**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1980**

УДК 531.36

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОВОРОТОМ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Н. Н. БОЛОТНИК, А. А. КАПЛУНОВ

(Москва)

Рассмотрены задачи оптимального управления поворотом твердого тела, в которых минимизируемым функционалом является модуль полного ускорения некоторой точки тела или на эту величину наложено ограничение. В [1–4], например, задачи оптимального управления поворотом твердого тела исследовались в иных постановках [1].

В [5] была решена одна задача оптимального управления поворотом механической системы с переменным моментом инерции.

В публикуемой работе решается задача о наискорейшем повороте тела вокруг оси на заданный угол при ограниченном модуле полного ускорения. Исследована задача об оптимальной характеристике амортизационного устройства, наилучшим образом защищающего твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси, от ударов. Оптимальность понимается в смысле минимизации модуля полного ускорения при ограниченном угле поворота или, наоборот, минимизации максимума модуля угла поворота при ограничении на модуль полного ускорения некоторой точки тела. Ранее была решена задача о выборе оптимальных параметров вязкоупругого амортизатора крутильных колебаний [6]. Другие постановки задач оптимального управления амортизационными системами и методы их решения подробно изложены в [7, 8].

1. Рассматривается механическая система, представляющая твердое тело, которое может поворачиваться вокруг неподвижной оси. К оси вращения приложен управляющий момент, ограниченный по абсолютной величине. Предполагается, что в начальный момент времени $t=0$ тело покоится. Движение такой системы описывается дифференциальным уравнением с начальными условиями

$$I\varphi^{\cdot\cdot}=M(t),\ \varphi(0)=\varphi^{\cdot}(0)=0$$

Здесь I — момент инерции тела относительно оси вращения, φ — угол поворота, $M(t)$ — управляющий момент, точка в позиции штриха обозначает производную по времени t.

Ограничение на управление выражается неравенством $|M(t)|\leqslant M_0$, где M_0 — заданное положительное число. Управление $M(t)$ будем называть допустимым, если оно является кусочно-непрерывным и непрерывным справа в каждой точке области своего определения. Требуется, выбирая допустимое управление $M(t)$, повернуть тело на заданный угол α $(0<\alpha\leqslant\pi)$ за минимальное время, причем квадрат модуля полного ускорения некоторой точки тела не должен превышать заданного значения, а в конце процесса система должна покоиться. Эти требования выражаются условиями $\varphi(T)=\alpha$, $0<\alpha\leqslant\pi$, $\varphi^{\cdot}(T)=0$, $\rho^2(M^2/I^2+\varphi^{\cdot 4})\leqslant R$. Здесь ρ — расстояние от оси вращения до точки твердого тела, квадрат модуля полного ускорения которой требуется ограничить, R — заданное положи-

[1] См. также *Акуленко Л. Д., Рощин Ю. Р.* Оптимальное управление движением относительно центра масс при помощи поворотного двигателя. М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1976, препринт № 80.

тельное число, T — момент окончания процесса, который требуется минимизировать.

Поставленная задача может возникнуть при расчете оптимального управления манипулятором, предназначенным для перемещения объектов, на работе которых вредно сказываются большие перегрузки. Если ввести обозначения $x_1=\varphi$, $x_2=\varphi^{\cdot}$ и перейти к новым безразмерным переменным по формулам: $t'=R^{1/4}t/\rho^{1/2}$, $u(t)=M(t)\rho/(R^{1/2}I)$, $a=M_0\rho/(R^{1/2}I)$, то поставленную выше задачу можно сформулировать в следующем виде (штрих в обозначении новой независимой переменной опущен для удобства записи).

Задача 1.1. Найти допустимое управление $u_0(t)$, переводящее систему, описываемую уравнениями

$$x_1^{\cdot}=x_2,\quad x_2^{\cdot}=u \tag{1.1}$$

из начального состояния

$$x_1(0;\ u)=x_2(0;\ u)=0 \tag{1.2}$$

в состояние

$$x_1(T_0;\ u_0)=\alpha,\quad 0<\alpha\leqslant\pi,\quad x_2(T_0;\ u_0)=0 \tag{1.3}$$

за минимальное время T_0 при ограничениях

$$|u|\leqslant a,\quad u_0^2(t)+x_2^4(t;\ u_0)\leqslant 1 \tag{1.4}$$

где символами $x_1(t;\ u)$, $x_2(t;\ u)$ обозначены решения уравнений (1.1) с начальными условиями (1.2), соответствующие управлению $u(t)$.

