21}^{(sc)}\sin 2\alpha\cos\beta+c_{26}^{(cc)}\cos 2\alpha\cos 6\beta+c_{24}^{(cc)}\cos 2\alpha\cos 4\beta+c_{22}^{(cs)}\cos 2\alpha\sin 2\beta+$$

$$+c_{22}^{(cc)}\cos 2\alpha\cos 2\beta+c_{20}^{(c)}\cos 2\alpha+c_{12}^{(sc)}\sin\alpha\cos 2\beta+c_{10}^{(s)}\sin\alpha+c_{13}^{(cs)}\cos\alpha\sin 3\beta+$$

$$+c_{13}^{(cc)}\cos\alpha\cos 3\beta+c_{11}^{(cs)}\cos\alpha\sin\beta+c_{11}^{(cc)}\cos\alpha\cos\beta+c_{06}^{(c)}\cos 6\beta+c_{04}^{(c)}\cos 4\beta+$$

$$+c_{02}^{(s)}\sin 2\beta+c_{02}^{(c)}\cos 2\beta+c_0)$$

Выпишем некоторые коэффициенты полинома (2.7):

$$\begin{gathered}
c_{66}^{(cc)}=2^{-10}\omega_0^6(A+B)(A-B)^3, \qquad c_{60}^{(c)}\Big|_{A=B}=2^{-5}\omega_0^6(A+C)(A-C)^3\\
c_{22}^{(cs)}=2\omega_0^2ABx_cy_c(Mg)^2, \qquad c_{22}^{(cc)}\Big|_{A=B}=\omega_0^2A^6(x_c^2-y_c^2)(Mg)^2\\
c_{20}^{(c)}\Big|_{A=B=C,x_c^2=y_c^2}=2\omega_0^2A^2(x_c^2-z_c^2)(Mg)^2,\\
c_0\big|_{A=B=C,x_c=y_c=z_c=0}={}^1/_4\omega_0^2A^2({}^1/_2A\omega_0^2-h)^2
\end{gathered}\tag{2.8}$$

Из выражений (2.8) следует, что для тождественного обращения в нуль полинома (2.7) необходимо выполнение условий

$$A=B=C,\qquad x_c=y_c=z_c=0\tag{2.9}$$

Нетрудно показать, что в этом случае все коэффициенты полинома $P(\alpha,\ \beta)$ обращаются в нуль. Свободный член c_0 обращается в нуль в силу интеграла энергии, что соответствует перманентному вращению динамически симметричного твердого тела, закрепленного в центре тяжести.

Рассмотрим случай, когда для некоторого конечного числа значений α равенство (2.5) есть тождество по переменной β. Фиксируя значение α в выражении (2.7), получим тригонометрический полином от β в следующем виде:

$$\begin{gathered}
P^{(\alpha)}(\beta)=-{}^1/_4(Mg)^{-2}(a_6^{(c)}\cos 6\beta+a_4^{(c)}\cos 4\beta+\\
+a_3^{(s)}\sin 3\beta+a_3^{(c)}\cos 3\beta+a_2^{(s)}\sin 2\beta+a_2^{(c)}\cos 2\beta+a_1^{(s)}\sin\beta+a_1^{(c)}\cos\beta+a_0)
\end{gathered}\tag{2.10}$$

Выпишем также некоторые коэффициенты полинома (2.10):

$$a_6^{(c)}=2^{-5}\omega_0^6(A+B)(A-B)^3\cos^6\alpha\tag{2.11}$$

$$a_2^{(s)}=2\omega_0^2ABx_cy_c(Mg)^2\cos^2\alpha,\qquad a_2^{(c)}\big|_{A=B}=\omega_0^2A^2(x_c^2-y_c^2)(Mg)^2$$

