

МЕТОД ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ
В ЗАДАЧАХ ОБ ИЗГИБЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН
СО СМЕШАННЫМ УСЛОВИЕМ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ПО КОНТУРУ

В. Б. ЗЕЛЕНЦОВ

(Ростов-на-Дону)

Метод, развитый в [1], применяется к исследованию изгиба прямоугольных пластин со смешанными условиями закрепления по контуру. Смешанная краевая задача сведена к интегральному уравнению первого рода, решение которого зависит от счетного числа произвольных констант, определяемых из бесконечной алгебраической системы высокого качества, — ее внедиагональные и свободный члены экспоненциально убывают с ростом номера. Числовые результаты, полученные данным методом, сравниваются с ранее полученными.

1. Рассматривается изгиб прямоугольной пластины длины $2b$ и высоты h по теории Кирхгофа — прогиб пластины удовлетворяет уравнению Софи-Жермен. Боковые грани пластины шарнирно оперты. На верхней грани задается смешанное граничное условие вида

$$w_y'(x, h) = \delta(x) \quad (|x| \leq a), \quad M_y(x, h) = 0 \quad (a \leq |x| \leq b) \quad (1.1)$$

$$w(x, h) = 0 \quad (|x| \leq b).$$

На нижней грани задаются граничные условия двух типов

$$w(x, 0) = 0, \quad w_y'(x, 0) = 0 \quad (|x| \leq b) \quad (1.2)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad M_y(x, 0) = 0 \quad (|x| \leq b). \quad (1.3)$$

На фиг. 1, а, б показаны схемы закрепления пластины для задач (1.2) и (1.3), где сплошной линией обозначено шарнирное опирание, а штриховкой — жесткая заделка. Предполагается, что нормальная нагрузка отсутствует.

Сначала рассмотрим случай (1.2). Для этого потребуется решение задачи об изгибе пластины в форме бесконечной полосы ($0 \leq y \leq h$, $|x| < \infty$), нагруженной по верхней грани следующим образом:

$$w_1(x, h) = 0, \quad M_y^1(x, h) = \varphi(x), \quad |x| < \infty \quad (1.4)$$

а по нижней — точно так же, как в (1.2), которое легко находится с помощью интегрального преобразования Фурье и имеет вид

$$w_1(x, h) = (2\pi D)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) R(x - \xi) d\xi \quad (1.5)$$

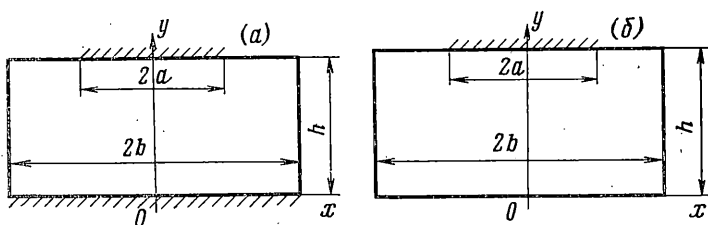
$$R(t, y) = \int_0^{\infty} E(\alpha, y) [\alpha (\operatorname{sh} 2\alpha h - 2\alpha h)]^{-1} \cos \alpha t d\alpha \quad (1.6)$$

$$E(\alpha, y) = \alpha h y \operatorname{sh} \alpha (h - y) + y \operatorname{sh} \alpha h \operatorname{sh} \alpha y - h \operatorname{sh} \alpha h \operatorname{sh} \alpha y$$

где $\varphi(s)$, — искомый реактивный момент в заделке, D — цилиндрическая жесткость.

