МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1980

УДК 539.376

О ПРИНЦИПЕ СООТВЕТСТВИЯ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Н. Х. АРУТЮНЯН

(Москва)

В [1] было показано, что при определенных видах внешних воздействий можно получить представления, позволяющие выразить решения граничных задач теории ползучести стареющих тел через решения соответствующей упругой задачи, если деформация этих тел сопровождается большими углами поворота при малых удлинениях и сдвигах.

В публикуемой работе доказывается, что при определенных ограничениях, налагаемых на структуру уравнения состояния, подобное представление можно получить для некоторого класса задач теории ползучести при конечных деформациях, когда большими являются не только углы поворота, но и удлинения и сдвиги.

1. Рассмотрим конечные деформации некоторого твердого деформированного тела во времени t. Полагаем, что объемные силы отсутствуют, а процесс деформаций достаточно медленный, что позволяет пренебречь силами инерции. Тогда уравнения квазистатического равновесия для такого тела можно представить в виде [2]:

$$\frac{\partial}{\partial q^i}\sqrt{G}\sigma^{ij}(q^\alpha,t)+\left\{ {j \atop r,\ i} \right\}\sqrt{G}\sigma^{ir}(q^\alpha,t)=0 \tag{1.1}$$

где $\left\{ {j \atop r,\ i} \right\}$ — символ Кристоффеля второго рода в актуальном состоянии, q^α — криволинейные лагранжевы координаты в пространстве, G — определитель матрицы ковариантных компонентов метрического тензора актуального состояния, $\sigma^{ij}(q^\alpha,t)=\sigma^{ij}(q^1,q^2,q^3,t)$ — компоненты тензора напряжений Коши в базисе актуального состояния.

Пусть далее на части S_u поверхности S, ограничивающей данное тело, заданы перемещения

$$u_k(q^\alpha,t)=u_k\check{}(q^\alpha) \tag{1.2}$$

а на остальной части ($S_\sigma=S-S_u$) отсутствуют поверхностные нагрузки, так что

$$\sigma^{ij}(q^\alpha,t)n_i=0 \tag{1.3}$$

где n_i — проекция вектора внешней нормали к поверхности тела в актуальном состоянии, а $u_k(q^\alpha,t)$ — компоненты вектора перемещений в базисе начального состояния.

Деформированное состояние рассматриваемого тела будет определяться тензором конечной деформации Коши — Грина

$$\varepsilon_{rk}(q^\alpha,t)={}^1/_2[\nabla_r u_k(q^\alpha,t)+\nabla_k u_r(q^\alpha,t)+g^{mn}\nabla_r u_m(q^\alpha,t)\nabla_k u_n(q^\alpha,t)] \tag{1.4}$$

Здесь ∇_k — символ ковариантной производной в базисе начального состояния, g^{mn} — компоненты метрического тензора в базисе начального состояния.

Чтобы получить полную систему уравнений для рассматриваемой здесь краевой задачи, необходимо задать еще закон состояния, определяющий физическую модель данного тела.

2. Рассмотрим модель стареющего упругоползучего тела, уравнение состояния которого удовлетворяет принципу независимости от системы отсчета [3] и имеет вид

$$\sigma^{ij}(q^\alpha, t) = LF^{ij}[\varepsilon_{rk}(q^\alpha, \tau), \theta(q^\alpha, \tau)] \tag{2.1}$$

$$Ly(t) = y(t) - \int_{\tau_0}^{t} R(t, \tau) y(\tau) d\tau$$

Здесь $R(t, \tau)$ — ядро релаксации, $\theta(q^\alpha, t)$ — функция, характеризующая вынужденные деформации в рассматриваемом теле (усадка, температурные воздействия и т. д.), $F^{ij}[\varepsilon_{rk}, \theta]$ — тензорная функция, которая будет определена ниже, τ_0 — момент приложения воздействия.

