

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ПАНЕЛЕЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

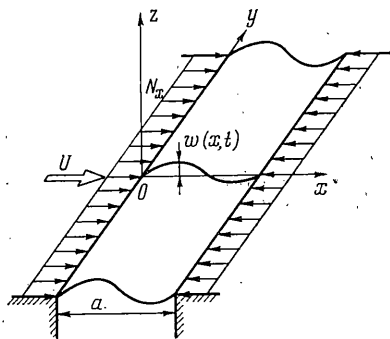
О. А. БАБИН, В. И. ВОРОБЬЕВ, В. А. СЕМЕНОВ

(Москва)

Устойчивость упругих панелей в сверхзвуковом потоке газа подробно исследована в [1], где, в частности, учтено влияние усилий, возникающих в срединной поверхности панели. Если эти усилия периодически изменяются во времени, то следует ожидать возможности возникновения параметрически возбуждаемых колебаний [2]. Представляет интерес явление взаимодействия автоколебаний в потоке газа с параметрическими колебаниями, возникающими под действием периодических усилий в срединной поверхности. Это явление было рассмотрено в [3], где было указано, что наличие сверхзвукового потока при определенных условиях может оказывать стабилизирующее влияние на параметрические колебания панели. Эти выводы, однако, были получены с применением приближенного метода: в разложении прогиба панели по собственным функциям удерживалось лишь два члена, а границы областей неустойчивости определялись из невысокого приближения обобщенного метода Хилла [2]. Последнее обстоятельство накладывает существенные ограничения на глубину модуляции параметрической нагрузки и вносит некоторые искажения качественного характера.

В данной работе изучается взаимное влияние параметрического воздействия и потока газа на устойчивость упругой панели в условиях цилиндрического изгиба. При анализе состояния системы используется численный метод из [4, 5], что позволяет строить точные в вычислительном отношении границы областей устойчивости без каких-либо ограничений, накладываемых на параметры. Изучена трансформация областей устойчивости в широком диапазоне изменения параметров системы, в том числе и параметров демпфирования. Показана возможность стабилизации динамически неустойчивой системы при помощи надлежащим образом выбранного параметрического воздействия, причем обнаружена более сложная по сравнению с [3] структура областей стабилизации.

1. Рассмотрим задачу о параметрических колебаниях плоской панели, размер которой в направлении оси ox значительно меньше ее длины в направлении оси oy (фиг. 1). По краям $x=0$ и $x=a$ параллельно оси ox



Фиг. 1

действуют распределенные силы $N_x = N_0 + N_1 \cos \theta t$, приложенные в срединной поверхности. Панель с одной стороны обтекается сверхзвуковым потоком газа (U, p_∞, c_∞ — невозмущенные значения скорости, давления и скорости звука соответственно).

Будем рассматривать малые прогибы панели $w(x, t)$, соответствующие деформации панели в условиях цилиндрического изгиба. Избыточное аэродинамическое давление определяется по приближенной формуле

$$\Delta p = p - p_\infty = \frac{\kappa p_\infty}{c_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

где κ — показатель политропы. Границы применения этой формулы указаны в [1]. В частности, требуется, чтобы число Маха невозмущенного по-

тока $M=U/c_\infty \gg 1$ (практически достаточно, чтобы $M>2$). Уравнение малых колебаний панели имеет вид

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (N_0 + N_t \cos \theta t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\kappa p_\infty}{c_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.1)$$

Здесь панель трактуется как тонкая упругая пластина толщины h с цилиндрической жесткостью D , отнесенной к единице площади срединной поверхности плотностью ρh и коэффициентом внешнего трения $\varepsilon \rho h$. На кромках панели $x=0$ и $x=a$ должны выполняться условия, соответствующие заданному типу опорного закрепления.

Невозмущенному состоянию равновесия соответствует решение $w(x, t) \equiv 0$ уравнения (1.1). Задача состоит в том, чтобы установить условия, связывающие параметры пластины, потока и параметрического воздействия, при которых равновесие $w(x, t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову. Естественно ожидать, что в случае, если скорость потока газа существенно меньше критической скорости панельного флаттера [1], то потеря устойчивости может иметь место только вследствие явления параметрического резонанса упругой системы.