Легко показывается, что оптимальное управление $u_0(t)$ удовлетворяет условию $u_0(t)=-u_0(T_0-t)$. Это вытекает из инвариантности задачи 1.1 относительно замены переменных

$$\xi=T_0-t,\quad v(\xi)=-u(T_0-\xi),\quad y_1(\xi)=\alpha-x_1(T_0-\xi),\quad y_2(\xi)=dy_1/d\xi$$

Таким образом, достаточно решить задачу о наискорейшем повороте тела на угол $\alpha/2$ при нефиксированной скорости в конце процесса.

Задача 1.2. Найти допустимое управление $u^{\circ}(t)$, переводящее систему (1.1) из начального состояния (1.2) за наискорейшее время T_1 в положение $x_1(T_1;\ u^0)=\alpha/2$ при условии выполнения ограничений (1.4).

2. Представляется удобным решить сначала вспомогательную задачу о повороте тела на максимальный угол за фиксированное время T. Найти допустимое управление $v_0(t)$, такое, когда $x_1(T;\ v_0)=\max_u x_1(T;\ u)$ при условии, что выполнены неравенства (1.4). Эта задача является двойственной к задаче 1.2, и решение последней, как будет показано ниже, получается затем с помощью несложного пересчета.

Утверждение 2.1. Пусть $v_0(t)$ — оптимальное управление. Тогда в любой момент времени $t\in[0,\ T]$ выполняется одно из следующих равенств:

$$|v_0(t)|=a,\quad v_0^2(t)+x_2^4(t;\ v_0)=1$$

Доказательство. Решение уравнений (1.1) с начальными условиями (1.2) имеет вид

$$x_1(t;u)=\int_0^t (t-\tau)u(\tau)\,d\tau,\quad x_2(t;u)=\int_0^t u(\tau)\,d\tau \tag{2.1}$$

Допустим, что утверждение 2.1 неверно, т. е. существует момент времени $t^{\circ}\in[0,\ T]$, такой, что

$$|v_0(t^{\circ})|<a,\quad v_0^2(t^{\circ})+x_2^4(t^{\circ};\ v_0)<1$$

В силу кусочной непрерывности управления существует интервал $[t_1, t_2)\subset[0, T]$, такой, что выполнены неравенства

$$|v_0(t)|<a-\delta_1,\quad v_0^2(t)+x_2^4(t;\,v_0)<1-\delta_2,\quad t\in[t_1,\,t_2) \tag{2.2}$$

где δ_1, δ_2 — достаточно малые положительные числа.

Рассмотрим управление

$$\begin{aligned} v_1(t)&=v_0(t),\quad t\notin[t_1,\,t_2)\\ v_1(t)&=v_0(t)+\varepsilon,\quad t\in[t_1,\,{}^1/_2(t_1+t_2))\\ v_1(t)&=v_0(t)-\varepsilon,\quad t\in[{}^1/_2(t_1+t_2),\,t_2)\end{aligned} \tag{2.3}$$

где ε — положительное число. Управление $v_1(t)$, очевидно, является допустимым, если $v_0(t)$ — допустимое управление.

Из (2.1) вытекает следующее соотношение:

$$x_1(T;v_1)=x_1(T;v_0)+\frac{\varepsilon}{4}(t_2-t_1)^2>x_1(T;v_0) \tag{2.4}$$

Покажем, что параметр ε в (2.3) можно выбрать таким образом, что управление $v_1(t)$ будет удовлетворять ограничениям (1.4). Из второго равенства (2.1) и (2.3) вытекает, что вне интервала $[t_1, t_2)$ выполняется равенство $x_2(t;\,v_0)=x_2(t;\,v_1)$, и, следовательно, ограничения (1.4) удовлетворяются вне интервала $[t_1, t_2)$.

Рассмотрим интервал $[t_1, {}^1/_2(t_1+t_2))$. При $t\in[t_1, {}^1/_2(t_1+t_2))$ выполняется соотношение

$$v_1^2(t)+x_2^4(t;v_1)=v_0^2(t)+x_2^4(t;v_0)+\sum_{i=1}^{4}\varepsilon^i\Psi_i(t) \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\Psi_1(t)&=2v_0(t)+4x_2^3(t;\,v_0)\,(t-t_1)\\ \Psi_2(t)&=1+6x_2^2(t;\,v_0)\,(t-t_1)^2\\ \Psi_3(t)&=4x_2(t;\,v_0)\,(t-t_1)^3\\ \Psi_4(t)&=(t-t_1)^4\end{aligned}$$

Решение задачи Коши (1.1), (1.2) $x_1(t;\,u)$, $x_2(t;\,u)$ является непрерывным на $[0, T]$, если управление $u(t)$ кусочно-непрерывное. Следовательно, функции $\Psi_i(t)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ ограничены на интервале $[t_1, {}^1/_2(t_1+t_2))$ и имеют конечные верхние грани. Из (2.2) и (2.5) вытекают оценки

$$v_1^2(t)+x_2^4(t;v_1)<1-\delta_2+\sum_{i=1}^{4}\varepsilon^i\sup_t\Psi_i(t)=1-\delta_2+O_1(\varepsilon) \tag{2.6}$$

$$|v_1(t)|=|v_0(t)+\varepsilon|\leqslant|v_0(t)|+\varepsilon<a-\delta_1+\varepsilon \tag{2.7}$$

