

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ ОБОЛОЧЕК

А. В. БУРЛАКОВ, Г. И. ЛЬВОВ

(Харьков)

Исследование технологических операций изготовления тонкостенных элементов конструкций приводит к различным специальным задачам теории неупругого деформирования оболочек. Методы определения энергосиловых параметров процессов формоизменения оболочек, анализа напряженного состояния материала и устойчивости процессов деформирования рассматриваются в [1-4]. Геометрические свойства процессов формоизменения тонких оболочек исследуются в [5]. Обратные задачи в нелинейной теории оболочек ставились и в связи с иными приложениями [6].

В публикуемой работе рассматривается один класс обратных задач упруго-пластического деформирования тонких оболочек, когда в процессе упруго-пластического деформирования исходная оболочка, срединная поверхность которой  $S_0$ , превращается в оболочку со срединной поверхностью  $S$ . Предполагается, что множество точек поверхности  $S_0$  может быть топологически отображено на множество точек поверхности  $S$ . Требуется определить параметры внешнего воздействия, осуществляющего это формоизменение.

Для однозначного решения этих задач необходимо установить дополнительные соотношения геометрического или силового характера. В данном классе обратных задач в качестве таких условий принимаются условия отсутствия касательных к  $S$  составляющих внешней нагрузки. Их выбор связан с тем, что формоизменение под действием нормального давления является характерной чертой многих технологических процессов изготовления оболочек.

Обратные задачи упруго-пластического формоизменения тонких оболочек рассматриваются при следующих допущениях.

Относительные удлинения и сдвиги являются малыми, и изменением толщины оболочки в процессе деформирования можно пренебречь.

Неравномерность распределения напряжений и деформаций по толщине существенна, вследствие чего используется моментная теория оболочек. Нормальные перемещения могут значительно превышать толщину оболочки, однако квадраты углов поворота нормали к срединной поверхности малы в сравнении с единицей, что соответствует среднему изгибу по классификации [7].

Предполагается, что процесс формоизменения является монотонным и нагружение незначительно отличается от простого, что позволяет использовать деформационную теорию пластичности.

1. Введем для срединной поверхности оболочки криволинейные лагранжевы координаты  $q^1, q^2$ . Положение точки недеформированной поверхности  $S_0$  в прямоугольной фиксированной декартовой системе осей  $Ox_1x_2x_3$  определяется ее радиус-вектором  $r_0 = r_0(q^1, q^2)$  или декартовыми координатами  $x_s^0 = x_s^0(q^1, q^2)$  ( $s=1, 2, 3$ ).

После завершения процесса формоизменения точки срединной поверхности изменяют свое положение в пространстве

$$r(q^1, q^2) = r_0(q^1, q^2) + U(q^1, q^2), \quad x_s(q^1, q^2) = x_s^0(q^1, q^2) + V_s(q^1, q^2) \quad (1.1)$$

Здесь  $U(q^1, q^2)$  — вектор перемещения точек срединной поверхности,  $V_s(q^1, q^2)$  — его проекции на оси декартовой системы координат.

Зададим форму срединной поверхности оболочки в деформированном состоянии неявным уравнением  $f=0$ . Тогда для осуществления такого формоизменения декартовы координаты вектора перемещения долж-

ны удовлетворять соотношению

$$f(x_1^\circ + V_1, x_2^\circ + V_2, x_3^\circ + V_3) = 0 \quad (1.2)$$

Представим вектор перемещения  $U(q^1, q^2)$  в местном базисе поверхности  $S_0$  своими ковариантными или контравариантными компонентами

$$U = u_s r^s + w m = u^s r_s + w m, \quad r_s = \partial r_0 / \partial q^s \quad (s=1, 2) \quad (1.3)$$

Здесь  $r_s$  — координатные векторы, образующие основной базис поверхности,  $r^s$  — векторы взаимного базиса,  $m$  — единичный нормальный вектор. Ковариантные компоненты метрического тензора поверхности  $S_0$  обозначим  $g_{ik} = r_i \cdot r_k$  ( $i, k=1, 2$ ).

Обратные задачи рассматриваемого класса содержат четыре неизвестные функции: нормальное давление и три компонента вектора перемещения. Разрешающая система уравнений для их определения должна включить зависимость (1.2), для получения остальных уравнений необходимо использовать статико-геометрические соотношения теории тонких оболочек среднего изгиба и закон состояния пластического тела.