Заметим, что уравнение состояния (2.1) предусматривает упругомгновенную реакцию, которая находится из соотношения (2.1) при $t=\tau_0$. Действительно, пусть $\sigma^{0ij}(q^\alpha)$, $\varepsilon_{rk}^{\circ}(q^\alpha)$ и $u_k^{\circ}(q^\alpha)$ — начальные значения компонентов тензоров напряжения и деформаций, а также вектора перемещений в деформированном теле при $t=\tau_0$. Если данное тело в начальный момент (при $t=\tau_0$) является анизотропным упругим телом, напряжения в котором однозначно определяются текущей его деформацией, то для такого тела закон состояния будет иметь вид [2]:

$$\sigma^{0ij}(q^\alpha) = F^{ij}[\varepsilon_{rk}^{\circ}(q^\alpha), \theta^{\circ}(q^\alpha)] \tag{2.2}$$

Дальнейшая конкретизация закона состояния (2.1) и (2.2) требует выбора определенного вида тензорной функции $F^{ij}[\varepsilon_{rk}(q^\alpha), \theta^{\circ}(q^\alpha)]$. В частном случае малых деформаций из закона состояния (2.1) получаются известные соотношения нелинейной теории ползучести наследственного типа для стареющих тел [4, 5].

Пусть напряженно-деформированное состояние в упругоползучем теле, свойства которого описываются уравнением состояния (2.1), вызвано только постоянной во времени вынужденной деформацией, определяемой функцией $\theta^{\circ}(q^\alpha)$, заданной во всей занимаемой телом области Ω, и перемещениями $u_k^{\vee}(q^\alpha)$ на части его поверхности S_u, которые сообщаются мгновенно и дальше поддерживаются постоянными, т. е. напряженно-деформированное состояние тела вызвано скачком вынужденной деформации и граничных перемещений. Объемные силы, как и поверхностные, на остальной части тела S_σ полагаем равными нулю. Тогда прямой подстановкой можно убедиться, что решение краевой задачи для упругоползучего тела с уравнением состояния (2.1) $u_k(q^\alpha, t)$, $\varepsilon_{ij}(q^\alpha, t)$, $\sigma^{ij}(q^\alpha, t)$, удовлетворяющее уравнению равновесия (1.1), соотношению Коши — Грина (1.4), граничным условиям (1.2) и (1.3), выражается через решение соответствующей упругой задачи с определяющим соотношением (2.2) так:

$$u_k(q^\alpha, t) = u_k^{\circ}(q^\alpha), \qquad \varepsilon_{ij}(q^\alpha, t) = \varepsilon_{ij}^{\circ}(q^\alpha) \tag{2.3}$$

$$\sigma^{ij}(q^\alpha, t) = H(t)\sigma^{0ij}(q^\alpha), \qquad H(t) = 1 - \int_{\tau_0}^{t} R(t, \tau) d\tau$$

Таким образом, справедлива *теорема*.

Если в стареющем упругоползучем теле (2.1) напряженное состояние вызвано только вынужденной деформацией $\theta^{\circ}(q^\alpha)$ и граничным перемещением $u_k^{\vee}(q^\alpha)$, которые изменяются в момент $t=\tau_0$ скачком и затем поддерживаются постоянными, то перемещения, деформации и напряжения во всем объеме этого тела изменяются также скачком, причем впоследствии при $t>\tau_0$ перемещения и деформации в теле остаются постоянными и равными их значениям $u_k^\circ(q^\alpha)$, $\varepsilon_{ij}^\circ(q^\alpha)$ в начальный момент времени $t=\tau_0$, а напряжение $\sigma^{ij}(q^\alpha, t)$ релаксирует по закону (2.3).

В этом заключается принцип соответствия в теории ползучести при конечных деформациях, когда свойства этих тел описываются уравнениями состояния (2.1) и (2.2). Сформулированный принцип для линейного случая был предложен в [6].

Решающим условием для выполнения принципа соответствия в приведенной выше формулировке является форма уравнения состояния (2.1). Однако можно показать, что принцип соответствия сохраняет свою силу и при некоторых других видах уравнения состояния, которые будут рассмотрены ниже.

