

## ЗАДАЧА КОНТАКТНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ ДЛЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, И. И. КУДИН

(Москва)

Предлагается метод решения плоской изотермической упругогидродинамической задачи о тяжело нагруженном контакте шероховатых или гладких тел, разделенных тонким слоем несжимаемой неньютоновской жидкости. Тяжело нагруженным будем называть контакт, в котором при наличии масляной пленки давление во всей области контакта, за исключением малых зон входа и выхода, близко к герцевскому. В зонах входа и выхода, расположенных вблизи концов области контакта, характер распределения давления и его величина определяются совокупным влиянием взаимодействия микронеровностей, упругостью тел в целом, а также вязким течением смазки. Ниже будет показано, что толщина слоя смазки формируется в зоне входа. В силу малости зон входа и выхода и резкого изменения давления в них численное исследование поставленной задачи связано со значительными трудностями, которые возрастают при режимах недостаточной смазки и масляного голодания. Следует также заметить, что задача может быть сведена к нелинейному интегродифференциальному уравнению, в случае тяжелого нагружения близкому по свойствам к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Поэтому решение задачи слабо устойчиво по отношению к малым возмущениям исходных данных, что создает дополнительные трудности вычислительного характера.

Предлагаемый метод основан на использовании регулярных и сингулярных асимптотических разложений [1, 2], позволяющих для жидкостей со сложной реологией с единых позиций детально изучить характер решения в зонах входа и выхода. Трудности, связанные со слабой устойчивостью решения задачи по отношению к малым возмущениям, устраняются использованием уравнений задачи в двух видах: исходном и точно разрешенном относительно функции давления  $p$ , входящей в интегральное соотношение для функции зазора  $h$  между контактирующими телами. Кроме того, следует отметить, что метод регулярных возмущений позволяет в ряде случаев значительно упростить уравнения исходной задачи.

Изучаются режимы недостаточной и обильной смазки, при которых в зонах входа и выхода возможны различные отношения характерных величин напряжений трения качения и скольжения. Это отношение может быть значительно больше, порядка или значительно меньше единицы. Для указанных режимов получены уравнения, определяющие главные члены асимптотик давления и зазора в зонах входа и выхода, а вне этих зон получено приближенное аналитическое решение. В каждом из упомянутых случаев для толщины слоя смазки и силы трения в контакте получены новые асимптотические формулы.

Результаты могут быть использованы при обработке экспериментальных данных для оценки применимости той или иной реологической модели смазки в реально встречающихся упругогидродинамических задачах о тяжело нагруженном контакте.

1. Положим, что реологическое уравнение, связывающее касательные напряжения  $\tau$  с градиентом скорости  $\partial u / \partial z$ , имеет вид [3, 4]:

$$\tau = \mu \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \alpha > 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $\mu = \mu(p)$  — мера консистенции жидкости, представляющая собой неубывающую функцию давления  $p(x)$ ,  $\alpha$  — реологическая постоянная (жидкости с  $\alpha > 1$  называются дилатантными, с  $\alpha < 1$  — псевдопластическими, а с  $\alpha = 1$  — ньютоновскими).

Сформулируем основные допущения, принятые при выводе уравнений задачи. Локальную деформацию микронеровностей будем считать степенной функцией давления  $p$  [5]; меру консистенции смазки — функцией только давления. Кроме того, предположим, что толщина слоя смазки значительно меньше радиусов цилиндров, а также что движение жидкости медленное и инерционными силами можно пренебречь.