Отсюда следует, что для тождественного обращения в нуль полинома (2.10) необходимо выполнение условий

$$A=B,\qquad x_c=y_c=0\tag{2.12}$$

которые характеризуют случай распределения масс, известный как случай Лагранжа. Нетрудно показать, что при этом все коэффициенты полинома $P^{(\alpha)}(\beta)$ обращаются в нуль. Уравнения (1.4) тогда приобретают вид

$$\dot\omega=\frac{Mgz_c\cos\alpha}{A}(\gamma_2\cos\beta-\gamma_1\sin\beta)$$

$$\dot\alpha=-\frac{Mgz_c\sin\alpha}{A\omega}(\gamma_2\cos\beta-\gamma_1\sin\beta)$$

$$\beta^{\cdot}=-\frac{Mgz_c}{A\omega\cos\alpha}(\gamma_2\sin\beta+\gamma_1\cos\beta)-\frac{A-C}{A}\omega \tag{2.13}$$

Требуя, чтобы движение тела происходило с постоянной по модулю угловой скоростью ω_0, будем иметь

$$\gamma_2\cos\beta-\gamma_1\sin\beta=0 \tag{2.14}$$

и, следовательно, $\alpha=\mathrm{const}$. Из интеграла момента количества движения получаем

$$\gamma_0\equiv\gamma_2\sin\beta+\gamma_1\cos\beta=(n-C\omega_0\gamma_3\sin\alpha)\,/\,A\omega_0\cos\alpha \tag{2.15}$$

а из интеграла энергии определяется γ_3:

$$\gamma_3=[h-{}^1/_2\omega_0^2(A\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha)]\,/\,Mgz_c \tag{2.16}$$

откуда следует, что γ_3 и γ_0 — постоянные величины. Обозначая через ω_r правую часть третьего из уравнений (2.13), будем иметь решение системы (2.13) в виде

$$\begin{gathered}\omega=\omega_0,\qquad \alpha=\alpha_0,\qquad \beta=-\omega_r t+\beta_0\\ \alpha_0=\mathrm{const},\qquad \beta_0=\mathrm{const}\end{gathered} \tag{2.17}$$

Из (2.14) и (2.15) определяются γ_1 и γ_2:

$$\gamma_1=\gamma_0\cos(-\omega_r t+\beta_0),\qquad \gamma_2=\gamma_0\sin(-\omega_r t+\beta_0)$$

откуда находятся углы Эйлера

$$\begin{gathered}\varphi=\omega_r t+(\pi/2-\beta_0),\qquad \psi=\omega_e t+\psi_0,\qquad \theta=\theta_0\\ \omega_e=\gamma_3^{-1}(\omega_0\sin\alpha-\omega_r),\qquad \theta_0=\arccos\gamma_3,\qquad \psi_0=\mathrm{const}\end{gathered} \tag{2.18}$$

Решение (2.17), (2.18) определяет регулярную прецессию твердого тела относительно вертикали, которая является, таким образом, единственно возможным видом движения тела с постоянной по модулю угловой скоростью в случае Лагранжа. Подставляя далее в тривиальный интеграл выражения для γ_3^2 из (2.16) и для $\gamma_0^2=\gamma_1^2+\gamma_2^2$ из (2.15) и перенося все в левую часть, получим умноженное на $^1/_4$ выражение для свободного члена a_0 при условиях (2.12). Таким образом, полином (2.10) оказывается тождественно равным нулю, и отсюда следует известный результат: кинетический момент в случае лагранжевой прецессии совершает обобщенную прецессию относительно вертикали.

Рассмотрим случай, когда для некоторого конечного числа значений β равенство (2.5) есть тождество по переменной α. Фиксируя значение β в выражении (2.7), получим тригонометрический полином от α:

$$\begin{gathered}P^{(\beta)}(\alpha)=-{}^1/_4(Mg)^{-2}(b_6^{(c)}\cos 6\alpha+b_4^{(c)}\cos 4\alpha+b_3^{(s)}\sin 3\alpha+\\ +b_3^{(c)}\cos 3\alpha+b_2^{(s)}\sin 2\alpha+b_2^{(c)}\cos 2\alpha+b_1^{(s)}\sin\alpha+b_1^{(c)}\cos\alpha+b_0)\end{gathered} \tag{2.19}$$

Коэффициент $b_6^{(c)}$ имеет вид

$$b_6^{(c)}=2^{-5}\omega_0^6(A\cos^2\beta+B\sin^2\beta-C)^2(A^2\cos^2\beta+B^2\sin^2\beta-C^2)$$

Приравнивая его нулю, получаем два значения β: β_1, обращающее в нуль первую скобку, и β_2, обращающее в нуль вторую.