Совершенно аналогично показывается, что на интервале $[{}^1/_2(t_1+t_2), t_2)$ выполняются оценки

$$v_1^2(t)+x_2^4(t;\,v_1)<1-\delta_2+O_2(\varepsilon) \tag{2.8}$$

$$|v_1(t)|=|v_0(t)-\varepsilon|<a-\delta_1+\varepsilon \tag{2.9}$$

Из (2.6) — (2.9) следует, что если параметр ε удовлетворяет соотношениям

$$\max[|O_1(\varepsilon)|,\,|O_2(\varepsilon)|]<\delta_2,\quad 0<\varepsilon<\delta_1$$

то неравенства (1.4) выполняются. Таким образом показано, что в предположении о несправедливости утверждения 2.1 существует допустимое управление $v_1(t)$, удовлетворяющее ограничениям (1.4), такое, что (в силу

(2.4)) $x_1(T;\ v_1)>x_1(T;\ v_0)$, а это противоречит предположению об оптимальности управления $v_0(t)$.

Ниже строится управление $v_0(t)$, удовлетворяющее доказанному выше необходимому условию.

Пусть $a<1$. Тогда в начальный момент времени второе неравенство в (1.4) выполняется в строгом смысле. Управление $v_0(t)$ удовлетворяет соотношению

$$v_0(t)\equiv a \text{ при } t\in[0,\ t_*)\cap[0,\ T] \tag{2.10}$$

где $t_*=(1-a^2)^{1/4}/a$ — момент времени, когда впервые выполняется равенство $u^2(t)+x_2^4(t;\ u)=1$, если $u(t)\equiv a$. Нетрудно показать, что $x_1(t_*)=(1-a^2)^{1/2}/2a$, $x_2(t_*)=(1-a^2)^{1/4}$.

Если $t_*\geqslant T$ или, что то же, $a^2\leqslant{}^1/_2((1-4T^4)^{1/2}-1)/T^4$, то максимальное значение переменной x_1 равно

$$x_1(T;\ v_0)={}^1/_2aT^2. \tag{2.11}$$

Если $t_*<T$, то на отрезке $[t_*,\ T]$ тождественно выполняется равенство

$$v_0(t)=\dot{x}_2(t;\ v_0)=(1-x_2^4(t;\ v_0))^{1/2} \tag{2.12}$$

Если $a\geqslant1$, то это равенство выполняется на всем отрезке $[0,\ T]$. Обозначим: $t^*=t_*$, $a<1$; $t^*=0$, $a\geqslant1$.

Решение дифференциального уравнения (2.12) относительно $x_2(t;\ v_0)$ с начальным условием $x_2(t^*;\ v_0)=x_2(t^*)$ на отрезке $[t^*,\ T]$ имеет вид

$$x_2(t;v_0)=\frac{\operatorname{sn}(\eta(t),1/\sqrt{2})}{\sqrt{1+\operatorname{cn}^2(\eta(t),1/\sqrt{2})}},\qquad t\in[t^*,t_0)\cap[t^*,T]$$

$$x_2(t;\ v_0)=1,\ t\in[t_0,\ \infty)\cap[t^*,\ T] \tag{2.13}$$

$$\eta(t)=\sqrt{2}(t-t^*)+F\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}x_2(t^*)}{\sqrt{1+x_2^2(t^*)}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$t_0=t^*+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[F\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-F\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}x_2(t^*)}{\sqrt{1+x_2^2(t^*)}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Символами sn, cn, F обозначены эллиптические синус и косинус (функции Якоби) и эллиптический интеграл второго рода соответственно [9].

Из (2.10), (2.12), (2.13) вытекает, что на отрезке $[0,\ T]$ управление $v_0(t)$ определяется выражением

$$v_0(t)=a,\ t\in[0,\ t^*)\cap[0,\ T] \tag{2.14}$$

$$v_0(t)=\frac{2\operatorname{cn}(\eta(t),1/\sqrt{2})}{1+\operatorname{cn}^2(\eta(t),1/\sqrt{2})},\qquad t\in[t^*,t_0)\cap[0,T]$$