Используя опыт [2, 3], представим прогиб пластины $w_2(x, y)$ по однородным решениям задачи об изгибе бесконечной пластины ширины h шарнирно-закрепленной по верхней грани и закрепленной по нижней грани, как в (1.2)

$$w_2(x, y) = \sum_{h=1}^{\infty} X_h(x) Y_h(y) + \bar{X}_h(x) \bar{Y}_h(y) \quad (1.7)$$



Фиг. 1

где в силу четности задачи по x

$$X_h(x) = A_h \operatorname{ch} \lambda_h x, \quad \bar{X}_h(x) = \bar{A}_h \operatorname{ch} \lambda_h x \quad (1.8)$$

В этом случае $Y_h(y)$ могут быть приняты в виде

$$Y_h(y) = -\cos \lambda_h h \sin \lambda_h y + \lambda_h y \cos \lambda_h (h-y) \quad (1.9)$$

где λ_k определяются из уравнения $\sin 2\lambda_k h = 2\lambda_k h$, A_k — здесь произвольные постоянные, а функции $Y_k(y)$ удовлетворяют условиям обобщенной ортогональности.

Для того чтобы боковые грани пластины были шарнирно оперты, необходимо потребовать выполнения условий

$$w_1(b, y) - w_2(b, y) = 0, \quad M_{x^1}(b, y) - M_{x^2}(b, y) = 0 \quad (1.10)$$

Пользуясь условием обобщенной ортогональности функций $Y_k(y)$, постоянные A_k подберем так, чтобы одновременно удовлетворялись оба условия (1.10). Получим [2]:

$$A_k = pq^{-1}, \quad p = \int_0^h [w_{1yy}'' Y_k''(y) - \lambda_k^2 w_{1xx}'' Y_k(y)] dy \quad (1.11)$$

$$q = \operatorname{ch} \lambda_k b \int_0^h [(Y_k''(y))^2 - \lambda_k^4 Y_k^2(y)] dy$$

Заметим, что на боковых гранях можно также поставить условия типа $w_{1y}'(b, y) - w_{2y}'(b, y) = 0$, $V_{1x}(b, y) - V_{2x}(b, y) = 0$, где V_{1x}, V_{2x} — обобщенная перерезывающая сила. Здесь же отметим, что формула (1.11) не является единственной [4].

Взяв квадратуру в (1.11), приходим к выражению

$$A_k = \frac{\sin^2 \lambda_k h \exp(-\lambda_k b)}{4Dh\lambda_k^2 \operatorname{ch} \lambda_k b} \int_0^b \varphi(\xi) \operatorname{ch} \lambda_k \xi d\xi \quad (1.12)$$

Теперь удовлетворим смешанному граничному условию на верхней грани (1.4). Для этого нужно потребовать выполнения условия

$$w_{1y}'(x, h) - w_{2y}'(x, h) = \delta(x), \quad |x| \leq a \quad (1.13)$$

что приводит к интегральному уравнению ($|x| \leq 1$)

$$(2\pi D)^{-1} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) K((x-\xi)\lambda^{-1}) d\xi = \delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k \sin^2 \lambda_k h \operatorname{ch} \lambda_k x + \bar{A}_k \bar{\lambda}_k \sin^2 \bar{\lambda}_k h \operatorname{ch} \lambda_k x \quad (1.14)$$

где $K(t) = R_y'(t, h)$; $R(t, y)$ определяется из (1.6).

Учитывая, что пока A_k — независимые постоянные, решение (1.14) можно представить в форме

$$\varphi(x) = 2D \left[\mu_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega_k \mu_k(x) + \bar{A}_k \bar{\omega}_k \bar{\mu}_k(x) \right] \quad (1.15)$$

$$\omega_k = \lambda_k \sin^2 \lambda_k h, \quad \bar{\omega}_k = \bar{\lambda}_k \sin^2 \bar{\lambda}_k h$$

где $\mu_k(x)$ определяется из интегрального уравнения ($|x| \leq 1$)

$$\int_{-1}^1 \mu_k(\xi) d\xi \int_0^{\infty} u^{-1} L(u) \cos(u(x-\xi)\lambda^{-1}) d\xi = \begin{cases} a^{-1} \pi \delta(x) & (k=0) \\ a^{-1} \pi \operatorname{ch} \lambda_k x & (k \geq 1) \end{cases} \quad (1.16)$$

$$u^{-1} L(u) = 2u^{-1} (\operatorname{sh}^2 u - u^2) (\operatorname{sh} 2u - 2u^2)^{-1}, \quad \lambda = h/a$$

Функции $\bar{\mu}_k(x)$ находятся из интегрального уравнения (1.16), где $\mu_k(x)$ заменено на $\bar{\mu}_k(x)$, а $\pi \operatorname{ch} \lambda_k x$ в правой части — на $\pi \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k x$.