В рассматриваемой задаче благодаря наличию потока газа и демпфирования не все собственные формы системы являются равноопасными. Это позволяет перейти от системы с бесконечным числом степеней свободы к рассмотрению конечно-мерной системы, области неустойчивости которой — наиболее опасные множества первоначальной системы. Степень этой опасности характеризуется показателем экспоненциального роста решений исходной системы. Обоснование перехода к конечно-мерной системе в задачах о параметрических колебаниях распределенных систем было дано в [6].

2. Введя характерную частоту ω_0 и безразмерные параметры

$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{a^2} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/2}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \nu = \frac{\theta}{\omega_0}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad q_0 = N_0 \frac{a^2}{\pi^2 D}$$

$$q_\tau = N_t \frac{a^2}{\pi^2 D}, \quad \gamma = \frac{1}{\omega_0} \left(\varepsilon + \frac{\kappa p_\infty}{\rho h c_\infty} \right), \quad \beta = \frac{\kappa p_\infty U a^3}{\pi^4 D c_\infty}$$

запишем уравнение (1.1) в виде

$$\frac{1}{\pi^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{q_0 + q_\tau \cos \nu \tau}{\pi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \quad (2.1)$$

Представим прогиб панели в виде ряда

$$w(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^n f_k(\tau) \varphi_k(\xi) \quad (2.2)$$

где $f_k(\tau)$ — неизвестные обобщенные координаты, $\varphi_k(\xi)$ — элементы системы базисных функций. Подставляя (2.2) в (2.1), получим уравнения относительно обобщенных координат

$$\frac{d^2 \mathbf{f}}{d\tau^2} + \gamma \frac{d\mathbf{f}}{d\tau} + [\mathbf{C} + (q_0 + q_\tau \cos \nu \tau) \mathbf{G}] \mathbf{f} = 0 \quad (2.3)$$

где \mathbf{f} — матрица-столбец с компонентами f_1, f_2, \dots, f_n ; \mathbf{C} и \mathbf{G} — матрицы $n \times n$ с элементами

$$c_{jk} = \frac{1}{p_j} \int_0^1 \left(\frac{1}{\pi^4} \varphi_k^{IV} + \beta \varphi_k' \right) \varphi_j d\xi, \quad g_{jk} = \frac{1}{\pi^2 p_j} \int_0^1 \varphi_k'' \varphi_j d\xi, \quad p_j = \int_0^1 \varphi_j^2 d\xi$$

Штрихами обозначено дифференцирование по координате ξ .

Вводя фазовые переменные $z_k = f_k$, $z_{k+n} = df_k/d\tau$ ($k=1, 2, \dots, n$), приведем систему (2.3) к нормальной форме Коши

$$dz/d\tau = [F_0 + (q_0 + q_\tau \cos \nu \tau) F_1] z \quad (2.4)$$

где F_0, F_1 — числовые действительные матрицы размерностью $2n \times 2n$

$$F_0 = \begin{vmatrix} 0 & E \\ -C & -\gamma E \end{vmatrix}, \quad F_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -G & 0 \end{vmatrix}$$

Для исследования устойчивости нулевого решения системы (2.4) используется численный метод из [4], основанный на численном интегрировании системы уравнений на отрезке $[0, T]$. При выборе числа членов ряда (2.2) необходимо руководствоваться следующими соображениями. При $\beta < \beta_*$ постоянная вещественная матрица $F_0 + q_0 F_1$ порядка $2n$ приводится к диагональному виду с чисто мнимыми элементами $\pm i\Omega_k$ ($k=1, 2, \dots, n$). Пусть безразмерная частота возбуждения ν принимает значения в пределах от ν_1 до ν_2 . Тогда в разложении (2.2) нужно обязательно удерживать те функции $\varphi_j(\xi)$, $\varphi_k(\xi)$, которым соответствуют частоты Ω_j, Ω_k , удовлетворяющие хотя бы одному из условий

$$2\Omega_j \in [\nu_1, \nu_2], \quad \Omega_j \in [\nu_1, \nu_2], \quad |\Omega_j - \Omega_k| \in [\nu_1, \nu_2]$$

Именно на этих частотах будут иметь место наиболее опасные резонансы и соответствующие области неустойчивости оказываются наименее изменчивы при увеличении демпфирования [2].