$$v_0(t)=0,\ t\in[t_0,\ \infty)\cap[0,\ T]$$

а соответствующее значение $x_1(T;\ v_0)$ равно

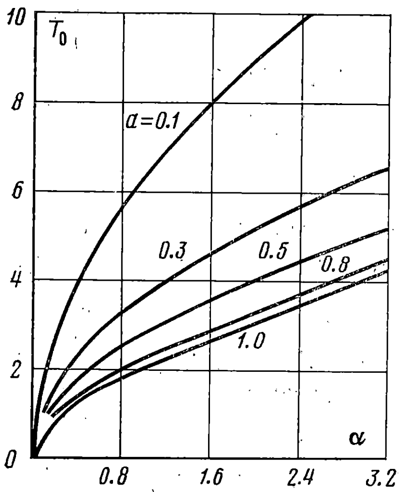
$$x_1(T;\ v_0)={}^1/_2aT^2,\ T\leqslant t^* \tag{2.15}$$

$$x_1(T;v_0)=x_1(t^*)+\int_{t^*}^{T}x_2(t;v_0)\,dt,\qquad T>t^*$$

Обозначим $f(T)=x_1(T;\ v_0)$. Из (2.15) вытекает, что $f(0)=0$, $df/dT>0$ и функция $f(T)$ монотонно возрастает с увеличением T. Если $T>t_0$, то, как легко видеть, из (2.13), (2.15), $f(T)=x_1(t_0;\ v_0)+T-t_0$ и, следовательно, $x_1(T;\ v_0)\to\infty$ при $T\to\infty$. Из свойств функций $f(T)$ вытекает, что $f(T)$ имеет обратную функцию $f^{-1}(y)$, определенную на полуоси $0\leqslant y<\infty$.

Выражения (2.14), (2.15) представляют исчерпывающее решение задачи о максимизации угла поворота за фиксированное время. Зная решение этой задачи, можно с помощью несложного пересчета получить решение задачи 1.2. Решение задачи 1.2 связано с решением вспомогательной задачи следующими соотношениями:

$$u^0(t)=v^0(t),\ t\in[0,\ T_1],\ T_1=f^{-1}(\alpha/2)$$



Фиг. 1

Покажем, что $u^0(t)$ — оптимальное управление для задачи 1.2, если $v_0(t)$ — оптимальное управление для вспомогательной задачи. Допустим противное, т. е. что существуют управление $u_1(t)$, удовлетворяющее ограничениям (1.4), и момент времени T_2, такие, что $x_1(T_2;\ u_1)=\alpha/2$, $T_2<T_1$. В силу монотонности функции $f(T)$ выполняется неравенство $f(T_2)<\alpha/2$. Поскольку, по определению функции f, $f(T_2)=\max_u x_1(T_2;\ u)$, справедливо соотношение $x_1(T_2;\ u_1)\leqslant f(T_2)$ и, следовательно, $x_1(T_2;\ u_1)<\alpha/2$, что противоречит предположению о равенстве $x_1(T_2;\ u_1)=\alpha/2$.

Решение исходной задачи 1.1, очевидно, определяется соотношениями

$$u_0(t)=v_0(t),\ t\in[0,\ T_1),\ T_1=f^{-1}(\alpha/2)$$
$$u_0(t)=-v_0(T_0-t),\ t\in[T_1,\ T_0],\ T_0=2T_1$$

На фиг. 1 представлены графики зависимостей оптимального времени T_0 от α для различных a.

Исследуем возможность использования в качестве квазиоптимальных управлений функций следующего вида:

$$u(t)=w,\quad t\in[0,\ c);\quad u(t)=0,\quad t\in[c,\ T-c)\qquad(2.16)$$
$$u(t)=-w,\quad t\in[T-c,\ T]$$
$$w\in\Omega=[0,\ a]\cap[0,\ 1],\quad c=\min[(\alpha/w)^{1/2},\ (1-w^2)^{1/4}/w]$$
$$T=T(w)=2(\alpha/w)^{1/2},\quad c=(\alpha/w)^{1/2}$$
$$T=T(w)=(1-w^2)^{1/4}/w+\alpha(1-w^2)^{-1/4},\quad c=(1-w^2)^{1/4}/w$$

Момент времени $t^{(1)}=(\alpha/w)^{1/2}$ соответствует повороту управляемого тела на угол $\alpha/2$, если управление равно постоянной величине w. В момент времени $t^{(2)}=(1-w^2)^{1/4}/w$ впервые выполняется второе равенство в (1.4), если управление равно w. Нетрудно проверить, что управление вида (2.16) удовлетворяет условиям (1.2) – (1.4).