Ковариантные компоненты тензоров тангенциальной и изгибной деформации срединной поверхности связаны с перемещениями соотношениями [7]:

$$\begin{aligned} 2e_{ik} &= E_{ik} + E_{ki} + \omega_i \omega_k, \quad \kappa_{ik} = -\nabla_i \omega_k - b_i^s E_{ks} \\ E_{ik} &= \nabla_i u_k - w b_{ik}, \quad \omega_i = \nabla_i w + b_i^s u_s \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $\nabla_i$  — знак ковариантной производной в метрике недеформированной поверхности  $S_0$ ;  $b_{ik}, b_i^s$  — ковариантные и смешанные компоненты второй квадратичной формы поверхности  $S_0$ . С учетом гипотез Кирхгофа — Лява компоненты тензора деформаций точки, находящейся на расстоянии  $z$  от срединной поверхности, равны

$$\varepsilon_{ik} = e_{ik} + z \kappa_{ik} \quad (1.5)$$

Уравнения равновесия целесообразно записать в проекциях на деформированные оси местной системы координат, так как внешняя нагрузка — нормальное давление в конце процесса формоизменения — направлена перпендикулярно деформированной срединной поверхности оболочки

$$\nabla_i T^{ik} - b_i^* N^i = 0, \quad \nabla_i M^{ik} - N^k = 0, \quad \nabla_i N^i + b_i^* T^{ik} + P = 0 \quad (1.6)$$

В силу малости деформации дифференциальные операции в метрике поверхности  $S$  и  $S_0$  можно не различать, в то же время изменение коэффициентов второй квадратичной формы  $b_i^* = b_{ik} - \kappa_{ik}$  является существенным в уравнениях (1.6). Для тонких оболочек

$$T^{ik} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{ik} dz, \quad M^{ik} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{ik} z dz \quad (1.7)$$

Основные соотношения деформационной теории пластичности для несжимаемого материала запишем выделив упругую и пластическую составляющие тензора деформаций:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2G} (\sigma_{ik} - g_{ik} \sigma) + \varepsilon_{ik}^p \quad (i, k=1, 2), \quad \varepsilon_{ik}^p = \frac{3\varepsilon_0^p}{2\sigma_0} (\sigma_{ik} - g_{ik} \sigma), \quad 3\sigma = g_{ik} \sigma^{ik} \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_0^p = ({}^2/3 \varepsilon_{ik}^p \varepsilon^{pik})^{1/2}, \quad (i, k=1, 2, 3), \quad \sigma_0 = [{}^3/2 (\sigma_{ik} \sigma^{ik} - 3\sigma^2)]^{1/2}$$

Здесь  $G$  — модуль сдвига,  $\varepsilon_0^p$  — интенсивность пластических деформаций,  $\sigma_0$  — интенсивность напряжений.

Для построения замкнутых систем уравнений необходимо (1.8) разрешить относительно контравариантных компонентов тензора напряжений:

$$\sigma^{ih} = 2G [g^{ij} g^{hs} \varepsilon_{js} + g^{ih} \varepsilon_j^j - (g^{ij} g^{hs} \varepsilon_{js}^p + g^{ih} \varepsilon_j^{pj})] \quad (i, h=1, 2) \quad (1.9)$$

и установить соотношения, связывающие усилия и моменты с параметрами деформации срединной поверхности

$$T^{ih} = 2Gh g^{ij} g^{hs} (\varepsilon_{js} + g_{js} \varepsilon_j^j) - T_0^{ih}, \quad M^{ih} = 1/6 Gh^3 g^{ij} g^{hs} (\varkappa_{js} + g_{js} \varkappa_j^j) - M_0^{ih} \quad (1.10)$$

$$T_0^{ih} = 2G g^{ij} g^{hs} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_{js}^p + g_{js} \varepsilon_j^{pj}) dz, \quad M_0^{ih} = 2G g^{ij} g^{hs} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_{js}^p + g_{js} \varepsilon_j^{pj}) z dz \quad (1.11)$$