Далее имеем

$$b_4^{(c)}(\beta_1)=0,\qquad b_4^{(c)}(\beta_2)=2^{-3}C^2(A-C)^2(C-B)^2(A+B)^{-2}$$

что дает в случае $\beta=\beta_2$ два варианта: $A=C$, $\beta_2=\pi/2$ или $\beta_2=3\pi/2$; $B=C$, $\beta_2=0$ или $\beta_2=\pi$.

Выписывая коэффициент $b_2^{(c)}$, получаем для первого варианта $x_c=z_c=0$, для второго $y_c=z_c=0$ и приходим к лагранжеву случаю распределения масс. Легко показать, что полином $P^{(\beta)}(\alpha)$ тождественно обращается в нуль, причем свободный член b_0 равен нулю в силу тривиального интеграла. Решение уравнений (1.4), (1.5) в этих случаях описывает движение, аналогичное рассмотренному выше, однако угол нутации θ в обоих вариантах изменяется по линейному закону. Пользуясь термином, введенным в работе [7], это движение твердого тела можно назвать регулярной нутацией. Ясно, что при другом выборе углов Эйлера оно оказывается регулярной прецессией с постоянным углом θ.

Выпишем далее следующие коэффициенты полинома (2.19):

$$b_2^{(s)}=4(Mg)^2\omega_0^2Cz_c(Ax_c\cos\beta+By_c\sin\beta)$$

$$b_3^{(s)}=Mgn\omega_0^3Cz_c(A\cos^2\beta+B\sin^2\beta-C)$$

$$b_3^{(c)}=Mgn\omega_0^3(Ax_c\cos\beta+By_c\sin\beta)(A\cos^2\beta+B\sin^2\beta-C)$$

и будем соответственно этому рассматривать три случая:

$$\begin{aligned}&1.\ \beta=\beta_1,\quad Ax_c\cos\beta_1+By_c\sin\beta_1=0\\&2.\ \beta=\beta_1,\quad z_c=0\end{aligned}\tag{2.20}$$

3. Общий случай

$$Ax_c\cos\beta+By_c\sin\beta=0,\qquad z_c=0$$

Для выяснения движения твердого тела в первых двух случаях обратимся к уравнениям Гесса [5], которые описывают изменение величин K^2, μ, ν, определенных выше,

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{dK^2}{dt}=-Mg\varkappa,\qquad \frac{d\nu}{dt}=(\boldsymbol{\rho}_c\cdot(\mathbf{K}\times\boldsymbol{\omega}))\\(\rho_c^2K^2-\nu^2)\frac{d\mu}{dt}=(\nu\sigma-2T\rho_c^2)\left(\frac{1}{2Mg}\frac{dK^2}{dt}\right)+(n\rho_c^2-\mu\nu)\frac{d\nu}{dt}.\end{gathered}\tag{2.21}$$

При этом нахождение p, q, r возможно всегда, за исключением того случая, когда соответствующий якобиан равен нулю, т. е. когда p, q, r удовлетворяют уравнению

$$x_c(B-C)qr+y_c(C-A)rp+z_c(A-B)pq=0\tag{2.22}$$

При $\beta=\beta_1$ по формулам (1.3) и (2.2) имеем

$$\begin{aligned}\mu=(Mg)^{-1}[h-{}^1/_2\omega_0^2(A\cos^2\alpha\cos^2\beta+\\+B\cos^2\alpha\sin^2\beta+C\sin^2\alpha)]=(Mg)^{-1}(h-{}^1/_2C\omega_0^2)\end{aligned}\tag{2.23}$$

следовательно, μ оказывается постоянной и $\mu=0$ при ${}^1/_2C\omega_0^2=h$. Далее, если $\varkappa=0$, то в силу первого из уравнений (2.21) имеем $K^2=\mathrm{const}$. Тогда из третьего уравнения получаем $\nu=\mathrm{const}$ и из второго уравнения следует, что выполняется условие (2.22), которое, будучи записанным в переменных ω, α, β, приводит к равенству

$$(B-C)x_c\sin\alpha\sin\beta+(C-A)y_c\sin\alpha\cos\beta+(A-B)z_c\cos\alpha\sin\beta\cos\beta=0 \quad (2.24)$$

Выражение (2.24) должно представлять тождество по переменной α при подстановке в него фиксированного значения β.