В дальнейшем необходимо иметь аналитическое решение уравнения (1.16). Для этого аппроксимируем функцию $u^{-1} L(u)$ выражением специального вида

$$u^{-1} L(u) \approx u^{-1} \operatorname{th} A_0 u, \quad A_0 = \lim_{u \rightarrow 0} u^{-1} L(u) = \frac{1}{2} \quad (1.17)$$

Ошибка такой аппроксимации в данном случае не превосходит 2% на всей действительной оси. Тогда интегральное уравнение (1.6) примет вид ($|x| \leq 1$):

$$- \int_{-1}^1 \mu_k(\xi) \ln \left| \operatorname{th} \frac{\pi(x-\xi)}{4A_0 \lambda} \right| d\xi = \begin{cases} \pi \delta(x) & (k=0) \\ \pi \operatorname{ch} \lambda_k x & (k \geq 1) \end{cases} \quad (1.18)$$

Точное решение этого уравнения дано в [5]. В случае $\delta(x) = \delta = \operatorname{const}$ его можно представить в форме

$$\mu_0(x) = \pi \delta (A_0 \sqrt{2})^{-1} K^* (\operatorname{ch} \theta - \operatorname{ch} \theta x)^{-1/2}$$

$$\mu_k(x) = 2^{-1/2} \theta S(\nu) (\operatorname{ch} \theta - \operatorname{ch} \theta x)^{-1/2} - \theta^2 \left(\nu - \frac{1}{2} \right)^2 \int_x^1 \frac{P_{\nu-1}(\operatorname{ch} \theta \tau) \operatorname{sh} \theta \tau}{\sqrt{2} (\operatorname{ch} \theta - \operatorname{ch} \theta \tau)} d\tau \quad (1.19)$$

$$P_{-\nu/2} S(\nu) = \pi K^* P_{\nu-1} + \pi \operatorname{sh} \theta (P_{-\nu/2} P_{\nu-1}^1 - P_{\nu-1} P_{-\nu/2}^1)$$

$$K^* = \text{ch}(\theta/2) K_0^{-1} (\sqrt{1 - \text{th}^2(\theta/2)}), \quad \theta = \pi(A_0 \lambda)^{-1}$$

$$\lambda = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{h}{b}, \quad \nu = A_0 \pi^{-1} z_k + \frac{1}{2}, \quad z_k = \lambda_k h$$

Здесь $K_0(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $P_\nu(x)$ и $P_\nu^\mu(x)$ — сферические и присоединенные сферические функции, а $P_\nu^\mu = P_\nu^\mu(\text{ch } \theta)$ и $P_\nu = P_\nu(\text{ch } \theta)$. Формула для $\bar{\mu}_k(x)$ получается из (1.19) заменой ν на сопряженное $\bar{\nu} = A_0 \pi^{-1} \bar{z}_k + 1/2$.

Теперь для определения постоянных A_k необходимо представить (1.19) в (1.15), а (1.15) — в (1.12), что приводит к бесконечной алгебраической системе второго рода

$$x_k = f_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n + \bar{a}_{kn} \bar{x}_n \quad (k=1, 2, \dots) \quad (1.20)$$

$$x_k = \Delta_\sigma^2 \sin^{-2}(\Delta_\sigma) \text{ch}(\Delta_\sigma / \beta) (h\delta)^{-1} A_k, \quad f_k = L_0^\sigma \exp(-\Delta_\sigma / \beta)$$