При указанных допущениях [6] поставленная задача сводится к системе нелинейных интегродифференциальных уравнений, которые могут быть записаны в следующей безразмерной форме:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\mu^{1/\alpha}} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z \left| f + H_0 t \frac{dp}{dx} \right|^{\alpha'} \left( f + H_0 t \frac{dp}{dx} \right) dt + \left( 1 - \frac{sl}{2} \right) \frac{V_\alpha h}{12H_0} \right\} = 0 \quad (1.2)$$

$$p(a) = p(c) = \frac{dp}{dx}(c) = 0, \quad \int_a^c p(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (1.3)$$

$$H_0(h-1) = \lambda p^\gamma + x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^c p(t) \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt, \quad 0 < \gamma < 1 \quad (1.4)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left| f + H_0 t \frac{dp}{dx} \right|^{\alpha'} \left( f + H_0 t \frac{dp}{dx} \right) dt = \frac{slV_\alpha \mu^{1/\alpha}}{12H_0} \quad (1.5)$$

$$H_0 = \frac{h_e R'}{b_H^2}, \quad V_\alpha = V \left( \frac{\mu_0 E'}{2p_H^2} \right)^{\alpha'}, \quad V = \frac{3(u_1 + u_2) \mu_0 E'^3}{4R' p_H^4}$$

$$sl = 2 \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}, \quad \lambda = \frac{kR' p_H^\gamma}{b_H^2}, \quad \alpha' = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

где  $x$  — координата в направлении качения — отнесена к полуширине сухого контакта  $b_H$ ; координата в направлении поперек слоя жидкости  $z$  и зазор между телами  $h(x)$  отнесены к  $h_e$  — толщине слоя при  $x=c$ ; давление  $p$  отнесено к максимальному герцевскому давлению  $p_H$ ; мера консистенции  $\mu$  отнесена к  $\mu_0 = \mu(0)$ ; касательное напряжение скольжения  $f$  отнесено к  $2P/(\pi R')$ . Здесь  $P$  — сжимающая сила;  $R'$  — приведенный радиус тел;  $E'$  — приведенный модуль упругости материалов тел;  $u_1, u_2$  — линейные скорости;  $k$  и  $\gamma$  — постоянные, характеризующие степень деформируемости микронеровностей.

При заданных постоянных  $a, \alpha, \lambda, \gamma, sl$  и  $V_\alpha$  из (1.2)–(1.5) определяются функции  $p(x), h(x), f(x)$  и постоянные  $H_0$  и  $c$ .

После решения уравнений (1.2)–(1.5) силу трения скольжения  $F_s$  и силу трения качения  $F_R$  можно вычислить по формулам

$$F_s = \frac{2}{\pi} \frac{b_H}{R'} P \int_a^c f(x) dx, \quad F_R = \frac{1}{\pi} \frac{b_H}{R'} P H_0 \int_a^c h(x) \frac{dp}{dx} dx \quad (1.6)$$

2. Рассмотрим тяжело нагруженный упругогидродинамический контакт, при котором в уравнениях (1.2)–(1.5) имеется малый параметр  $\omega$ , зависящий от исходных параметров задачи. В силу того что  $\omega$  может определяться различными физическими процессами в смазке, не представляется возможным дать его однозначное определение. Однако в ряде случаев

можно указать его физический смысл. Так, например, параметр  $\omega$  может быть связан с высокой скоростью роста вязкости жидкости с увеличением давления, или же с большими нагрузками на контакт, малыми линейными скоростями движения и т. д. Ниже даны конкретные примеры определения параметра  $\omega$ .

При  $\omega \ll 1$  смазка и шероховатость поверхностей оказывают влияние на давление и зазор лишь вблизи концов области контакта и практически не влияют на эти характеристики в средней части области контакта. Поэтому будем считать, что контакт является тяжело нагруженным, если при  $\omega \ll 1$  обеспечивается выполнение неравенства

$$H_0(h-1) - \lambda p^\gamma \ll 1 \text{ при } x-a \gg \varepsilon_q, c-x \gg \varepsilon_g \quad (2.1)$$

Здесь  $\varepsilon_q = \varepsilon_q(\omega) \ll 1$  и  $\varepsilon_g = \varepsilon_g(\omega) \ll 1$  — характерные размеры погранслоев (зона входа и выхода из области контакта) в окрестностях точек  $x=a$  и  $x=c$ .