Рассмотрим задачу о выборе числа $w_*\in\Omega$, доставляющего минимум функции $T(w)$, что соответствует минимизации времени поворота управляемого твердого тела. Из выражений для $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$ следует, что $t^{(1)}\leqslant t^{(2)}$ тогда и только тогда, когда $w^2\leqslant 1/(1+\alpha^2)$. В этом случае $T(w)=2(\alpha/w)^{1/2}$. Если выполнено неравенство $a^2\leqslant 1/(1+\alpha^2)$, то, очевидно, $w_*=a$ и $T(w)=2(\alpha/a)^{1/2}$, что совпадает с оптимальным временем поворота. Если $a^2>1/(1+\alpha^2)$, то, как видно из характера зависимости

$T(w)$, $w_*\in[1/(1+\alpha^2)^{1/2}, a]\cap[0,1]$ и

$$T(w)=\frac{(1-w^2)^{1/4}}{w}+\frac{\alpha}{(1-w^2)^{1/4}},\qquad w\in\left[\frac{1}{(1+\alpha^2)^{1/2}},\ a\right]\cap[0,1] \tag{2.17}$$

Дифференцирование функции (2.17) по w приводит к соотношению

$$\frac{dT}{dw}=\frac{h(w)}{2w^2(1-w^2)^{5/4}},\qquad h(w)=-w^2(1-w^2)^{1/2}-2(1-w^2)^{3/2}+\alpha w^3 \tag{2.18}$$

Дифференцируя функцию $h(w)$, получаем

$$\frac{dh(w)}{dw}=4w(1-w^2)^{1/2}+w^2(1-w^2)^{-1/2}+3\alpha w^2>0 \tag{2.19}$$

Следовательно, функция $h(w)$ монотонно возрастает. Справедливы соотношения

$$h(1/(1+\alpha^2)^{1/2})=-2\alpha^3/(1+\alpha^2)^{3/2}<0,\ h(1)=3\alpha>0$$

Отсюда и из (2.19) следует, что на отрезке $[1/(1+\alpha^2)^{1/2}, 1]$ функция $h(w)$ имеет корень и притом единственный. Обозначим этот корень символом w_0. Из установленных свойств функции $h(w)$ и (2.18) вытекает, что функция $T(w)$ монотонно убывает на множестве $[1/(1+\alpha^2)^{1/2}, w_0)$, имеет минимум в точке $w=w_0$ и монотонно возрастает на множестве $(w_0, 1)$. Следовательно, если $1/(1+\alpha^2)^{1/2}<a<w_0$, то $w_*=a$, а если $a\geqslant w_0$, то $w_*=w_0$.

Из изложенного выше вытекают соотношения, дающие исчерпывающее решение задачи о выборе параметра w_*:

$$w_*=a,\quad a<w_0;\ w_*=w_0,\quad a\geqslant w_0$$

$$T(w_*)=2(\alpha/a)^{1/2},\quad a^2\leqslant 1/(1+\alpha^2)$$

$$T(w_*)=(1-w_*^2)^{1/4}/w_*+\alpha/(1-w_*^2)^{1/4},\quad a^2>1/(1+\alpha^2)$$

На фиг. 2 представлены графики зависимостей от величины угла α оптимального времени поворота T_0 (сплошные линии) и квазиоптимального времени поворота $T(w_*)$ (штриховые линии) для некоторых значений параметра a.

На фиг. 3 изображены графики зависимостей величины $\omega(\alpha, a)=[T(w_*)-T_0]/T_0$ от a при различных α. Величина $\omega(\alpha, a)$ выражает относительное отличие квазиоптимального времени от оптимального. Из графиков видно, что относительная погрешность является неубывающей функцией параметров α и a. Максимальное (по $a>0$ и $0<\alpha\leqslant\pi$) значение величины $\omega(\alpha, a)$, достигаемое при $a=1$, $\alpha=\pi$, равняется приблизительно 0.17.

Используя кривые, представленные на фиг. 3, можно делать выводы о целесообразности применения управления вида (2.16) в конкретных ситуациях.

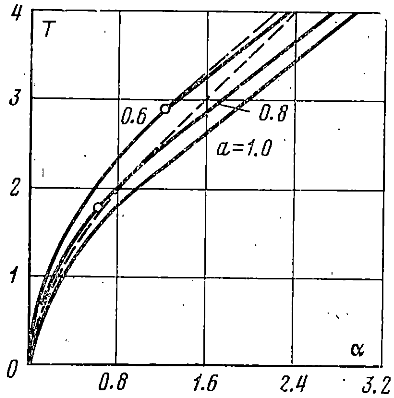
3. Снова рассмотрим механическую систему, представляющую твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси. Тело связано с амортизационным устройством, создающим управляющий момент относительно оси вращения. Пусть в начальный момент времени $t=0$ твердому телу в результате удара сообщена угловая скорость β. Движение описанной системы определяется дифференциальным уравнением с начальными условиями

$$I\ddot\varphi=M(t),\ \varphi(0)=0,\ \dot\varphi(0)=\beta \tag{3.1}$$

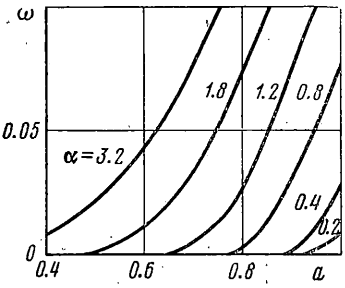
Смысл обозначений I, φ, M тот же, что и в п.1.