$$a_{kn} = \Delta_\nu^{-1} \sin^4(\Delta_\nu) L_\nu^\sigma \text{ch}^{-1}(\Delta_\nu / \beta) \exp(-\Delta_\sigma / \beta), \quad (1.21)$$

$$a_{kk} = \Delta_\sigma^{-1} \sin^4(\Delta_\sigma) L_\sigma^\sigma \text{ch}^{-1}(\Delta_\sigma / \beta) \exp(-\Delta_\sigma / \beta)$$

$$L_0^\sigma = \pi 2^{-1} K^* P_{\sigma-1}, \quad \Delta_\sigma = \pi(\sigma^{-1}/2) / A_0, \quad \Delta_\nu = \pi(\nu^{-1}/2) / A_0$$

$$L_\nu^\sigma = 2^{-1} S(\nu) P_{\sigma-1} - \pi 2^{-1} \frac{(\nu^{-1}/2)^2 \text{sh } \theta}{(\nu-\sigma)(\nu+\sigma-1)} (P_{\sigma-1} P_{\nu-1}^1 - P_{\nu-1} P_{\sigma-1}^1)$$

$$L_\sigma^\sigma = 2^{-1} S(\sigma) P_{\sigma-1} - \pi 2^{-1} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \text{sh } \theta \left(\frac{dP_{\sigma-1}}{d\sigma} P_{\sigma-1}^1 - \frac{dP_{\sigma-1}^1}{d\sigma} P_{\sigma-1} \right)$$

$$\sigma = A_0 \pi^{-1} z_k + 1/2, \quad \nu = A_0 \pi^{-1} z_n + 1/2 \quad (k, n=1, 2, \dots)$$

где \bar{a}_{kn} получается из a_{kn} заменой z_k на \bar{z}_k .

Имея формулы (1.21), можно изучить асимптотические свойства a_{kn} , f_k при больших k, n . Для этого нам понадобится асимптотика λ_k при $k \gg 1$. Она имеет вид

$$\lambda_{kn} = O\{\pi(k+1/4)^{1/2} \ln[\pi(4k+1)]i\} \quad (1.22)$$

Воспользовавшись [6, 7], выпишем нулевые члены асимптотик $P_{\nu-1}(z)$ и $P_{\nu-1}^1(z)$:

$$P_{\nu-1}(\text{ch } \theta) = O\left\{ \frac{\exp[(\nu^{-1}/2)\theta]}{\sqrt{2\pi\nu \text{sh } \theta}} \right\} \quad (\text{ch } \theta \ll |\nu|)$$

$$P_{\nu-1}^1(\text{ch } \theta) = O\left\{ \frac{\sqrt{\nu} \exp[(\nu^{-1}/2)\theta]}{\sqrt{2 \text{sh } \theta}} \right\} \quad (\text{ch } \theta \ll |\nu|)$$

После этого легко получаем

$$f_k = O\{c_0 \sigma^{1/2} \exp[-\pi(\sigma^{-1}/2)(b-a)/hA_0]\}, \quad |\sigma| \gg 1$$

$$a_{kn} = O\left\{ \frac{c_1 \sqrt{\sigma} \exp[-\pi(\nu+\sigma^{-1}/2)(b-a)/hA_0]}{\sqrt{\nu}(\nu^2-\sigma^2)} \right\}, \quad |\sigma|, |\nu| \gg 1 \quad (1.23)$$

$$a_{kk} = O\{c_2 \sigma \exp[-\pi(2\sigma-1)(b-a)/hA_0]\}, \quad |\sigma| \gg 1$$

где c_0, c_1, c_2 зависят только от γ, β, A_0 . Для \bar{a}_{kn} оценка получится как и для a_{kn} , только ν и σ нужно заменить на $\bar{\nu}, \bar{\sigma}$. Учитывая оценки (1.22) и (1.23), заключаем, что бесконечная алгебраическая система (1.20) является сис-