Во многих важных в прикладном отношении случаях, таких, как формообразование полых оболочек из листовых заготовок и осесимметричное формоизменение оболочек вращения, срединная поверхность которых является развертывающейся в исходном состоянии, можно с принятой точностью пренебречь слагаемыми, содержащими коэффициенты второй квадратичной формы в первых двух уравнениях системы (1.6) и в выражении для  $\varkappa_{ih}$  [7]. При этих допущениях с помощью (1.4)–(1.6) и (1.10) устанавливаются соотношения, связывающие перемещения и нормальное давление, которые совместно с (1.2) образуют разрешающую систему уравнений обратных задач рассматриваемого класса

$$g^{ij} g^{hs} \nabla_i [\nabla_j u_s + \nabla_s u_j + 2g_{js} \nabla_r u^r - 2w (b_{js} + g_{js} b_r^r) + \nabla_j w \nabla_s w + g_{js} g^{rt} \nabla_r w \nabla_t w] = (Gh)^{-1} \nabla_i T_0^{ih} \quad (1.12)$$

$$P = Gh g^{ij} g^{hs} \{ 1/6 h^2 \nabla_i \nabla_h [\nabla_j \nabla_s w + g_{js} g^{rt} \nabla_r \nabla_t w] - (b_{ik} + \nabla_i \nabla_k w) [\nabla_j u_s + \nabla_s u_j + 2g_{js} \nabla_r u^r - 2w (b_{js} + g_{js} b_r^r) + \nabla_j w \nabla_s w + g_{js} g^{rt} \nabla_r w \nabla_t w] \} + \nabla_i \nabla_k M_0^{ik} + (b_{ik} + \nabla_i \nabla_k w) T_0^{ik} \quad (i, h, s, r, t=1, 2) \quad (1.13)$$

Компоненты вектора перемещения в уравнении (1.2) записаны для фиксированной декартовой системы координат. При использовании этого уравнения в качестве разрешающего вектор перемещения должен быть представлен проекциями на недеформированные оси местной системы координат.

Анализ разрешающей системы уравнений (1.2) и (1.12) позволяет выявить особенности в формулировке граничных условий для рассматриваемого класса обратных задач. Алгебраическое уравнение (1.2) и первые два дифференциальных уравнения (1.12) образуют полную систему уравнений для компонентов вектора перемещения. Порядок этой системы равен четырем, и на каждой контуре оболочки нужно задать по два условия относительно перемещений и (или) их первых производных. Механический смысл этого вывода заключается в том, что краевые воздействия, определяемые высшими производными, не могут быть заданы произвольно, а определяются решением задачи. Следовательно, в общем случае формоизменение оболочки, определяемое уравнением (1.2), не может быть осуществлено только нормальным давлением. Для такого деформирования требуется приложить некоторые моменты и перерезывающие усилия на краях оболочки.

После нахождения перемещений нормальное давление вычисляется непосредственно из третьего уравнения системы (1.12).

2. За редким исключением условие (1.2), обеспечивающее заданное изменение формы оболочки, является нелинейным уравнением относи-

тельно компонентов вектора перемещения. Нелинейность поставленных обратных задач обусловлена также нелинейностью статико-геометрических уравнений (1.4), (1.6) и уравнений состояния деформационной теории пластичности (1.8).

В рамках принятых допущений относительно величин деформаций и углов поворота нормальный компонент вектора перемещения  $w$  может значительно превышать касательные составляющие  $u_i$ . Это позволяет эффективно использовать линеаризацию системы (1.2), (1.12) путем последовательных приближений. В  $n$ -м приближении решается краевая задача для уравнений (1.12), в которых нормальное перемещение — известная функция лагранжевых координат. Эта функция задается на основании (1.12) в явной форме

$$w^n = w(q^1, q^2, u_1^{n-1}, u_2^{n-1}) \quad (2.1)$$

В первом ( $n=1$ ) приближении в соотношении (2.1) касательные компоненты вектора перемещения полагаются равными нулю, в последующих — определяются решением краевой задачи для уравнений (1.12) в предыдущем приближении. Так как уравнения (1.12) в явном виде содержат нелинейные слагаемые только с функцией  $w$ , то этот способ позволяет линеаризовать и нелинейность, обусловленную статико-геометрическими соотношениями (1.4), (1.6). Линеаризация закона состояния (1.8) осуществляется методом дополнительных деформаций [3], итерационный процесс которого естественно совмещается с изложенным алгоритмом.