Основными критериями качества амортизационного устройства, предназначенного для защиты от ударных воздействий, являются модуль полного ускорения некоторой точки вращающегося тела, характеризующий перегрузку, испытываемую амортизируемым телом в этой точке, и максимальный угол поворота вокруг оси. Квадрат модуля полного ускорения точки твердого тела, находящейся на расстоянии ρ от оси вращения, равен

$$a^2(\rho, t)=\rho^2[\ddot\varphi^2+\dot\varphi^4]=\rho^2[M^2(t)/I^2+\dot\varphi^4] \tag{3.2}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Введем новые безразмерные переменные: $x_1=\varphi$, $x_2=\varphi^{\cdot}$, $t'=\beta t$, $u(t)=-M(t)/(I\beta^2)$. В этих переменных (3.1) и (3.2) представляются в виде (штрих в обозначении новой переменной опущен для удобства записи):

$$x_1^{\cdot}=x_2,\ x_2^{\cdot}=-u(t),\ x_1(0)=0,\ x_2(0)=1 \tag{3.3}$$

$$a^2(\rho,\ t)=\rho^2\beta^4[u^2(t)+x_2^4(t;\ u)] \tag{3.4}$$

Символами $x_1(t;\ u)$, $x_2(t;\ u)$ обозначается решение задачи Коши (3.3), соответствующее управлению $u(t)$.

Как и в п. 1, будем управление $u(t)$ называть допустимым, если оно является кусочно-непрерывным и непрерывно справа в каждой точке области своего определения.

Ставятся две задачи о предельных возможностях амортизации крутильных колебаний.

Задача 3.1. Найти допустимое управление $u(t)$, минимизирующее максимум квадрата модуля полного ускорения некоторой точки амортизируемого тела при условии, что максимум модуля угла поворота не превышает заданной величины D. Из (3.4) следует, что квадрат модуля полного ускорения отличается от величины $u^2(t)+x_2^4(t;\ u)$ лишь постоянным множителем $\rho^2\beta^4$ и в качестве минимизируемой величины можно принять функционал $J_1(u)=\max\limits_{t\in[0,\ \infty)}[u^2(t)+x_2^4(t;\ u)]$.

Из (3.4) вытекает, что если управление $u(t)$ минимизирует максимальную перегрузку в некоторой точке, то это же управление минимизирует перегрузку и в любой другой точке. Введем обозначение: $J_2(u)=\max\limits_{t\in[0,\ \infty)}|x_1(t;\ u)|$. Тогда задачу 3.1 можно сформулировать следующим образом. Найти допустимое управление u_0^D, такое, что

$$J_1(u_0^D)=\min\nolimits_u J_1(u),\ J_2(u)\leqslant D$$

Верхний индекс в обозначении оптимального управления указывает на его зависимость от максимально допустимого модуля угла поворота D.

Задача 3.2. Найти допустимое управление u_U^0, такое, что

$$J_2(u_U^0)=\min\nolimits_u J_2(u),\ J_1(u)\leqslant U$$

Здесь U — заданное положительное число, нижний индекс в обозначении оптимального управления указывает на его зависимость от параметра задачи U. Такая постановка задачи соответствует требованию минимизации максимального угла поворота при ограниченной перегрузке в некоторой точке амортизируемого тела. Отметим, что задача 3.2 не имеет решения, если $U<1$, так как $u^2(t)+x_2^4(0;u)=u^2(t)+1$, и, следовательно, неравенство $J_1(u)\leqslant U$ не выполняется в начальный момент времени. Ниже строится решение задачи 3.2. Решение задачи 3.1, как будет показано, получается затем с помощью несложного пересчета. Из (3.3) следует, что при любом допустимом управлении $u(t)$ функция $x_1(t;\ u)$, являясь непрерывной вместе со своей производной, монотонно возрастает на интервале $[0, T)$, где T — момент первого обращения в нуль угловой скорости $x_2(t;\ u)$. Очевидно, что для управлений $u(t)$, тождественно равных нулю вне отрезка $[0,\ T]$, максимум модуля угла поворота равен значению $x_1(\ T;\ u)$ угла поворота в момент первого обращения в нуль угловой скорости. Поскольку для любого управления $u(t)$ выполняется очевидное неравенство $J_2(u)\geqslant x_1(T;\ u)$, то задачу (3.2) можно заменить следующей. Найти допустимое управление u_1^U, определенное на отрезке $[0,\ T]$, такое, что

$$x_1(T;\ u_1^U)=\min_u x_1(T;\ u),\ x_2(T;\ u_1^U)=0 \qquad (3.5)$$

$$u^2(t)+x_2^4(t;\ u)\leqslant U \qquad (3.6)$$

Верхний индекс в обозначении оптимального управления указывает на его зависимость от параметра U. Отметим, что момент времени T здесь заранее неизвестен и подлежит определению в ходе решения задачи. Если $u_1^U(t)$ — оптимальное управление для задачи (3.5), (3.6), то управление

$$u_U^0(t)=u_1^U(t),\ t\in[0,\ T),\ u_U^0(t)=0,\ t\in[T,\ \infty) \qquad (3.7)$$

является оптимальным для задачи 3.2.

