

СИНХРОНИЗАЦИЯ ГЕНЕРАТОРОВ ГАРМОНИЧЕСКИХ СИЛ НА НЕСУЩЕЙ СВОБОДНОЙ БАЛКЕ

В. В. ГУЗЕВ, Р. Ф. НАГАЕВ

(Ленинград)

Динамический анализ протяженных вибрационных машин, приводимых от произвольного числа синхронизирующихся возбудителей колебаний, сводится преимущественно к определению критериев устойчивости синхронно-синфазного режима в системе динамических объектов-генераторов гармонических сил, взаимодействующих посредством свободной несущей балки.

В [1] на основе локальной теории синхронизации проведен анализ динамической схемы горизонтального вибрационного конвейера, колебания которого возбуждаются $2n$ дебалансными самосинхронизирующимися вибраторами. Предполагалось, что рабочий орган идеализируется в виде балки с постоянной погонной массой, а вращение вибраторов в паре синхронизировано и синфазировано тем или иным способом. Последнее предположение является естественным при исследовании синхронизации большого числа пар вибраторов, поскольку существенными, как правило, являются только условия устойчивости синхронного режима между парами вибраторов, и при их выполнении условия устойчивого вращения вибраторов в паре обеспечиваются автоматически [2].

В данной работе исследуется синхронизация произвольного числа генераторов гармонических сил с учетом сосредоточенных масс статоров генераторов, расположенных на свободной несущей балке в правильном порядке. Приведен численный алгоритм, который позволяет получить диаграммы транспортируемости, определяющие области существования безузловых форм вынужденных колебаний балки при синхронно-синфазном возмущении в зависимости от сочетания ее параметров. Анализ результатов численного счета свидетельствует, что пересечение частотных диапазонов транспортируемости и устойчивости синхронно-синфазного режима может иметь место при $n \leq 5$.

1. Постановка задачи. Гармонические коэффициенты влияния. Рассмотрим систему n одинаковых динамических объектов, слабо взаимодействующих между собой посредством несущей балки со свободными концами. Будем предполагать, что в порождающем приближении объекты являются генераторами гармонических сил $q_i = F \cos(\omega t + \alpha_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$), линии действия которых перпендикулярны оси балки, а малые колебания несущей системы не сопровождаются рассеиванием энергии. Генераторы считаются расположенными по длине балки периодическим образом, т. е. расстояния между соседними генераторами одинаковы и равны a , а крайние генераторы удалены от концов балки на расстояния, в два раза меньшие.

В исследуемой системе генераторов гармонических сил всегда существует синхронная фазировка 1-го рода

$$\alpha_i = \alpha \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.1)$$

т. е. соответствующие уравнения для определения порождающего приближения ω к истинной синхронной частоте и порождающих фазовых сдвигов α_i допускают решение (1.1) [3].

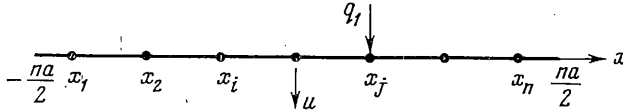
Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в малом синхронно-синфазного режима (1.1) для генераторов скалярных гармонических сил сводятся к условиям отрицательности $n-1$ корней λ_1^2

определителя линейной однородной системы уравнений [4] относительно неизвестных a_1, a_2, \dots, a_n :

$$\frac{F^2}{4\pi e} \sum_{j=1}^n k_{ij}(a_j - a_i) = \lambda_1^2 \mu a_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.2)$$

При этом один корень $\lambda_1^2 = 0$ в силу автономности задачи.

В уравнениях (1.2) μ — есть малый параметр, характеризующий слабость взаимодействия объектов; λ_1 — приближение порядка $\sqrt{\mu}$ к истинному характеристическому показателю; $e > 0$ — коэффициент крутизны ске-



Фиг. 1

лентной кривой объекта, условие положительности которого означает, что изучается синхронизация только жестко анизохронных объектов; k_{ij} — гармонический коэффициент влияния j -го генератора на i -й.