3. Рассмотрим обратную задачу о деформировании пологой цилиндрической оболочки в параболоид. Срединную поверхность  $S_0$  в исходном состоянии зададим параметрическим уравнением

$$r_0 = \xi i + Rj \sin(\eta/R) + Rk \cos(\eta/R) \quad (3.1)$$

Здесь  $R$  — радиус поверхности  $S_0$ ;  $\xi, \eta$  — лагранжевы координаты ее точек, область определения их — прямоугольник  $\xi \in [-a, a], \eta \in [-b, b]$ . При этой параметризации компоненты метрического тензора поверхности  $S_0$  равны  $g_{ij} = \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  — символ Кронекера), а ковариантные производные совпадают с частными по  $\xi, \eta$ .

Срединная поверхность деформированной оболочки  $S$  задается неявным уравнением

$$Ax_1^2 + Bx_2^2 + x_3 = 0 \quad (3.2)$$

Для такого изменения формы оболочки декартовы координаты вектора перемещения точек срединной поверхности должны удовлетворять уравнению

$$A(\xi + V_1)^2 + B[R \sin \theta + V_2]^2 + R \cos \theta + V_3 = R \quad (\theta = \eta/R) \quad (3.3)$$

Физические компоненты вектора перемещения в локальном базисе поверхности  $S_0$  связаны с его декартовыми координатами соотношениями

$$V_1 = u, \quad V_2 = w \sin \theta + u_2 \cos \theta, \quad V_3 = w \cos \theta - u_2 \sin \theta \quad (3.4)$$

Разрешая (3.3) с помощью (3.4) относительно нормального перемещения, получаем

$$w = \frac{1}{2B \sin \theta} [-p + (p^2 - 4qB \sin^2 \theta)^{1/2}] \quad (|\theta| > 0) \quad (3.5)$$

$$w = -A(\xi + u_1)^2 - Bu_2^2 \quad (\theta = 0)$$

$$p = 2B \sin \theta (R \sin \theta + u_2 \cos \theta) + \cos \theta$$

$$q = A(\xi + u_1)^2 + B(R \sin \theta + u_2 \cos \theta)^2 + R \cos \theta - u_2 \sin \theta - R$$

При использовании (3.5) в первом приближении нормальное перемещение может оказаться комплексной функцией. Это произойдет, если нормаль к поверхности  $S_0$  не пересекает поверхность  $S$ , но столь значительные формоизменения выходят за рамки принятых ограничений.

Уравнения (1.12) для цилиндрической заготовки при параметризации (3.1) имеют вид

$$\begin{aligned} 4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} = & - \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ 2 \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{Gh} \left( \frac{\partial T_0^{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_0^{12}}{\partial \eta} \right) \\ 4 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + 3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} = & - \frac{4}{R} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ 2 \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{Gh} \left( \frac{\partial T_0^{22}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_0^{12}}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

В соответствии с изложенным в п. 2 алгоритмом линеаризации правые части уравнений (3.6) в каждом из приближений являются известными функциями. Линеаризованная система (3.6) является эллиптической. Краевые условия для нее зададим следующим образом:

$$u_1 = u_2 = 0 \quad (\xi = \pm a), \quad T^{22} = T^{12} = 0, \quad (\eta = \pm b) \quad (3.7)$$

После определения вектора перемещения нормальное давление вычисляется по (1.13).

Решение линейной краевой задачи (3.6), (3.7) осуществлялось методом конечных разностей. Ввиду симметрии ее относительно осей  $\xi=0$ ,  $\eta=0$  достаточно получить решение в области  $\xi \in [0, a]$ ,  $\eta \in [0, b]$ . Введем прямоугольную сетку, множество узлов которой обозначим через  $\omega^\sim = \{\xi_i = ih_1, \eta_j = jh_2, h_1 = a/N, h_2 = b/N; i, j = -1, 0, 1, \dots, N\}$ . Точки  $\xi = -h_1$ ,  $\eta = -h_2$  используются для удовлетворения условиям симметрии. Поставим в соответствие непрерывным функциям  $u_1, u_2$  сеточные функции  $(u_1)_{ij} = u_1(\xi_i, \eta_j)$ ,  $(u_2)_{ij} = u_2(\xi_i, \eta_j)$ , определенные на сетке  $\omega^\sim$ .