Обозначим символом A_T множество допустимых управлений, обеспечивающих обращение в нуль угловой скорости в заданный момент времени T и для которых выполнено неравенство (3.6). Известно, что решение задачи Коши (3.3) представляется в виде

$$x_1(t;u)=t-\int_0^t(t-\tau)u(\tau)\,d\tau,\qquad x_2(t;u)=1-\int_0^t u(\tau)\,d\tau \qquad (3.8)$$

и множество A_T можно определить следующим образом:

$$A_T=\left\{u(t):\int_0^T u(\tau)\,d\tau=1,\qquad u^2(t)+x_2^4(t;u)\leqslant U\right\}$$

Докажем некоторые свойства оптимального управления для задачи (3.5), (3.6).

Утверждение 3.1. Пусть u_1^U — оптимальное управление и T — соответствующий момент первого обращения в нуль угловой скорости. Тогда

$$\int_0^T(T-\tau)u_1^U(\tau)\,d\tau=\max_{u\in A_T}\int_0^T(T-\tau)u(\tau)\,d\tau$$

Доказательство. Допустим противное, т. е. существует управление $u^\vee(t)\in A_T$, такое, что

$$\int_0^T(T-\tau)u_1^U(\tau)\,d\tau<\int_0^T(T-\tau)u^\vee(\tau)\,d\tau$$

Тогда, очевидно

$$T-\int_0^T (T-\tau)u_1^U(\tau)\,d\tau > T-\int_0^T (T-\tau)u^\vee(\tau)\,d\tau$$

и в силу (3.8) $x_1(T;\ u_1^U)>x_1(T;\ u^\vee)$, что противоречит предположению об оптимальности управления u_1^U.

Утверждение 3.2. Пусть $u_1^U(t)$ — оптимальное управление и T — соответствующий момент первого обращения в нуль угловой скорости. Тогда на отрезке $[0,\ T]$ тождественно выполняется равенство $[u_1^U(t)]^2+$ $+x_2^4(t;\ u_1^U)=U$.

Рассмотрим управление $v_1(t)$, определяемое соотношением (2.3). Заметим, что, если $v_0(t)\in A_T$ и $[t_1,\ t_2)\subset[0,\ T]$, то $x_2(T;\ v_1)=0$. С учетом утверждения 3.1 и сделанного замечания доказательство утверждения 3.2 вполне аналогично доказательству утверждения 1.1.

На основании доказанного утверждения строится оптимальное управление $u_1^U(t)$ для задачи (3.5), (3.6). По доказанному, $[u_1^U(t)]^2+$ $+x_2^4(t;\ u_1^U)\equiv U$. Следовательно,

$$u_1^U(t)=[U-x_2^4(t;\ u_1^U)]^{1/2} \tag{3.9}$$

и в силу уравнений движения (3.3)

$$x_2^{\boldsymbol\cdot}(t;\ u_1^U)=-[U-x_2^4(t;\ u_1^U)]^{1/2} \tag{3.10}$$

Решение дифференциального уравнения (3.10) относительно $x_2(t;\ u_1^U)$ с начальным условием $x_2(0;\ u_1^U)=1$ на отрезке $[0,\ T]$ имеет вид

$$x_2(t;u_1^U)=\frac{\sqrt{C}\,\mathrm{sn}\,(\gamma(t),1/\sqrt{2})}{\sqrt{2-\mathrm{sn}^2(\gamma(t),1/\sqrt{2})}},\quad \gamma(t)=\sqrt{2C}\,(B-t) \tag{3.11}$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{2C}}F\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{C+1}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad C=\sqrt{U}$$

В силу (3.9) оптимальное управление u_1^U равно

$$u_1^U(t)=2\sqrt{U}\frac{\mathrm{cn}(\gamma(t),1/\sqrt{2})}{2-\mathrm{sn}^2(\gamma(t),1/\sqrt{2})}$$