В первом случае имеем

$$\sin\beta=\pm Ax_c(A^2x_c^2+B^2y_c^2)^{-1/2},\quad \cos\beta=\mp By_c(A^2x_c^2+B^2y_c^2)^{-1/2} \quad (2.25)$$

Тогда равенство (2.24) приобретает вид

$$\pm[A(B-C)x_c^2-B(C-A)y_c^2]\sin\alpha-AB(A-B)(A^2x_c^2+B^2y_c^2)^{-1/2}x_cy_cz_c\cos\alpha\equiv0$$

откуда следует $z_c=0$ (второй случай). Так как

$$\operatorname{tg}^2\beta_1=(A-C)/(C-B) \quad (2.26)$$

то $A>C>B$. Из равенства (2.24) имеем $(B-C)x_c\sin\beta+(C-A)y_c\cos\beta=0$. Вместе с выражением (2.26) это дает соотношение

$$(C-B)x_c^2-(A-C)y_c^2=0 \quad (2.27)$$

характеризующее распределение масс, известное как случай Гриоли [8]. При этом центр тяжести тела находится на перпендикуляре к одному из круговых сечений его эллипсоида инерции для неподвижной точки.

Как следует из (2.23), при $\beta=\beta_1$ кинетическая энергия сохраняет постоянное значение $T=T_0$, $T_0=\mathrm{const}$. При этом годограф угловой скорости располагается на поверхности эллипсоида энергии [9]

$$Ax^2+By^2+Cz^2=2T_0 \quad (2.28)$$

и представляет собой окружность, так как в силу (2.26) вектор $\boldsymbol{\omega}$ находится на круговом сечении эллипсоида инерции, гомотетичного эллипсоиду (2.28). Отсюда следуют соотношения

$$\omega^2=p^2+q^2+r^2=\omega_0^2 \quad (2.29)$$

$$(\boldsymbol{\rho}_c\cdot\boldsymbol{\omega})=x_cp+y_cq=0 \quad (2.30)$$

Движение тяжелого твердого тела со свойством (2.29) и более общим, чем (2.30), свойством $x_cp+y_cq=m$, $m=\mathrm{const}$ исследовалось в [8]. Если $m\neq0$, оно представляет регулярную прецессию вокруг наклонной оси, если же $m=0$, то движение возможно лишь при $x_c=y_c=0$.

Рассмотрим третий случай, когда $z_c=0$, а угол β определяется из уравнения

$$Ax_c\cos\beta+By_c\sin\beta=0 \quad (2.31)$$

Тогда из третьего уравнения системы (1.4) следует

$$A(C-B)x_c^2-B(A-C)y_c^2=0 \quad (A>C>B) \quad (2.32)$$

Это соотношение характеризует распределение масс, известное как случай Гесса — Аппельрота [10]. Имея целью найти возможные движения с постоянной по модулю угловой скоростью для такого твердого тела, рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} Mg[C(Ax_c\sin\beta-By_c\cos\beta)\gamma_3\cos\alpha+\\ +AB(y_c\gamma_1-x_c\gamma_2)\sin\alpha]-\\ -{}^1/_4\omega_0^2(A-B)(B-C)(C-A)\cos\alpha\sin2\alpha\sin2\beta=0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

получающееся из первого уравнения системы (1.4) при $\omega=\omega_0$. Выбирая в формулах (2.25) для определенности верхний знак, перепишем интегралы

(1.6) и (1.7) следующим образом:

$$\frac{\omega_0^2}{2}\left(AB\frac{Ax_c^2+By_c^2}{A^2x_c^2+B^2y_c^2}\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha\right)+Mg(x_c\gamma_1+y_c\gamma_2)=h \qquad (2.34)$$

$$\omega_0\left[\frac{AB}{(A^2x_c^2+B^2y_c^2)^{1/2}}(-y_c\gamma_1+x_c\gamma_2)\cos\alpha+C\gamma_3\sin\alpha\right]=n \qquad (2.35)$$