темой типа Пуанкаре — Коха [8]. После определения x_k из (1.20) решение — распределенный реактивный момент в заделке — вычислится по формуле

$$\varphi(x) = 2\delta D \left(\mu_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \mu_k(x) + \bar{\alpha}_k \bar{x}_k \bar{\mu}_k(x) \right) \quad (1.24)$$

$$\alpha_k = \Delta \sigma^{-1} \sin^4(\Delta \sigma) \operatorname{ch}^{-1}(\Delta \sigma / \beta), \quad \Delta \sigma = \pi(\sigma^{-1/2}) / A_0, \quad \sigma = A_0 \pi^{-1} z_k + 1/2$$

а $\mu_k(x)$ и $\bar{\mu}_k(x)$ — по формуле (1.19).

Интегральная характеристика задачи — суммарный реактивный момент в заделке — вычисляется по формуле

$$(D\delta)^{-1} M = m_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k m_k + \bar{\alpha}_k \bar{x}_k \bar{m}_k \quad (1.25)$$

$$m_0 = \pi K^* P_{-1/2}, \quad m_k = S(\sigma) P_{-1/2} - \pi \operatorname{sh} \theta (P_{-1/2} P_{\sigma-1}^1 - P_{\sigma-1} P_{1/2}^1)$$

где \bar{m}_k получается из m_k заменой σ на $\bar{\sigma}$.

2. Рассмотрим задачу об изгибе пластины по теории Кирхгофа со смешанными граничными условиями (1.1), (1.3). Боковые грани пластины, как и в случае (1.2), шарнирно закреплены.

Решение задачи об изгибе пластины в форме бесконечной полосы ($0 \leq y \leq h$, $|x| < \infty$), нагруженной по верхней грани, как в (1.4), а по нижней, — как в (1.3), необходимое в дальнейшем, имеет вид (1.5), а $R(t, y)$ равно

$$R(t, y) = \int_0^{\infty} E(\alpha, y) (\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha h)^{-1} \cos \alpha t \, d\alpha \quad (2.1)$$

$$E(\alpha, y) = y \operatorname{sh} \alpha h \operatorname{ch} \alpha y - h \operatorname{ch} \alpha h \operatorname{sh} \alpha y$$

Далее, решение задачи об изгибе бесконечной пластины ширины h , шарнирно-закрепленной по верхней и нижней грани (1.3), имеет вид

$$w_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) \quad (2.2)$$

$$X_k(x) = A_k \operatorname{ch} \lambda_k x + B_k x \operatorname{sh} \lambda_k x, \quad Y_k(y) = \sin \lambda_k y, \quad \lambda_k = \pi k h^{-1}$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные.

Теперь, удовлетворив условиям (1.10), определим тем самым наборы постоянных A_k и B_k , пользуясь ортогональностью функций $Y_k(y)$ на отрезке $[0, h]$. Имеем

$$A_k = \frac{\cos \lambda_k h \exp(-\lambda_k b)}{2h D \lambda_k^2 \operatorname{ch} \lambda_k b} [(\lambda_k b \operatorname{th} \lambda_k b + \lambda_k b + 1) P - \lambda_k Q] \quad (2.3)$$

$$B_k = - \frac{\cos \lambda_k h}{2h D \lambda_k \operatorname{ch} \lambda_k b} \exp(-\lambda_k b) P$$

$$P = 2 \int_0^{\xi} \varphi(\xi) \operatorname{ch} \lambda_k \xi \, d\xi, \quad Q = 2a \int_0^{\xi} \xi \varphi(\xi) \operatorname{sh} \lambda_k \xi \, d\xi$$

Удовлетворим смешанному граничному условию на верхней грани (1.1), потребовав, чтобы для функций w_1 и w_2 выполнялось условие (1.13),

которое приводит к интегральному уравнению

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) K((x-\xi)\lambda^{-1}) d\xi = 2\pi D \left(\delta(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos \lambda_n h X_h(x) \right) \quad (2.4)$$