Из уравнений (1.2), (1.4) и неравенства (2.1) при  $\omega \ll 1$  следует, что во внешней области ( $x-a \gg \varepsilon_q$  и  $c-x \gg \varepsilon_g$ ) в главном давлении имеет вид [2, 7]:

$$p_0(x) = [(x-a)(c-x)]^{1/2} + \frac{1+2ac+(c-a)^2/4-(a+c)x}{2[(x-a)(c-x)]^{1/2}} \quad (2.2)$$

совпадающий с давлением под подошвой параболического штампа с острыми кромками в точках  $x=a$  и  $x=c$ .

Предположим, что постоянные  $a$ ,  $V_\alpha$ ,  $sl$  и  $\lambda$  — произвольные функции малого параметра  $\omega$ , удовлетворяющие ограничениям  $a+1 \ll 1$ ,  $V_\alpha \ll 1\sqrt{V_\alpha} \sim 1$ ,  $sl \ll 1\sqrt{sl} \sim 1$ ,  $\lambda \ll 1$  при  $\omega \ll 1$ . Примем, кроме того, что

$$a = -1 + \alpha_1 \varepsilon_q (\alpha_1 \sim 1), \quad \lambda = \lambda_0 \varepsilon_q^{(s-\gamma)/2} (\lambda_0 \sim 1), \quad \omega \ll 1 \quad (2.3)$$

а также введем в зонах входа и выхода локальные переменные  $r = (x-a)/\varepsilon_q$  и  $s = (x-c)/\varepsilon_g$ .

Заметим, что из (2.1)–(2.3) и неравенства  $0 < \gamma < 1$  следует, что во внешней области  $H_0(h-1) \ll 1$  при  $\omega \ll 1$ .

Понятия режимов недостаточной и обильной смазки связаны с количеством смазочного материала, принимающим участие в контакте, и легко определяются через характеристики геометрии контакта. Режимом недостаточной смазки будем называть условия, при которых  $h(x) - 1 \ll 1$  при  $x \in [a, c]$ ,  $\omega \ll 1$ ; а режимом обильной смазки — соответственно условия, при которых в зонах входа и выхода  $h(x) - 1 \sim 1$  при  $\omega \ll 1$ .

Поставленная выше задача одновременно изучается для гладких ( $\lambda_0 = 0$ ) и шероховатых тел ( $\lambda_0 \neq 0$ ).

Введем функцию  $v(x)$ , характеризующую отношение напряжения трения качения ( $H_0 h dp/dx$ ) к напряжению трения скольжения ( $f$ ), по формуле

$$v = {}^1/2 H_0 h (dp/dx) / f \quad (2.4)$$

Очевидно, что в зонах входа и выхода из области контакта возможны три различных случая:  $v \ll 1$ ,  $v \sim 1$  и  $v \gg 1$ . Исследуем каждый случай, учитывая идеи работы [2].

2.1. Рассмотрим условия смазывания, при которых в зонах входа и выхода  $v \ll 1$ . Подставим  $H_0 dp/dx$  из (2.4) в уравнение (1.5). При  $v \ll 1$  решение уравнения (1.5) для  $f$  следует искать в виде ряда по степеням  $v$ . В результате указанных преобразований в зонах входа и выхода получим

$$f = \mu \left( \frac{V_\alpha}{12 H_0 h} \right)^\alpha |sl|^{\alpha-1} sl + O(v^2) \quad (2.5)$$

Используя выражение (2.5) для  $f$  и неравенство  $v \ll 1$ , уравнение (1.2) в главном приведем к виду

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{H_0^2 h^3}{\alpha V_\alpha \mu} \left( \frac{V_\alpha |sl|}{12H_0 h} \right)^{1-\alpha} \frac{dp}{dx} \right\} = \frac{dh}{dx} \quad (2.6)$$