3. Пусть упругоползучее тело изготовлено из материала типа Колемана — Нолла [7]. Одна из форм уравнения состояния для таких тел, удовлетворяющего требованию независимости от системы отсчета, имеет вид [1]

$$\sigma^{ij}(t)=F^{ij}(\varepsilon_{pq}(t))+\int_0^\infty h(s)K_{ijer}(\varepsilon_{pq}(t), s)[\varepsilon_{re}(t-s)-\varepsilon_{re}(t)]ds \tag{3.1}$$

где F^{ij} — некоторая тензорная функция, $h(s)$ — функция влияния ($s=t-\tau$), K_{ijer} — тензор четвертого ранга.

Полагая здесь

$$K_{ijer}(\varepsilon_{pq}(t), s)=\overset{*}{K}_{ijer}(\varepsilon_{pq}(t)),\quad F^{ij}(\varepsilon_{pq}(t))=\overset{*}{K}_{ijer}(\varepsilon_{pq}(t))\,\varepsilon_{re}(t) \tag{3.2}$$

получаем уравнение состояния в виде

$$\begin{gathered}\sigma^{ij}(t)=\overset{*}{K}_{ijer}(\varepsilon_{pq}(t))L^*\varepsilon_{re}(t)\\ L^*y(t)=\left(1-\int_0^\infty h(s)ds\right)+\int_{-\infty}^t h(t-\tau)y(\tau)d\tau\end{gathered} \tag{3.3}$$

Эта форма уравнения состояния допускает естественное обобщение на случай стареющих тел

$$\begin{gathered}\sigma^{ij}(t)=\overset{*}{K}_{ijer}(\varepsilon_{pq}(t))L^*\varepsilon_{re}(t)\\ L^*y(t)=E(t)\left[y(t)-\int_{-\infty}^t R(t,\tau)y(\tau)d\tau\right]\end{gathered} \tag{3.4}$$

где $E(t)$ — модуль мгновенной деформации.

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости принципа соответствия (2.3) для краевой задачи (1.1)—(1.4) упругоползучего тела, изготовленного из материалов с определяющими соотношениями (3.3) или (3.4)

При этом в случае (3.3)

$$H(t)=1-\int_t^\infty h(s)ds \tag{3.5}$$

[1] Для простоты записи здесь и в дальнейшем аргумент q^α опущен.

а уравнение состояния для соответствующего анизотропного упругого тела будет

$$\sigma^{\circ ij}=F^{ij}[\varepsilon_{pq}{}^{\circ}] \tag{3.6}$$

Соответственно в случае (3.4) имеем

$$H(t)=\frac{E(t)}{E(0)}\left(1-\int_0^t R(t,\tau)\,d\tau\right),\qquad \sigma^{\circ ij}=K^{*}_{ijer}(\varepsilon_{pq}{}^{\circ})E(0)\,\varepsilon_{re}{}^{\circ} \tag{3.7}$$

Рассмотрим деформированное состояние для тел из материала Колемана — Нолла при больших поворотах и малых удлинениях и сдвигах. Полагаем, что тензоры $F^{ij}(\varepsilon_{pq})$ и $K_{ijer}(\varepsilon_{pq}, s)$ дифференцируемы при $\varepsilon_{pq}=0$. Тогда определяющее соотношение (3.1) в этом случае геометрической нелинейности примет вид [3]:

$$\sigma^{ij}(t)=L_{ijer}\varepsilon_{re}(t)+M_{ijer}\varepsilon_{re}(t)+\int_0^\infty \dot{M}_{ijer}(s)\,\varepsilon_{re}(t-s)\,ds \tag{3.8}$$

$$L_{ijer}=\left.\frac{\partial F^{ij}(\varepsilon_{pq})}{\partial\varepsilon_{er}}\right|_{\varepsilon_{pq}=0},\qquad \dot{M}_{ijer}(s)=h(s)K_{ijer}(0,s)$$

$$M_{ijer}=-\int_0^\infty \dot{M}_{ijer}(s)\,ds=M_{ijer}(0)-M_{ijer}(\infty)$$

Далее полагаем

$$\dot{M}_{ijer}(s)=\dot{T}(s)L_{ijer} \tag{3.9}$$

где $T(s)$ — функция от $s=t-\tau$, а точкой обозначается дифференцирование по s. Из соотношений (3.8) и (3.9) следует справедливость принципа соответствия (2.3) для краевой задачи (1.1)—(1.4) и в таком случае геометрической нелинейности. При этом

$$H(t)=1+T(t)-T(\infty) \tag{3.10}$$

а определяющее соотношение для соответствующего анизотропного упругого тела будет $\sigma^{\circ ij}=L_{ijer}\varepsilon_{re}{}^{\circ}$.