Построение разностной схемы для краевой задачи (3.6), (3.7) выполняется методом Рунге [9]. С использованием обозначений, аналогичных [9], запишем аппроксимацию уравнений (3.6):

$$\begin{aligned} 4(u_1)_{\xi \sim \xi} + (u_1)_{\eta \sim \eta} + \frac{3}{2} [(u_2)_{\xi \eta} + (u_2)_{\xi \sim \eta \sim}] = F_1(\xi, \eta) \in \omega \\ 4(u_2)_{\eta \sim \eta} + (u_2)_{\xi \sim \xi} + \frac{3}{2} [(u_1)_{\xi \eta} + (u_1)_{\eta \sim \xi \sim}] = F_2(\xi, \eta) \in \omega \end{aligned} \quad (3.8)$$

Аппроксимация статических граничных условий имеет вид

$$\begin{aligned} 2(u_1)_{\xi^0} + 4(u_2)_{\eta \sim} + \frac{h_2}{2} [3(u_1)_{\xi \sim \eta \sim} + (u_2)_{\xi \sim \xi}] = f_1 + \frac{h_2}{2} F_1 \\ (u_1)_{\eta} + (u_2)_{\xi^0} + \frac{h_2}{2} [4(u_1)_{\xi \sim \xi} + 3(u_2)_{\xi \sim \eta \sim}] = f_2 + \frac{h_2}{2} F_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

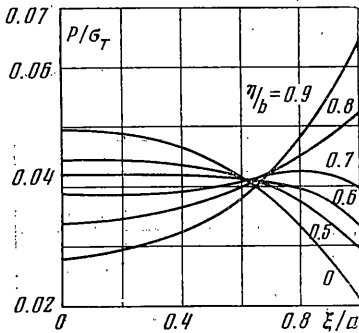
$$(\xi, \eta) \in \omega^\sim, \quad \eta = N, \quad \xi \neq -1, N$$

Здесь  $F_i, f_i$  — проекции правых частей уравнений (3.6) и статических граничных условий на сетку  $\omega^\sim$ .

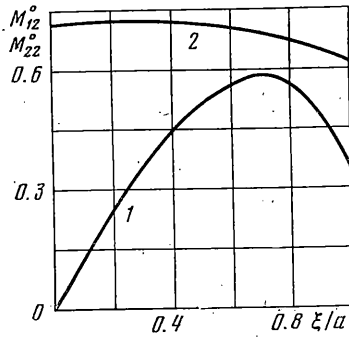
Уравнения (3.8), (3.9) аппроксимируют уравнения (3.6), (3.7) с погрешностью  $O|h_1^2 + h_2^2|$ . Аппроксимация условий симметрии и кинематических граничных условий является точной. Методом энергетических не-

равенств [9] доказываемость разрешимости сеточной задачи (3.8), (3.9) и сходимость ее решения к решению задачи (3.6), (3.7). Решение разностных уравнений выполнялось методом последовательной верхней релаксации [10].

Вычисления проводились на ЭВМ БЭСМ-6 при следующих значениях размеров заготовки и параметров деформированной оболочки:  $R=5$  м,  $h=0.01$  м,  $a=b=1$  м,  $A=B=0.1$  м<sup>-1</sup>. Диаграмма деформирования материала аппроксимировалась кусочно-гладкой функцией  $\sigma_0=3G\varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_T$ ),  $\sigma_0 = \sigma_T(\varepsilon_0/\varepsilon_T)^n$  ( $\varepsilon_0 > \varepsilon_T$ ), где  $G=0.7 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\sigma_T=1.05 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>,  $\varepsilon_T=10^{-5}$ ,  $n=$



Фиг. 1



Фиг. 2

$=0.5$ . Численные результаты получены на сетке с параметрами  $h_1=h_2=0.05$  м,  $N=20$ . Интегралы вида (1.11) вычислялись по квадратурной формуле Гаусса с пятью узлами.