Наряду с уравнениями (1.3), (1.4) и (2.6) будем рассматривать, следуя [7], систему (1.4), (2.7) и (2.8), полученную обращением интегрального оператора в (1.4):

$$p(x) = \sqrt{(x-a)(c-x)} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_a^c \frac{dM(p, h)}{dt} \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(c-t)(t-x)}} \right\} \quad (2.7)$$

$$M(p, h) = \frac{H_0^3 h^3}{\alpha V_\alpha \mu} \left( \frac{V_\alpha |sl|}{12H_0 h} \right)^{1-\alpha} \frac{dp}{dx} - \lambda p^\gamma, \quad 0 < \gamma < 1$$

$$\int_a^c \frac{dM(p, h)}{dt} \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(c-t)}} = \pi(a+c) \quad (2.8)$$

$$\int_a^c \frac{dM(p, h)}{dt} \frac{t dt}{\sqrt{(t-a)(c-t)}} = \pi \left[ \left( \frac{c-a}{2} \right)^2 + \frac{(c+a)^2}{2} - 1 \right]$$

и эквивалентную системе (1.3), (1.4), (2.6).

Отметим, что при  $x \rightarrow a$  или  $x \rightarrow c$  (так, что  $r = (x-a)/\varepsilon_q \sim 1$  при  $\varepsilon_q \rightarrow 0$  или  $s = (x-c)/\varepsilon_g \sim 1$  при  $\varepsilon_g \rightarrow 0$ ) асимптотики давления  $p_0(x)$  имеют порядок:  $\varepsilon_q^{1/2}$  и  $\varepsilon_g^{1/2}$ . Поэтому решение систем уравнений (1.3), (1.4), (2.6) и (2.7),

(2.8) будем искать в виде

$$\begin{aligned} p(x) &= \varepsilon_q^{1/2} q(r) + o(\varepsilon_q^{1/2}), \quad q(r) \sim 1, \quad r \sim 1 \\ p(x) &= \varepsilon_g^{1/2} g(s) + o(\varepsilon_g^{1/2}), \quad g(s) \sim 1, \quad s \sim 1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$H_0 = H_{00}(\omega) + o(H_{00}), \quad c = 1 + \varepsilon_g \beta_1 + o(\varepsilon_g), \quad \beta_1 \sim 1, \quad \omega \ll 1$$

Дифференцируя выражение для  $h(x)$  и переходя к переменным  $r$  и  $s$ , с помощью выражений (2.9) из уравнений (1.4), (2.7) и (2.8) получим

$$\varepsilon_g = \varepsilon_q \quad (2.10)$$

$$q(r) = \sqrt{2r} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dM_0(q(t), h_q(t))}{dt} \frac{dt}{\sqrt{2t(t-r)}} \right\} \quad (2.11)$$

$$g(s) = \sqrt{-2s} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{dM_0(g(t), h_g(t))}{dt} \frac{dt}{\sqrt{-2t(t-s)}} \right\}$$

$$A^* = N \left\{ \pi \alpha_1 + \lambda_0 \gamma \int_0^\infty \frac{q^{\gamma-1}(t) q'(t) dt}{\sqrt{2t}} \right\}, \quad N^{-1} = \int_0^\infty \frac{d}{dt} W_0(q(t), h_q(t)) \frac{dt}{\sqrt{2t}} \quad (2.12)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dt} M_0(g(t), h_g(t)) \frac{dt}{\sqrt{-2t}}, \quad M_0(p, h) = A^* W_0(p, h) - \lambda_0 p^\gamma$$

$$W_0(p, h, x) = \frac{h^3 (12h)^{\alpha-1} dp}{\alpha \mu dx}, \quad \kappa = \alpha + 2$$

Здесь  $h_q(r)$  и  $h_g(s)$  — функция зазора соответственно в зонах входа и выхода.