Гармонические коэффициенты влияния в рассматриваемом случае определяются в результате исследования задачи о поперечных колебаниях свободной балки с n равноотстоящими массами, на одну из которых действует единичная гармоническая возмущающая сила $q = \delta(x - x_j) \cos \omega t$ (фиг. 1). Обозначим абсциссы расположения масс через x_1, x_2, \dots, x_n , а силу будем считать приложенной в точке x_j . Дифференциальное уравнение малых колебаний балки можно представить в виде

$$EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \left[\rho + m \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta(x - x_j) \cos \omega t \quad (1.3)$$

где $u(x, t)$ — прогиб сечения балки с абсциссой x ($-na/2 \leq x \leq na/2$), EJ — жесткость балки на изгиб, ρ — погонная масса балки, m — величина сосредоточенной массы, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Введем в уравнение (1.3) безразмерную координату распределения $\xi = (x/na)$ ($-1/2 \leq \xi \leq 1/2$) и безразмерные параметры частоты и распределения масс

$$v^4 = \frac{\rho + m/a}{EJ} \omega^2 n^4 a^4, \quad \gamma = \frac{m}{m + \rho a}$$

Учитывая также, что вынужденные колебания балки происходят по гармоническому закону $u = U \cos \omega t$, и полагая $\zeta = U \omega^2 (m + \rho a)$, представим уравнение (1.3) в следующей безразмерной форме:

$$\zeta^{IV} - \left[1 - \gamma + \frac{\gamma}{n} \sum_{i=1}^n \delta(\xi - \xi_i) v^4 \zeta \right] = \frac{v^4}{n} \delta(\xi - \xi_j) \quad (1.4)$$

Решение уравнения (1.4) будем искать в виде ряда

$$\zeta = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \theta_s \quad (1.5)$$

где функции $\theta_s(\xi)$ являются решением уравнения

$$\theta_s^{IV} - \nu_s^4 \theta_s = 0 \quad (1.6)$$

и представляют ортонормированные собственные формы задачи о поперечных колебаниях однородной свободной балки, а ν_s — отвечающие им собственные числа.

Как известно, собственные функции θ_s могут быть представлены в виде [1] ($\theta_0=1, \theta_1=2\sqrt{3}\xi$):

$$\theta_s(\xi) = \frac{\text{ch } \nu_s \xi}{\text{ch } \nu_s / 2} + \frac{\cos \nu_s \xi}{\cos \nu_s / 2} \quad (s=2, 4, 6, \dots) \quad (1.7)$$

$$\theta_s(\xi) = \frac{\text{sh } \nu_s \xi}{\text{sh } \nu_s / 2} + \frac{\sin \nu_s \xi}{\sin \nu_s / 2} \quad (s=3, 5, 7, \dots)$$

а отвечающие им собственные числа находятся из уравнения

$$\text{ch } \nu_s \cos \nu_s - 1 = 0, \quad \nu_0 = \nu_1 = 0 \quad (1.8)$$

В результате преобразований с учетом соотношений (1.5) и (1.6) из уравнения (1.4) для коэффициентов b_r могут быть получены выражения

$$b_r = - \frac{1}{n(1-\gamma)} \left[1 - \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{\nu_r}{\nu} \right)^4 \right]^{-1} \left[\gamma \sum_{i=1}^n \zeta(\xi_i) \theta_r^{(i)} + \theta_r^{(j)} \right] \quad (r=0, 1, \dots) \quad (1.9)$$

где через $\theta_s^{(i)}$ обозначены величины функций θ_s при $\xi = \xi_i$.

Подставляя значения коэффициентов (1.9) в разложение (1.5) и полагая далее $\xi = \xi_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), будем иметь систему уравнений относительно величин $\zeta(\xi_i)$, которую запишем в форме

$$\sum_{k=1}^n \left[\theta_{ik} \zeta(\xi_k) + \frac{n(1-\gamma)}{\gamma} \zeta(\xi_i) \delta_{ik} \right] = - \frac{1}{\nu} \theta_{ij} \quad (1.10)$$

$$\theta_{ij} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\theta_s^{(i)} \theta_s^{(j)}}{1 - (\nu_s/\nu)^4 / (1-\gamma)} \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

Поскольку величины $\zeta(\xi_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$), определяемые из уравнений (1.10), представляют безразмерные значения амплитуды прогиба балки в точках расположения масс под действием гармонической силы, приложенной к j -й массе, то они и являются искомыми безразмерными гармоническими коэффициентами влияния, т. е.

$$\zeta(\xi_{ij}) = \zeta_{ij} \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad (1.11)$$

2. Частотный диапазон устойчивости синхронно-синфазного режима. При исследовании устойчивости синхронных режимов вместо величин λ_1^2 оказывается удобным вводить так называемые коэффициенты устойчивости [4]. Введем безразмерные коэффициенты устойчивости посредством соотношения

$$\kappa_0 = 4\pi \mu \epsilon (m + \rho a) F^{-2} \omega^2 \lambda_1^2 \quad (2.1)$$