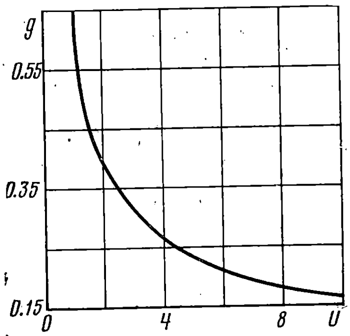
Момент T первого обращения в нуль находится как первый корень уравнения $x_2(t;\ u_1^U)=0$ и равен $T=B$, где B определяется выражением (3.11). Оптимальное значение угла поворота $x_1(T;\ u_1^U)$ равно

$$x_1(T;u_1^U)=\int_0^B x_2(t;u_1^U)\,dt \tag{3.12}$$

Поскольку, как отмечено выше, управление вида (3.7) является оптимальным для задачи (3.2), то оптимальное значение функционала $J_2(u)$, равное минимально возможному значению абсолютной величины угла поворота амортизируемого тела, определяется выражением (3.12)

$$J_2(u_U{}^0)=\int_0^B x_2(t;\ u_1^U)\,dt$$

Оптимальное значение функционала $J_2(u_U^0)$ является функцией предельного допустимого значения перегрузки U. Введем обозначение $g(U)=J_2(u_U^0)$. Исследуем функцию $g(U)$ на интервале $1\leqslant U<\infty$. Из (3.11) вытекает, что $B\to 0$ при $U\to\infty$ и, следовательно, $g(U)\to 0$ при $U\to\infty$.



Фиг. 4

Дифференцированием функции $g(U)$ по U показывается, что $dg/dU<0$ и функция $g(U)$ монотонно убывает с ростом предельно допустимого значения перегрузки. На фиг. 4 представлен график зависимости минимума — максимума угла поворота $g(U)=J_2(u_U^0)$ от параметра U. Будучи непрерывной и монотонной, функция $g(U)$ имеет обратную функцию $g^{-1}(z)$, определенную на интервале $0<z\leqslant g(1)$. Зная решение задачи 3.2, можно с помощью несложного пересчета получить решение задачи 3.1. Искомый в задаче 3.1 минимум максимальной перегрузки является функцией максимально допустимого значения модуля угла поворота D. Введем обозначение $G(D)=\min_u J_1(u)$ при условии $J_2(u)\leqslant D$. Связь решения задачи 3.1 с решением задачи 3.2 выражается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} J_1(u_0^D)&=G(D)=g^{-1}(D),\ 0<D\leqslant g(1) \\ J_1(u_0^D)&=G(D)=1,\ D>g(1) \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$u_0^D=u^0_{g^{-1}(D)}(t),\ 0<D\leqslant g(1);\ u_0^D=u_1^0(t),\ D>g(1)$$

Легко видеть, что

$$J_2(u_0^D)=D,\ 0<D\leqslant g(1);\ J_2(u_0^D)=g(1),\ D>g(1) \tag{3.14}$$

т. е. управление $u_0^D(t)$, определяемое выражением (3.13), удовлетворяет ограничению задачи 3.1. Покажем, что это управление является оптимальным. При $D>g(1)$ оптимальность очевидна, поскольку из начальных условий задачи Коши (3.3) следует, что $u^2(0)+x_2^4(0;\ u)=u^2(0)+1\geqslant 1$ и максимальная перегрузка не может быть меньше единицы.

Допустим теперь, что управление вида (3.14) не является оптимальным для $D\in(0,\ g(1)]$. Это означает, что существует управление $u^*(t)$, такое, что $G(D)<g^{-1}(D)$. Из этого неравенства вытекает, что $g(G(D))>D$, поскольку функция g является монотонно убывающей. По определению функции g, $g(G(D))=\min_u J_2(u)$ при условии $J_1(u)\leqslant G(D)$. Отсюда непосредственно вытекает неравенство $J_2(u^*)\geqslant g(G(D))$. Следовательно, управление $u^*(t)$ нарушает ограничение $J_2(u)\leqslant D$. Таким образом, оптимальность управления (3.13) доказана.

Поступила 25 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров Б. Н., Боднер В. А., Алексеев К. Б.* Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром. Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 6.
2. *Sagirow P.* Verbrauchsoptimale Drehungen um eine körperfeste Achse. In: Gyrodynamics, Berlin, 1974.
3. *Sagirow P.* Zeitoptimale Drehungen um eine körperfeste Achse. Z. angew. Math. und Mech., 1974, Bd 54, No. 4.
4. *Рощин Ю. Р.* К задаче оптимальной переориентации твердого тела. Космические исследования, 1977, т. 15, вып. 6.

5. *Баничук Н. В., Мамалыга В. М.* Оптимальное управление в нелинейной механической системе с переменной инерционной характеристикой. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2.
6. *Болотник Н. Н.* Оптимальная амортизация крутильных колебаний. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 2.
7. *Коловский М. З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М., «Наука», 1976.
8. *Sevin E., Pilkey W.* Optimum Shock and Vibration Isolation. Government print office, Washington, 1971.
9. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М., «Наука», 1977.