решение которого представим в виде

$$\varphi(\xi) = 2D \left[\mu_0(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos \lambda_k h (A_k \mu_k(\xi) + B_k \psi_k(\xi)) \right] \quad (2.5)$$

где функции $\mu_k(x)$ и $\psi_k(x)$ определяются из интегральных уравнений ($|x| \leq 1$):

$$\int_{-1}^1 \mu_k(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \alpha^{-1} L(\alpha h) \cos(\alpha(x-\xi)\lambda^{-1}) d\alpha = \begin{cases} a^{-1} \pi \delta(x) & (k=0) \\ \pi \operatorname{ch} \lambda_k x & (k \geq 1) \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\int_{-1}^1 \psi_k(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \alpha^{-1} L(\alpha h) \cos(\alpha(x-\xi)\lambda^{-1}) d\alpha = \pi x \operatorname{sh} \lambda_k x \quad (2.7)$$

$$L(u) = (\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u - u) \operatorname{sh}^{-2} u \quad (k \geq 1)$$

Отметим важное свойство решений интегральных уравнений (2.6), (2.7), которое в дальнейшем будет использоваться. Если продифференцировать (2.6) по λ_k и сравнить с (2.7), то можно заключить, что $\psi_k(x) = d\mu_k(x) / d\lambda_k$.

Здесь же отметим связь между P и Q . Если выражение для P продифференцировать по λ_k и сравнить с выражением для Q , то $Q = dP / d\lambda_k$.

Чтобы иметь аналитическое решение уравнения (2.6), как и в случае (1.2), аппроксимируем функцию $\alpha^{-1} L(\alpha h)$ выражением (1.17); $A_0 = 2/3$. Ошибка такой аппроксимации не превосходит 3% на всей действительной оси. Интегральное уравнение (2.6) примет вид (1.18), а его точное решение будет определяться формулами (1.19). Как и в случае (1.2), положим $\delta(x) = \delta = \text{const}$.

Определим постоянные A_k и B_k , подставив найденные $\mu_k(x)$ и $\psi_k(x)$ в (2.5), а (2.5) затем — в (2.3). Это приводит к двум системам бесконечных алгебраических уравнений второго рода

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{kn} y_n + f_k \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

$$y_k = \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_{kn} y_n + g_k$$

$$x_k = (2\delta h)^{-1} \pi \cos(\lambda_k b) \Delta_{\sigma} \operatorname{ch}(\Delta_{\sigma} / \beta) A_k, \quad c_{kn} = 2\Delta_{\nu} L_{\nu}^{\sigma} p_{\nu\sigma}$$

$$y_k = -(2\delta h)^{-1} \pi \cos(\lambda_k b) \Delta_{\sigma} \operatorname{ch} \frac{\Delta_{\sigma}}{\beta} B_k, \quad d_{kn} = -2 \frac{dL_{\nu}^{\sigma}}{d\nu} p_{\nu\sigma}$$

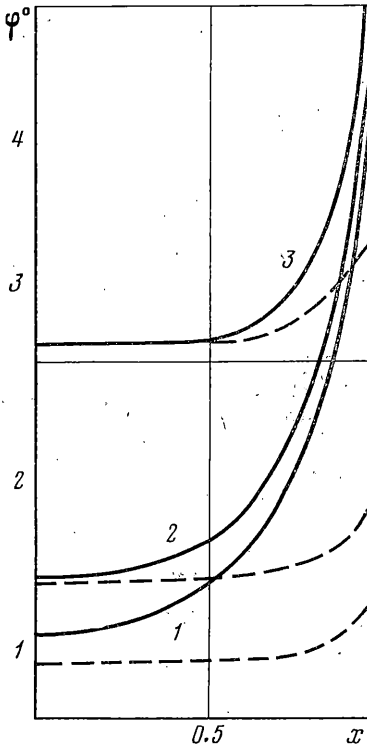
$$a_{kn} = 2\Delta_{\nu}^{-1} \left[l(\sigma) L_{\nu}^{\sigma} - \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{dL_{\nu}^{\sigma}}{d\sigma} \right] p_{\nu\sigma}$$

$$b_{kn} = -2\pi^{-1} A_0 \left[l(\sigma) \frac{dL_{\nu}^{\sigma}}{d\nu} - \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{d^2 L_{\nu}^{\sigma}}{d\nu d\sigma} \right] p_{\nu\sigma}$$