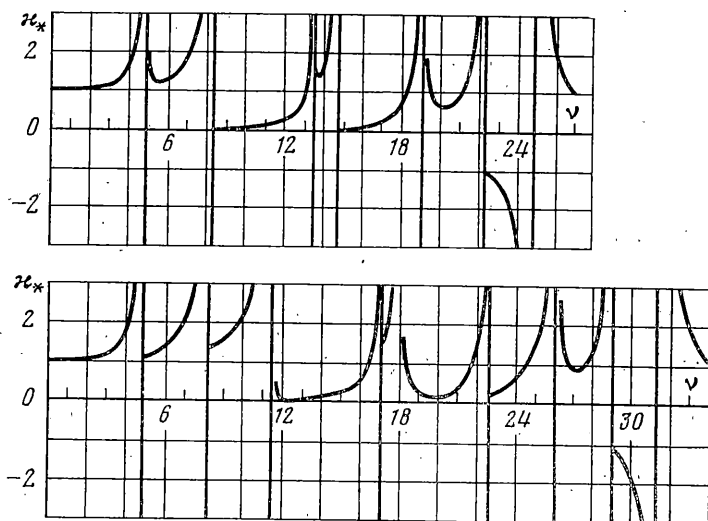
Система уравнений (1.2) для определения критериев устойчивости синхронно-синфазного режима с помощью безразмерных коэффициентов

влияния (1.11) и коэффициентов устойчивости (2.1) записывается в виде

$$\sum_{j=1}^n \xi_{ij} (a_j - a_i) = \kappa_0 a_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.2)$$

Коэффициенты устойчивости κ_0 при различном числе синхронизирующихся генераторов¹ гармонических сил ($n=2, 3, \dots, 7$) вычислялись на ЭВМ. Последовательность вычислений была следующей.

Сначала по формулам (1.7) находились значения ортонормированных форм колебаний в точках расположения генераторов $\xi_i = -1/2(n+1-2i)/n$,



Фиг. 2

а затем вычислялись коэффициенты θ_{ij} . Значения коэффициентов θ_{ij} подставлялись в систему уравнений (1.10), из которой определялись гармонические коэффициенты влияния ξ_{ij} . И, наконец, коэффициенты устойчивости κ_0 вычислялись как собственные числа определителя системы (2.2) при подстановке в нее коэффициентов ξ_{ij} . Для каждого значения n параметр γ изменялся от нуля до единицы с шагом 0.1, а параметр частоты ν изменялся с шагом 0.1 от нуля до величины, совпадающей со значением $2n$ -й собственной частоты, определяемой из частотного уравнения

$$|\theta_{ik} + n(1-\gamma)\delta_{ik}/\gamma| = 0 \quad (2.3)$$

В процессе машинного счета были сделаны определенные допущения, которые позволили избежать появления малых разностей больших чисел, обычных для численных методов исследования колебаний или равновесия упругих деформируемых тел.

Полученные результаты оформлены в виде графиков зависимости максимального, определяющего устойчивость системы коэффициента устойчивости κ_* (запаса устойчивости) от параметров ν и γ . На фиг. 2, а, б пред-

¹ Число масс соответствует количеству механических возбудителей колебаний в вибрационных машинах. Потребности вибротехники в настоящее время вполне удовлетворяются указанным и даже меньшим числом возбудителей, однако при необходимости соответствующие расчеты могут быть выполнены по изложенной методике и для большего числа масс.

ставлены соответствующие графики для случая $n=4$ и 5 при $\gamma=0.6$. Из этих графиков следует, что синхронно-синфазный режим при любом числе генераторов и $\gamma \neq 1$ является устойчивым в частотном диапазоне, ограниченном $(2n-1)$ -й и $2n$ -й собственными частотами. При $\gamma=1$ коэффициент $\kappa_* = 0$ и система находится на границе области устойчивости. Если несущая балка является абсолютно жесткой ($\nu=0$), то максимальный коэффициент устойчивости при всех значениях параметра γ для $n > 2$ равен единице. Непосредственными вычислениями можно показать, что для $n=2$ в этом случае $\kappa_* = (1-\gamma)(4-\gamma)^{-1}$.

Наиболее стабильным в том смысле, что κ_* почти не зависит от параметра частоты ν , является для всех n диапазон, предшествующий первой отличной от нуля собственной частоте. В точках, соответствующих собственным частотам системы, коэффициенты устойчивости неограниченно возрастают и кривые для них претерпевают разрыв второго рода.

3. Частотный диапазон транспортируемости. В вибрационных транспортных машинах непрерывное перемещение материала возможно только при безузловой форме колебаний рабочего органа, поэтому частотный диапазон, при котором существует устойчивый синхронный режим, для транспортных машин должен пересекаться с частотным диапазоном транспортируемости.