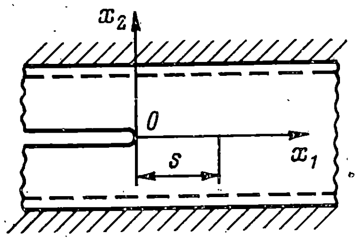
Аналогичные соотношения для изотропных материалов получены в [1].

Следует отметить, что при различных частных видах деформаций (например, в случае сложного сдвига, кручения и т. п.) для того чтобы принцип соответствия в форме (2.3) имел место, ограничения, налагаемые на приведенные выше уравнения состояния, могут быть ослаблены. Так, для тел из материалов типа Колемана — Нолла для существования принципа соответствия в форме (3.5) при сложном сдвиге необходимо наложить ограничения вида (3.2) только на те компоненты тензора K_{ijer}, для которых индексы l и r принимают значения 3 и 1.

Принцип соответствия в форме (2.3) имеет место и для непрерывных или кусочно-непрерывных неоднородных тел, когда реологические операторы в различных точках или областях этих тел одинаковы.

4. В качестве примера рассмотрим полосу, изготовленную из линейного или нелинейного упругоползучего материала, свойства которого описываются уравнениями состояния (2.1), (3.3), (3.4) или (3.8). Полоса может иметь переменную толщину.

Пусть в момент времени $t=\tau_0$ она изгибается в эллиптическое кольцо и склеивается или сваривается торцами в стык. Одновременно в момент склейки или сварки ($t=\tau_0$) она подвергается воздействию температуры $T=T(x, y, z)$. Тогда при $t=\tau_0$ полоска деформируется так, что смещения, деформации и напряжения в ней приобретают значения $u_i^\circ(x, y, z)$, $\varepsilon_{ij}^\circ(x, y, z)$ и $\sigma^{\circ ij}(x, y, z)$.



В соответствии с теоремой п. 2 при $t>\tau_0$ в изогнутом кольце, внешняя поверхность которого свободна от усилий, произойдет лишь релаксация напряжений по закону (2.3), (3.5), (3.7) или (3.10), а форма этого кольца остается такой же, как и в начальный момент $t=\tau_0$, так как деформации $\varepsilon_{ij}(x, y, z, t)$ и $u_i(x, y, z, t)$ останутся неизменными и равными соответственно $\varepsilon_{ij}^\circ(x, y, t)$ и $u_i^\circ(x, y, z)$.

В качестве другого примера рассмотрим полупространство из материала, свойства которого описываются уравнением состояния (2.1), (3.3), (3.4) или (3.8).

Пусть в момент времени $t=\tau_0$ жесткий штамп произвольной формы вдавливается в это полупространство на конечную глубину w и далее удерживается в этом положении. Тогда при $t=\tau_0$ рассматриваемое полупространство будет деформироваться так, что образуется область контакта Ω, в которой возникает контактное давление $p^\circ(x)$, а смещения и деформации примут значения $u_i^\circ(x, y)$ и $\varepsilon_{ij}^\circ(x, y)$.

Из теоремы п. 2 следует, что при $t>\tau_0$ под штампом произойдет лишь релаксация контактного давления по закону $p(x, t)=p^\circ(x)H(t)$, где $H(t)$ определяется соотношениями (2.3), (3.5), (3.7) или (3.10), а форма полупространства остается неизменной, т. е. такой же, как при $t=\tau_0$, так как $\varepsilon_{ij}(x, y, t)$ и $u_i(x, y, t)$ будут равны их начальным значениям $\varepsilon_{ij}^\circ(x, y)$ и $u_i^\circ(x, y)$. Подчеркнем, что при этом деформации и углы поворота не предполагались, как обычно в теории контактных задач, малыми.