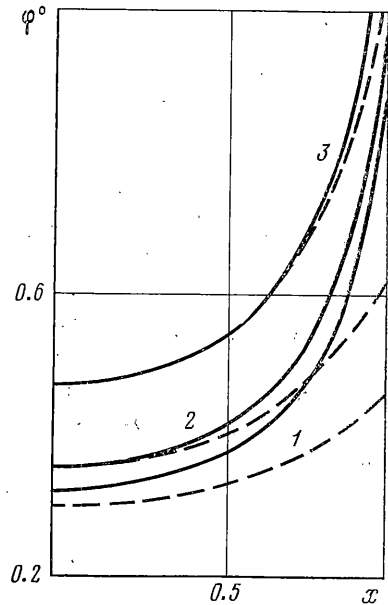
$$f_h = \left[l(\sigma) L_0^\sigma - \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{dL_0^\sigma}{d\sigma} \right] \exp \left(-\frac{\Delta_\sigma}{\beta} \right), \quad g_h = L_0^\sigma \exp \left(-\frac{\Delta_\sigma}{\beta} \right)$$

$$p_{v\sigma} = \text{ch}^{-1}(\Delta_\sigma / \beta) \exp \left(-\Delta_\sigma / \beta \right), \quad \beta = h / b, \quad \lambda_h = \pi k h^{-1}$$

Можно показать, что $a_{kn}, b_{kn}, c_{kn}, d_{kn}, g_k, f_k$ с ростом номера экспоненциально убывают как a_{kn}, f_k в (1.23); тогда бесконечная система (2.8), как и в случае (1.2), является системой типа Пуанкаре — Коха.



Фиг. 2



Фиг. 3

Решение — распределенный реактивный момент в заделке — после вычисления x_k, y_k из (2.8) находится по формуле

$$\varphi(x) = 2D\delta \left\{ \mu_0(x) + 2\pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_0 \left(\sigma - \frac{1}{2} \right)^{-1} x_k \mu_k(x) - y_k \psi_k(x) \right] p^{-1} \right\}$$

$$p = \text{ch}(\Delta_\sigma / \beta) \quad (2.9)$$

Интегральная характеристика — суммарный реактивный момент — подсчитывается по формуле

$$(\delta D)^{-1} M = m_0 + 2\pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_0 \left(\sigma - \frac{1}{2} \right)^{-1} m_k x_k - y_k \frac{dm_k}{d\sigma} \right] \text{ch}^{-1} \frac{\Delta_\sigma}{\beta}$$

$$(2.10)$$

Таким образом, на основании произведенного исследования можно утверждать, что изложенный метод хорошо работает для $(b-a)/h > \varepsilon$, где

$\varepsilon > 0$ или $\beta < \varepsilon^{-1}(1-\gamma)$ в безразмерных параметрах γ, β из (1.19). На этом основании можно предложить некоторые аналитические решения исследуемых здесь задач. Расчеты показывают, что в области $2\beta < 1-\gamma$ изменения параметров можно пользоваться аналитическим решением, которое получается следующим образом: в случае (1.2) необходимо в равенствах (1.24), (1.25) положить $x_1=f_1, \bar{x}_1=\bar{f}_1, x_k=\bar{x}_k=0$ ($k \geq 2$); в случае (1.3) в равенствах (2.9), (2.10) примем $x_1=f_1, y_1=g_1, x_k=y_k=0$ ($k \geq 2$).