На фиг. 1 представлено распределение нормального давления в области  $\xi \in [0, a]$ ,  $\eta \in [0, b]$ . На фиг. 2 построены эпюры моментов  $M_{12}^0 = [aM_{12} / (Gh^3)] \cdot 10^2$  (кривая 1),  $M_{22}^0 = [aM_{22} / (Gh^3)] \cdot 10$  (кривая 2) на краях оболочки  $\xi \in [0, a]$ ;  $\eta = \pm b$ .

4. Рассмотрим задачи формоизменения оболочек, срединная поверхность  $S_0$  которых в исходном состоянии является поверхностью вращения. Совместим ось  $Oz$  цилиндрической системы координат  $z, r, \theta$  с осью вращения и зададим образующую кривую поверхности  $S_0$  параметрическими уравнениями  $z^0=z^0(q)$ ,  $r^0=r^0(q)$ , в которых  $q$  примем за лагранжеву координату точек меридиана. В деформированном состоянии срединная поверхность  $S$  также является поверхностью вращения. Уравнение ее меридиана задается неявным уравнением  $f(r, z)=0$ . Для реализации такого формоизменения перемещения точек меридиана поверхности  $S_0$  должны удовлетворять уравнению

$$f[z_0+V_1, r_0+V_2]=0 \tag{4.1}$$

где  $V_1, V_2$  — проекции вектора перемещения на оси  $Oz, Or$ .

Найдем решение обратной задачи о деформировании круглой пластины диаметром  $2a$  в сферический сегмент с радиусом срединной поверхности  $R$ . В качестве лагранжевой координаты примем расстояние точек срединной плоскости от центра пластины  $q \in [0, a]$ . При такой параметризации  $g_{11}=1$ ,  $g_{22}=q^2$ ,  $g_{12}=0$ ,  $V_1=w$ ,  $V_2=u$ . Уравнение (4.1) для этой задачи имеет вид

$$w = \sqrt{R^2 - (q+u)^2} - \sqrt{R^2 - a^2} \tag{4.2}$$

Одно из уравнений системы (1.12) в осесимметричных задачах удовлетворяется тождественно, другое представим относительно физических

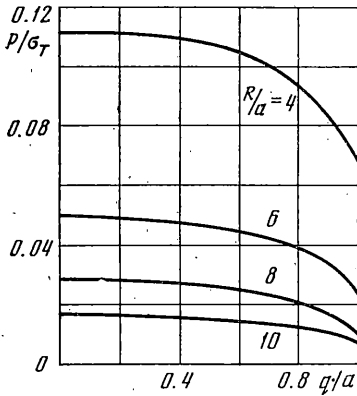
компонентов вектора перемещений

$$\frac{d^2 u}{dq^2} + \frac{1}{q} \frac{du}{dq} - \frac{1}{q^2} u = -\frac{1}{4q} \left( \frac{dw}{dq} \right)^2 - \frac{dw}{dq} \frac{d^2 w}{dq^2} + \frac{1}{4Gh} \left( \frac{1}{q} T_0'^2 - \frac{1}{2} T_0'' - \frac{dT_0''}{dq} \right), \quad q \in (0, a) \quad (4.3)$$

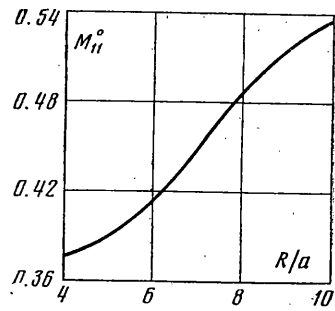
Краевые условия зададим в виде

$$u=0 \text{ при } q=0, q=a \quad (4.4)$$

Решение линеаризованной краевой задачи (4.3), (4.4) на каждом приближении находится методом разностной прогонки. Соответствующая раз-



Фиг. 3



Фиг. 4

ностная краевая задача

$$\left( 1 + \frac{h_1}{2q_n} \right) u_{n+1} - \left( 2 + \frac{h_1^2}{q_n^2} \right) u_n + \left( 1 - \frac{h}{2q_n} \right) u_{n-1} = h_1^2 \varphi_n$$

$$u_0 = 0, u_N = 0 \quad (n=1, 2, \dots, N-1)$$

является хорошо обусловленной. Вычисления проведены для размеров  $a=0.5$  м,  $h=0.01$  м,  $N=50$ ,  $h_1=0.01$  м. Механические характеристики материала для осесимметричных задач приняты те же, что в п. 3.