Рассмотрим еще пример о приложении принципа соответствия к вязкоупругим телам с трещинами. Если берега неподвижной трещины свободны от воздействия внешних усилий, а на внешней границе телу сообщаются при $t=\tau_0$ смещения $u_k^\vee(q^\alpha)$, поддерживаемые при $t>\tau_0$ постоянными, то для решения задач такого рода можно воспользоваться принципом соответствия и формулами (2.3) или (3.5), (3.7), (3.10).

Задачи такого рода являются обобщением задачи, рассмотренной Райсом [8], на случай стареющих вязкоупругих тел с уравнениями состояний (2.1), (3.3), (3.4) или (3.8) с учетом больших деформаций. Таким образом получаем, что раскрытие трещины в стареющем вязкоупругом теле при этом виде нагружения не изменяется во времени при $t>\tau_0$, несмотря на то, что материал тела является вязкоупругим и геометрически нелинейным. Рассмотрим это положение на следующем примере [8].

Стороны бесконечно длинной полосы из вязкоупругого материала с продольной трещиной получают постоянное вертикальное смещение $u_2^\vee=\text{const}$, $u_1^\vee=0$ (фигура). Если материал полосы в момент приложения воздействия $t=\tau_0$ ведет себя как упругий, то тогда, согласно [8], поля упругих напряжений и перемещений вблизи кончика трещины при плоском напряженном состоянии в случае малых деформаций определяются формулами

$$\sigma_{22}^\circ=\sigma_{11}^\circ=\frac{K_1}{\sqrt{2\pi s}},\qquad u_1^\circ=K_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\nu}{E}\sqrt{s} \tag{4.1}$$
$$K=E\varepsilon_{22}^\circ\sqrt{h}/\sqrt{2(1-\nu^2)}$$

где K_1 — коэффициент интенсивности напряжений, E — модуль мгновенной деформации материала при $t=\tau_0$, h — толщина полосы, ν — коэффициент Пуассона, $\varepsilon_{22}{}^0$ — относительное удлинение волокон параллельно оси ox_2 при $x=\infty$, s — расстояние от кончика трещины, измеряемое вдоль линии, на которой расположена трещина.

Пользуясь принципом соответствия, можно определить поле напряжения и перемещения в вязкоупругой полосе с продольной трещиной при $t>\tau_0$ с уравнением состояния вязкоупругого материала (2.1), (3.3), (3.4) или (3.8).

Согласно этому принципу и теореме п. 2 имеем, что при $t>\tau_0$ в окрестности кончика трещины происходит лишь релаксация напряжения по закону $\sigma_{22}(t)=\sigma_{22}{}^0H(t)$, где $H(t)$ определяется соотношениями (2.3), (3.5), (3.7) или (3.10), а $\sigma_{22}{}^0$ — формулой (5.1). Раскрытие трещины не изменится во времени $t>\tau_0$ и останется таким же, как в начальный момент $t=\tau_0$, поскольку $u_1(x_1, x_2, t)$ и $u_2(x_1, x_2, t)$ будут равны их начальным значениям $u_1{}^0(x_1, x_2)$ и $u_2{}^0(x_1, x_2)$, которые не зависят от реологических свойств материала.

Изложенное выше справедливо и для случая больших деформаций.

Поступила 4 II 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Зевин А. А.* О принципе соответствия в нелинейной теории ползучести стареющих тел. Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
3. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., «Мир», 1975.
4. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Наука», 1977.
5. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Мысль», 1970.
6. *Арутюнян Н. Х.* Напряжения и деформации в бетонных массивах с учетом ползучести бетона. Докл. АН АрмССР, 1947, т. 7, № 5.
7. *B. Coleman, W. Noll.* Foundations of mechanics. Rev. Mod. Phys., 1961, vol. 33, No. 2.
8. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения. Разрушение, т. 2. М., «Мир», 1975.