Тогда с учетом (2.35) равенство (2.33) примет вид

$$C\omega_0\gamma_3-n\sin\alpha+\frac{\omega_0^3AB(A-B)(B-C)(C-A)x_cy_c}{2C(A^2x_c^2+B^2y_c^2)^{3/2}Mg}\cos^2\alpha\sin 2\alpha=0 \qquad (2.36)$$

Определяя теперь γ_1, γ_2, γ_3 из системы уравнений (2.34), (2.35), (2.36) и подставляя их далее в тривиальный интеграл, убеждаемся, что последний не обращается тождественно в нуль и представляет собой поэтому уравнение относительно α, если $A>C>B$, $x_c\neq 0$, $y_c\neq 0$. Таким образом, движение с постоянной по модулю угловой скоростью, отличное от перманентного вращения в случае Гесса — Аппельрота, невозможно.

Отметим, что полученные результаты согласуются с выводами работы [11].

3. Как указывалось в работе [12], значительный интерес представляет изучение обобщенных прецессий разного рода кинематических характеристик твердого тела с одной закрепленной точкой, при этом они рассматривались как связи, именуемые аксоидальными.

Примером такой связи является исследовавшееся в п. 2 соотношение (2.4).

Запишем его в переменных Гесса K^2, μ, ν:

$$\varkappa^2|_{p,q,r\to K^2,\mu,\nu}\equiv f(K^2,\ \mu,\ \nu)=\rho_c^2K^2-\nu^2-\mu^2K^2+2n\mu\nu-n^2\rho_c^2=0 \qquad (3.1)$$

Нетрудно убедиться, что (3.1) является частным интегралом этой системы (см. также [13]). Действительно, при $\rho_c^2K^2-\nu^2\neq 0$ имеем

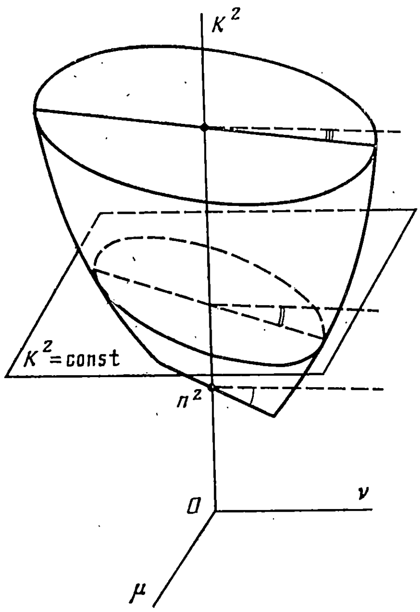
$$\frac{df}{dt}=(\rho_c^2-\mu^2)\frac{dK^2}{dt}-$$
$$-\frac{2}{\rho_c^2K^2-\nu^2}\nu\frac{d\nu}{dt}(\rho_c^2K^2-\nu^2-\mu^2K^2+2n\mu\nu-n^2\rho_c^2)=$$
$$=\left[2(\mu^2-\rho_c^2)Mg-\frac{1}{\rho_c^2K^2-\nu^2}\frac{d\nu^2}{dt}\right]f \qquad (3.2)$$

Исследования, проведенные в [11] и [14], показали, однако, что в силу обращения в нуль якобиана

$$I=\frac{\partial(\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2)}{\partial(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)}=(\boldsymbol{\zeta}\cdot(\boldsymbol{\rho}_c\times\mathbf{K})) \qquad (3.3)$$

Фазовые траектории системы (2.21), располагающиеся на поверхности (3.1), будут лишь в двух случаях соответствовать движениям тяжелого твердого тела, а именно: в случаях Лагранжа и Гесса — Аппельрота. Чтобы дополнить указанные исследования, будем рассматривать расположение этой поверхности в пространстве переменных K^2, μ, ν.