Форма колебаний балки с равноотстоящими массами при синхронно-синфазном возмущении может быть получена как и выражение для прогибов балки (1.5) под действием одной единичной гармонической силы. При этом необходимо только в правой части исходного уравнения (1.4) поставить перед дельта-функцией индекс суммирования по всем j от 1 до n и учитывать его при последующих преобразованиях. Результирующее выражение представимо в форме

$$\xi(\xi) = -\frac{1}{n(1-\gamma)} \sum_{s=0}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{\nu_s}{\nu} \right)^4 \right] \tau_s \theta_s(\xi)$$

$$\tau_s = \sum_{k=1}^n \theta_s^k [1 + \gamma \xi(\xi_k)] \quad (3.1)$$

Здесь величины прогибов балки в точках ξ_i ($i=1, 2, \dots, n$) следует определять из системы уравнений

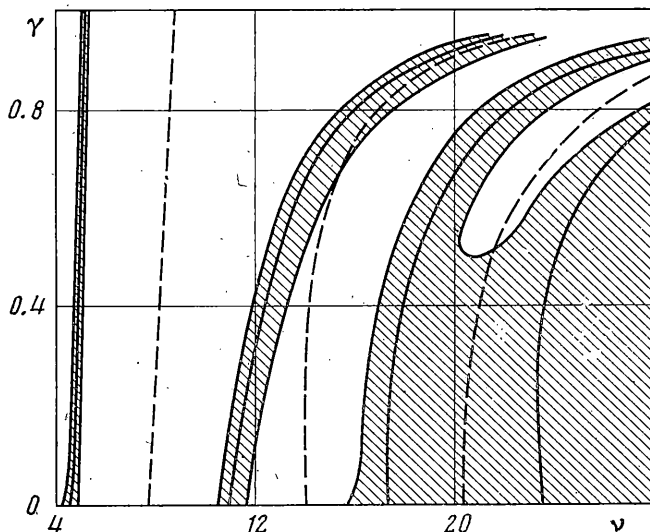
$$\sum_{k=1}^n \left[\theta_{ik} \xi(\xi_k) + \frac{n(1-\gamma)}{\gamma} \xi(\xi_i) \delta_{ik} \right] = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^n \theta_{ik} \quad (3.2)$$

Форма упругой линии балки с массами вычислялась по формуле (3.1) на ЭВМ. Вычисления производились для случая, когда на балке имелось две, три, ..., семь масс, а параметры ν и γ варьировались в тех же пределах, что и при вычислении коэффициентов устойчивости. Безразмерная координата ξ в силу симметрии формы вынужденных колебаний балки изменялась в пределах от 0 до $1/2$ с шагом 0.01. Результаты вычислений были оформлены в виде диаграмм транспортируемости, которые позволяют определить сочетания безразмерных параметров ν и γ , обеспечивающих безузловую рабочую форму колебаний балки.

На фиг. 3 представлена диаграмма транспортируемости, отвечающая значению $n=4$. Узловым формам колебаний балки соответствуют заштрихованные области, которые тонкими линиями отделены от областей с безузловой формой колебаний — областей транспортируемости. Жирными ли-

ниями нанесены резонансные частоты балки при синхронно-синфазном возмущении, а пунктирными линиями нанесены собственные частоты, отвечающие кососимметрическим формам колебаний балки.

Следует отметить, что в случае синхронизации генераторов гармонического крутящего момента, взаимодействующих посредством нежесткого свободного стержня, строго устанавливалась граница зоны транспортируемости — она совпадала с n -м значением корня частотного уравнения стержня с маховиками [5]. В рассматриваемом же случае картина существенно сложнее, и это обусловлено более высоким порядком уравнения колебаний



Фиг. 3

балки. Области транспортируемости чередуются определенным образом с областями, где имеет место узловая форма колебаний балки. Соответственно и пересечение частотных диапазонов устойчивости и транспортируемости происходит не при любых n , а только при $n \leq 5$. При $n=2$ диапазоны пересекаются при всех значениях γ , а при больших n пересечение происходит только с ростом коэффициента масс, причем полоса пересечения уменьшается¹.

4. Об исследовании динамических схем вибрационных машин. Полученные результаты могут быть использованы при создании вибрационных транспортных и обогатительных машин, приводимых от большого числа возбудителей колебаний. С их помощью наиболее простым путем определяются условия устойчивости синхронно-синфазного режима, частотный диапазон транспортируемости и собственные частоты рабочего органа.