На фиг. 3 показано распределение нормального давления для различных величин  $R/a$ , величина краевого момента приведена на фиг. 4 ( $M_{11}^0 = [aM_{11}/(Gh^3)] \cdot 10^2$ ).

В качестве второго примера осесимметричной обратной задачи рассмотрим упругопластическое деформирование цилиндрической оболочки в коническую. Меридиан срединной поверхности заготовки зададим уравнениями  $z_0=q$ ,  $r_0=R$ ,  $q \in [0, l]$ . Координаты точек меридиана деформированной срединной поверхности удовлетворяют соотношению  $r=\gamma z+R$  ( $\gamma$  — угол конусности). Кинематическое условие осуществимости такого формоизменения имеет вид  $w=\gamma(q+u)$ .

Уравнение равновесия (1.13) для цилиндрической заготовки записываются следующим образом:

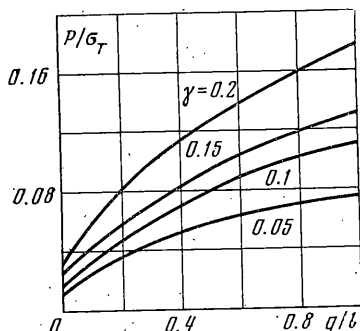
$$\frac{d^2 u}{dq^2} + \frac{dw}{dq} \left( \frac{d^2 w}{dq^2} + \frac{1}{2R} \right) + \frac{1}{4Gh} \frac{dT_0''}{dq} = 0, \quad q \in (0, l) \quad (4.5)$$

Уравнения (4.5) дополняются краевыми условиями

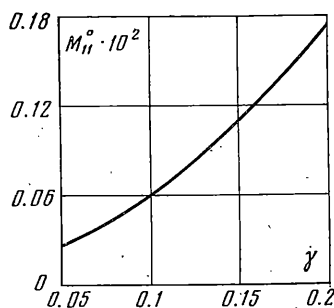
$$u=0 \text{ при } q=0, T''=0 \text{ при } q=l \quad (4.6)$$

Линеаризованная краевая задача (4.5), (4.6) решалась методом разностной прогонки. Параметры заготовки  $R=0.03$  м,  $h=0.001$  м, результаты получены на сетке с 50 узлами. На фиг. 5, 6 приведено распределение нормального давления и краевых моментов для различных значений углов конусности.

В приведенных конкретных примерах максимальные линейные деформации не превышали  $2 \cdot 10^{-2}$ , а деформации сдвига имели порядок  $10^{-3}$ . Углы поворота нормали к срединной поверхности были наибольшими в



Фиг. 5



Фиг. 6

задаче о формообразовании конической оболочки, где они равны углу конусности ( $0.05 \leq \gamma \leq 0.2$ ).

Исследование сходимости процессов последовательных приближений численными экспериментами показало, что процесс линеаризации геометрического соотношения (1.2) по формуле (2.1) практически сходится за 3–4 итерации. Это установлено при расчетах с нулевыми дополнительными деформациями. Скорость сходимости итерационного процесса метода дополнительных деформаций меньше. Так, для достижения точности, соответствующей точности аппроксимации краевых задач разностными, требовалось 9–14 итераций.

Поступила 31 X 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Е. А. Основы теории листовой штамповки. М., «Машиностроение», 1968.
2. Григорьев А. С. О теории и задачах равновесия оболочек при больших деформациях. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1.
3. Малинин Н. Н. Волочение труб через конические матрицы. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 5.
4. Koshur V. D., Nemirovsky Yu. V. On the theory of technological processes of forming of thin shells. Lect. Sympos. Industr. spatial and shell structures. Kielce, Poland, 1973, p. 245–268.
5. Кошур В. Д., Немировский Ю. В. О геометрических свойствах процессов формоизменения тонких оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 6.
6. Мушгари Х. М. Об обратных краевых задачах нелинейной теории пологих оболочек. Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 1.
7. Мушгари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Татаркнигоиздат, 1957.
8. Биргер И. А. Методы упругих решений в теории пластического течения. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 2.
9. Самарский А. А., Андреев В. В. Разностные методы для эллиптических уравнений. М., «Наука», 1976.
10. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1963.