Сечение поверхности (3.1) плоскостью $K^2=\mathrm{const}$ представляет собой эллипс с центром на оси K^2 и полуосями a и b, вычисляемыми по фор-



мулам

$$a^2=\rho_c{}^2\frac{2(K^2-n^2)}{K^2+1-(K^4-2K^2+1+4n^2)^{1/2}}$$
$$b^2=\rho_c{}^2\frac{2(K^2-n^2)}{K^2+1+(K^4-2K^2+1+4n^2)^{1/2}} \tag{3.4}$$

Угловой коэффициент большей оси эллипса определяется так:

$$k=[K^2-1+(K^4-2K^2+1+4n^2)^{1/2}]/2n$$

Выясним, как изменяется форма эллипса при изменении значения K^2. При $K^2\to n^2$ значение k стремится к n, причем при $K^2=n^2$ эллипс вырождается в отрезок прямой с угловым коэффициентом, равным n. Так как $n=K\cos(\mathbf{K},\hat{\xi})$, то $k\to0$ при $K^2\to\to0$ и $k\to\infty$ при $K^2\to\infty$. Вычисляя предел $\lim a^2=\rho_c{}^2(n+1)$ при $K^2\to n^2$, получим, что при $K^2\to0$ большая полуось стремится к ρ_c. Легко показать, что при $K^2\to\infty$ большая полуось безгранично возрастает. Далее, когда $K^2\to n^2$ малая полуось стремится к нулю. При $K^2\to\infty$, полагая $w=K^{-2}$, вычислим предел $\lim b^2=\rho_c{}^2$ при $w\to0$. Следовательно, малая полуось остается ограниченной и $b\to\rho_c$. Таким образом, при возрастании K^2 эллипсы вытягиваются вдоль большей оси и поворачиваются к оси ν. Поверхности (3.1) имеют вид, представленный на фиг. 1, напоминая по форме карман. Отметим, наконец, что так как при $\varkappa=0$ имеем $K^2=\mathrm{const}$, то фазовыми траекториями изображающей точки являются рассматривавшиеся выше эллипсы, все прочие фазовые траектории уравнений Гесса (2.21) располагаются внутри «кармана».

Поступила 14 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. ПММ, 1952, т. 16, вып. 6.
2. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д.* Построение систем программного движения. М., «Наука», 1971.
3. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.– Л., Гостехиздат, 1946.
4. *Лоенко Ю. М.* К вопросу о движении космического летательного аппарата относительно собственного центра масс с постоянной по модулю угловой скоростью. Тр. IX Чтений, посвященных разработке научного наследия и развития идей К. Э. Циолковского. Секция «Механика космического полета». М., Ин-т истории, естествознания и техники АН СССР, 1975.
5. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М., «Наука», 1977.
6. *Гартунг Ю. А., Лоенко Ю. М.* Обобщенные уравнения управляемых вращательных движений космического летательного аппарата. Тр. VIII Чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К. Э. Циолковского. Секция «Механика космического полета». М., Ин-т истории, естествознания и техники АН СССР, 1974.
7. *Чикин В. А.* О «регулярной нутации» тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Тр. Рязанск. радиотехн. ин-та, 1958, т. 4.
8. *Гуляев М. П.* О регулярной прецессии несимметричного гироскопа (случай Гриоли). Теорет. механ. Сб. научно-метод. ст., вып. 5. М., «Высшая школа», 1975.
9. *Гуляев М. П.* О круговых сечениях взаимных эллипсоидов инерции. Тр. сектора матем. и механ. АН КазССР, 1958, т. 1.

10. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, М., Гостехтеоретиздат, 1953.
11. *Горр Г. В., Илюхин А. А.* Случаи постоянства модуля момента количества движения гиростата. В сб.: Механика твердого тела, вып. 6. Киев, «Наукова думка», 1974.
12. *Добронравов В. В.* Современное состояние механики систем с неголономными связями. Теорет. механ. Сб. научно-метод. ст., вып. 3. М., «Высшая школа», 1972.
13. *Шифф П. А.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Матем. сб., 1904, т. 24, вып. 2.
14. *Горр Г. В., Илюхин А. А., Харламова Е. И.* Об особых решениях одной формы уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку. В сб.: Механика твердого тела, вып. 6. Киев, «Наукова думка», 1974.