Рассмотрим, например, систему генераторов гармонических сил, взаимодействующих посредством несущей балки, жесткой в продольном направлении. Линии действия всех сил наклонены к оси балки под одним и тем же углом β , а стабилизация синхронного режима производится с помощью пассивного синхронизатора, представляющего собой массу m_0 , присоединяемую к балке посредством пружины жесткостью c (фиг. 4). В виде этой

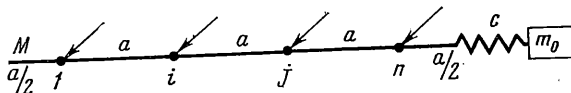
¹ При $n > 7$ расчет не проводился. Однако отсутствие пересечения диапазонов транспортируемости и устойчивости синхронного режима при очень больших n следует из соображений физического характера с большой степенью вероятности.

схемы идеализируется обычно протяженный горизонтальный виброконвейер с большим числом механических возбудителей [6].

Гармонический коэффициент влияния k_{ij} вычисляется здесь по формуле

$$k_{ij} = K \cos^2 \beta + K_{ij} \sin^2 \beta \quad (4.1)$$

причем K — гармонический коэффициент влияния, равный амплитуде перемещения балки в продольном направлении под действием единичной продольной гармонической силы, а K_{ij} — гармонический коэффициент влия-



Фиг. 4

ния силы, действующей перпендикулярно оси балки, на амплитуду перемещения в том же направлении.

Нетрудно показать, что

$$K = -\frac{\lambda_0^2 - \omega^2}{n(m + \rho a)(\lambda^2 - \omega^2)}, \quad K_{ij} = \frac{\zeta_{ij}}{(m + \rho a)\omega^2} \quad (4.2)$$

$$\lambda_0 = \left(\frac{c}{m_0}\right)^{1/2}, \quad \lambda = \left[c \left(\frac{1}{n(m + \rho a)} + \frac{1}{m_0} \right) \right]^{1/2}$$

где λ_0 — парциальная частота, λ — собственная частота двухмассовой системы, а величины ζ_{ij} определяются соотношениями (1.11).

Коэффициенты устойчивости синхронно-синфазного режима, вводимые посредством соотношения (2.1), в соответствии с (4.2) вычисляются как собственные числа определителя системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n \left(-\frac{\lambda_0^2 - \omega^2}{n(\lambda^2 - \omega^2)} \cos^2 \beta + \zeta_{ij} \sin^2 \beta \right) (a_j - a_i) = \kappa a_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.3)$$

Отличные от нуля собственные числа получаются при $\sum a_j = 0$, а система уравнений (4.3) при этом записывается в виде (2.2), причем

$$\kappa = \kappa_0 \sin^2 \beta + \frac{\lambda_0^2 - \omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cos^2 \beta \quad (4.4)$$

Определяя по соответствующему графику величину $\kappa_0 = \kappa_*$, отвечающую заданным значениям n и параметров ν , γ , можно, подбирая параметры стабилизатора, обеспечить устойчивость фазировки синхронного режима. Очевидно, что для этого должно выполняться неравенство $\lambda_0 < \omega < \lambda$. Если, однако, $\beta = 0$, выполнение указанного неравенства является достаточным условием устойчивости синхронного режима, а при $\beta = \pi/2$ стабилизатор не оказывает на систему синхронизирующего воздействия.

В рассмотренном примере необходимые и достаточные условия устойчивости синхронно-синфазного режима эффективным образом определялись с помощью решения задачи о синхронизации разделенных одинаковыми интервалами n генераторов гармонических сил, когда линии действия сил перпендикулярны оси балки. Аналогично можно вычислять запас устойчивости и в других вибрационных машинах и устройствах с прямолинейной, наклоненной под некоторым углом к оси рабочего органа траекторией колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нагаев Р. Ф., Попова И. А. Самосинхронизация нескольких механических вибраторов, установленных на едином рабочем органе балочного типа. Инж. ж. МГТ, 1967, № 1.
2. Гузев В. В., Денисов Г. А., Лавров Б. П., Нагаев Р. Ф. Об одном случае устойчивости синхронного режима многовибраторного виброподъемника. Вибротехника, 1972, № 3.
3. Блехман И. И. Синхронизация динамических систем. М., «Наука», 1971.
4. Нагаев Р. Ф., Ходжаев К. Ш. Синхронные движения в системе объектов с несущими связями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
5. Гузев В. В., Лавров Б. П., Нагаев Р. Ф. Динамика вертикальных виброконвейеров с самосинхронизирующимися вибраторами. Машиноведение, 1973, № 2.
6. Лавров Б. П. Вибрационные машины с самосинхронизирующимися вибраторами (конструктивные схемы и специфические особенности расчета). Труды по теории и применению явления синхронизации в машинах и устройствах. Вильнюс, «Минтис», 1965.