Алгоритм задачи (1.3) был реализован на ЭВМ, и результаты сравнивались с ранее полученными данными [9]. На фиг. 2 даны графики реактивного момента, развивающегося в заделке $(\delta D)^{-1}\varphi(x)=\varphi^{\circ}(x)$ (сплошной линией — по (2.9), пунктирной — по [9]) при следующих значениях параметров: $\gamma=0.9$, для кривых 1—3 значение $\beta=1.5; 1; 0.5$. Графики показывают, что при $\beta < \gamma$ для нахождения распределенного момента в середине штампа можно пользоваться ранее предложенным асимптотическим методом [9]. Расхождение графиков момента при x , близких к единице, обуславливается тем, что здесь в решении особенность при $x \rightarrow \pm 1$ выделена. Этот факт сказывается на величине суммарного момента в заделке. Ниже приведены величины развивающихся в заделке $M^{\circ}=(\delta D)^{-1}M$ суммарных безразмерных реактивных моментов, вычисленных по формуле (2.10) при $\gamma=0.9$ и данные, вычисленные по методу [9] (процентная ошибка указана в скобках):

$\beta=0.5$	$\beta=1.0$	$\beta=1.5$	
7.166	4.730	4.233	(2.10)
5.860 (18%)	2.963 (37%)	1.983 (53%)	[9]

На фиг. 3 представлены графики реактивного момента $\varphi^{\circ}(x)=(2\delta D)^{-1}\varphi(x)$ со значениями параметров: $\gamma=0.1$, для кривых 1—3 параметр $\beta=1.5; 1; 0.5$. Соответствующие значения суммарных реактивных моментов M° , вычисленных при $\gamma=0.1$, приведены ниже:

$\beta=0.5$	$\beta=1.0$	$\beta=1.5$
1.457	1.119	1.019
1.255 (14%)	0.874 (22%)	0.695 (32%)

Исходя из полученных числовых данных можно сделать вывод, что метод хорошо работает в широком диапазоне изменения параметров γ, β .

При численной реализации метода выгодно пользоваться одним из следующих представлений присоединенных сферических функций [10]:

$$P_{\nu}^{\mu}(z) = \frac{2^{\mu}(z^2-1)^{-\mu/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2-\mu)} \int_0^{\pi} (z + \sqrt{z^2-1} \cos t)^{\nu+\mu} (\sin t)^{-2\mu} dt, \quad \operatorname{Re} \mu < 1/2$$

$$P_{\nu}^m(z) = \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\pi \Gamma(\nu+1)} \int_0^{\pi} (z + \sqrt{z^2-1} \cos t)^{\nu} \cos mt dt, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Эти формулы позволяют эффективно находить производные по индексу ν от $P_{\nu}^{\mu}(z)$.

Автор благодарит В. М. Александрова и Б. М. Нуллера за внимание к работе.

Поступила 7 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Метод однородных решений в контактных задачах теории упругости для тел конечных размеров. Изв. Северо-Кавказск. научного центра высшей школы. Сер. естеств. наук, 1974, вып. 4.
2. Папкович П. Ф. Два вопроса теории изгиба тонких упругих плит. ПММ, 1941, т. 5, вып. 3.

3. Папкович П. Ф. Труды по строительной механике корабля, т. 3, Л., Судпромгиз, 1962.
 4. Гринберг Г. А. О методе, предложенном П. Ф. Папковичем, для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях. ПММ, 1953, т. 17, вып. 2.
 5. Александров В. М. Об одной контактной задаче для упругого клина. Изв. АН АрмССР. Механика, 1967, т. 20, № 1.
 6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. М., «Наука», 1971.
 7. Копсон Э. Т. Асимптотические разложения. М., «Мир», 1966.
 8. Каган В. Ф. Основания теории определителей. Гос. изд-во Украины, 1922.
 9. Александров В. М., Зеленцов В. Б. Динамические задачи об изгибе прямоугольной пластины со смешанными условиями закрепления по контуру. ПММ, 1979, т. 43, вып. 1.
 10. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1, М., «Наука», 1973.
-