3. Численные результаты получены для случая панели, шарнирно-опертой по кромкам $x=0$ и $x=a$. Для этого вида закрепления нормированная система базисных функций есть $\varphi_k(\xi) = \sqrt{2} \sin k\pi\xi$ ($k=1, 2, \dots$). Элементы матриц C и G будут иметь вид

$$g_{jk} = -k^2 \delta_{jk}, \quad c_{jk} = \begin{cases} k^4 & \text{при } j=k \\ \beta \frac{2jk}{j^2 - k^2} [1 - (-1)^{j+k}] & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

Области неустойчивости строились на плоскости параметров (μ, ν) в прямоугольнике $\mu \in [0, 5]$, $\nu \in [0, 10]$ (здесь $\mu = q_\tau$). С учетом выбранного ограничения на частоту возбуждения ν в разложении (2.2) удерживаем лишь первые четыре члена ряда ($n=4$). Вычисления проводились при различных значениях коэффициентов γ и β , характеризующих демпфирование в системе и скорость потока газа. Величина q_0 принималась равной нулю.

На фиг. 2, 3 приведены некоторые результаты численного исследования влияния параметра скорости β потока газа на структуру области неустойчивости. По оси абсцисс отложены значения коэффициента возбуждения μ , по оси ординат — значения безразмерной частоты возбуждения ν .

Фиг. 2 относится к случаю докритических скоростей, т. е. когда система при $\mu=0$ заведомо устойчива. Точки, лежащие правее соответствующей границы, отвечают состоянию неустойчивости. Рассмотрены три значения параметра β : $\beta_1=0$ (кривая 1), $\beta_2=0.2\beta_*$ (пунктирная кривая 2) и $\beta_3=0.9\beta_*$ (кривая 3), где $\beta_*=13.6$ — значение критической скорости потока [1]. Коэффициент демпфирования принимался $\gamma=0.02$. Как видно на фиг. 2, во всех трех случаях области неустойчивости имеют ряд клиньев,

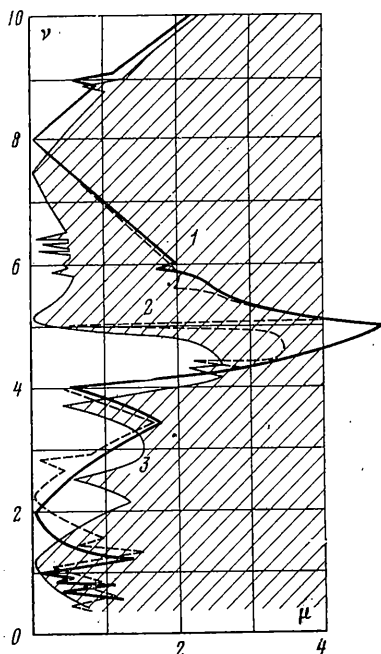
соответствующих простым параметрическим резонансам

$$\nu = 2\Omega_k/s \quad (k=1, 2, \dots, n; s=1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

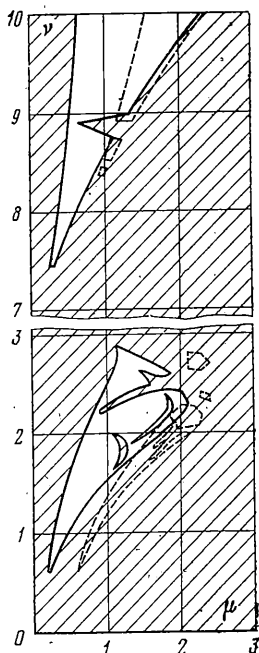
При $\beta > 0$ появляются также комбинационные резонансы разностного типа

$$\nu = |\Omega_j - \Omega_k|/s \quad (j, k=1, 2, \dots, n; j \neq k; s=1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

При $\beta = 0$ матрица C является диагональной, связь между обобщенными координатами исчезает и уравнения системы (2.3) становятся независимыми. В этом случае возможны только простые резонансы (3.1). На фиг. 2 отчетливо видны клинья, примыкающие к значениям $\nu = 2$ и $\nu = 8$. Они



Фиг. 2



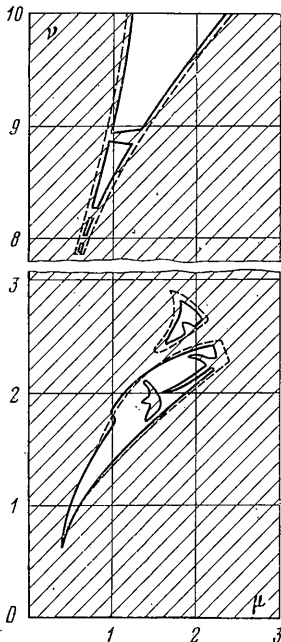
Фиг. 3

соответствуют главным параметрическим резонансам $\nu = 2\Omega_1$ и $\nu = 2\Omega_2$. Клинья, расположенные вблизи $\nu = 1$, $\nu = 4$, $\nu = 6$ и $\nu = 9$, соответствуют побочным параметрическим резонансам второго и третьего порядка по отношению к частотам Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 . В целом структура областей неустойчивости оказывается намного более сложной, чем следует из приближенного анализа [3].

С ростом β наблюдается расширение области неустойчивости, при этом происходит также смещение резонансных клиньев вдоль оси частот. Так, например, если при $\beta = 0.2\beta_*$ главным параметрическим резонансам $\nu = 2\Omega_1$ и $\nu = 2\Omega_2$ соответствуют клинья $\nu = 2.22$ и $\nu = 8.00$, то при $\beta = 0.9\beta_*$ эти клинья находятся уже около частот $\nu = 5.11$ и $\nu = 7.44$. Это явление объясняется тем, что частоты Ω_k зависят от параметра β :

β/β_*	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
0.0	1.00	4.00	9.00	16.00
0.2	1.11	3.99	9.00	16.00
0.4	1.38	3.97	8.99	15.98
0.8	2.25	3.82	8.97	15.94

Кроме того, при $\beta > 0$ отмечается появление множества комбинационных резонансов типа (3.2), обусловленных попарным взаимодействием обобщенных координат. Например, в случае $\beta = 0.2\beta_*$ клинья, примыкающие к $\nu = 2.88$ и $\nu = 5.00$, соответствуют главным комбинационным резонансам разностного типа $\nu = |\Omega_1 - \Omega_2|$ и $\nu = |\Omega_2 - \Omega_3|$. По мере приближения



Фиг. 4

снизу параметра β к его критическому значению количество наблюдаемых побочных резонансов растет и граница становится весьма изрезанной. Общая тенденция перемещения областей главных параметрических резонансов в направлении оси частот и их расширение соответствуют данным, полученным в [3]. Однако вывод о том, что по мере приближения скорости потока к критическому значению побочные резонансы вырождаются, не подтвердился.

При $\beta > \beta_*$ структура областей неустойчивости существенно меняется. В этом случае система является динамически неустойчивой при отсутствии параметрического возмущения. Однако внесение в систему параметрического воздействия может оказывать стабилизирующее воздействие. Соответствующие численные результаты представлены на фиг. 3, 4. Области неустойчивости заштрихованы. На фиг. 3 сплошная линия соответствует $\beta = 1.05\beta_*$, штриховая — $\beta = 1.15\beta_*$; в обоих случаях параметр демпфирования $\gamma = 0.02$.

Как видно из фиг. 3, дальнейшее увеличение параметра β приводит к быстрому уменьшению размеров областей стабилизации и смещению их по направлению оси μ . Так, уже при $\beta = 1.5\beta_*$ в прямоугольнике $\mu \in [0, 5]$, $\nu \in [0, 10]$

не удалось обнаружить точек, принадлежащих области устойчивости.

На фиг. 4 представлены результаты исследования влияния демпфирования на устойчивость панели при сверхкритических скоростях потока. Параметр скорости принимался равным $\beta = 1.10\beta_*$. Рассмотрены два значения параметра γ : $\gamma_1 = 0.02$ (сплошная линия) и $\gamma_2 = 0.20$ (штриховая линия). Как видно из графика, увеличение степени демпфирования приводит к исчезновению клиньев неустойчивости в областях стабилизации и вызывает некоторое расширение последних.

Поступила 7 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Бологин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
2. Бологин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
3. Dzygadlo Z. Nonstationary parametric and parametric selfexcited vibration of a plate of finite length in plane supersonic flow. Proc. Vibr. Probl., 1967, vol. 8, No. 4, p. 381-394.
4. Бологин В. В. Численный анализ устойчивости линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В сб.: Избранные проблемы прикладной механики. М., ВИНТИ, 1974.
5. Вибрации в технике. Справочник, т. 1. М., «Машиностроение», 1978.
6. Фомин В. Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. Изд-во Ленингр. ун-та, 1972.