При выводе этих уравнений был использован принцип срачивания [1, 2]. Именно, для срачивания функций давления (2.9) в зонах входа и выхода с давлением (2.2) во внешней области необходимо потребовать соизмеримость членов уравнения (2.7), определяемых деформацией микронеровностей, смазкой и упругостью тел в целом (соизмеримость вкладов в решение задачи в зонах входа и выхода от шероховатости и смазки обеспечивается выражением для  $\lambda$  (2.3)). Отсюда, в частности, следует асимптотическая оценка для  $H_0$ :

$$H_0 = A |sl|^{\alpha^0} (V_\alpha^\alpha \varepsilon_q^2)^{1/(\alpha+2)}, \quad A = A(\alpha_1, \alpha, \lambda_0, \gamma) \sim 1, \quad \alpha^0 = \frac{\alpha-1}{\alpha+2} \quad (2.13)$$

С помощью (2.11) и (2.12) можно показать справедливость равенств

$$\int_0^\infty \left[ q(t) - \sqrt{2t} - \frac{\alpha_1}{\sqrt{2t}} \right] dt = \int_0^\infty \left[ g(t) - \sqrt{-2t} + \frac{\beta_1}{\sqrt{-2t}} \right] dt = 0 \quad (2.14)$$

Далее, используя равенства (2.2), (2.3), (2.9), (2.10) и (2.14), а также условие представимости решения сингулярного интегрального уравнения в виде (2.7) [7], найдем формулы, устанавливающие связь между функциями зазора  $h_q(r)$ ,  $h_g(s)$  и асимптотиками давления  $q(r)$  и  $g(s)$ :

$$H_0 [h_q(r) - 1] = \varepsilon_q^{3/2} \left\{ \lambda_0 q^r(r) - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[ q(t) - \sqrt{2t} - \frac{\alpha_1}{\sqrt{2t}} \right] \ln |r-t| dt \right\} + \dots \quad (2.15)$$

$$H_0 [h_g(s) - 1] = \varepsilon_q^{3/2} \left\{ \lambda_0 g^r(s) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[ g(t) - \sqrt{-2t} + \frac{\beta_1}{\sqrt{-2t}} \right] \ln \left| \frac{1}{t-s} \right| dt \right\} + \dots$$

Аналогично [2] исследуем уравнения (1.3), (1.4) и (2.6) при  $\omega \ll 1$ . В результате этого анализа получим систему, состоящую из уравнений

$$\frac{dM_0(q(r), h_q(r))}{dr} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{q(t) - \sqrt{2t}}{t-r} dt, \quad q(0) = 0, \quad q(r) \rightarrow \sqrt{2r} + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2r}} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (2.16)$$

$$\frac{dM_0(g(s), h_g(s))}{ds} = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{g(t) - \sqrt{-2t}}{t-s} dt, \quad g(0) = \frac{dg}{ds}(0) = 0$$

и равенств (2.14).

Из определения режимов недостаточной и обильной смазки и формул (2.15) следует, что  $\varepsilon_q^{3/2} \ll H_0$ ,  $\omega \ll 1$  для режима недостаточной смазки и  $\varepsilon_q^{3/2} \sim H_0$ ,  $\omega \ll 1$  для режима обильной смазки.

С помощью формул (2.5), (2.9) и (2.13) можно показать, что в зонах входа и выхода  $v \sim \varepsilon_q^{3/2} / (H_0 |sl|)$ . Принимая во внимание равенство (2.13) и определения режимов недостаточной и обильной смазки, найдем условие, при котором в зонах входа и выхода  $v \ll 1$ :

$$\varepsilon_q \ll (V_\alpha^\alpha |sl|^{2\alpha+1})^\xi, \quad V_\alpha |sl| \ll 1, \quad \xi = 2(3\alpha+2)^{-1} \quad (2.17)$$

Теперь найдем во внешней области решение уравнения (1.5) для  $f(x)$ . Можно показать, что в случае если  $H_0$  определяется из (2.13), то во внешней области будем иметь  $v \ll 1$ . Это означает, что в рассматриваемых условиях формула (2.5) для  $f(x)$  верна при любом  $x \in [a, c]$ .

Отсюда следует, что в главном всюду в области контакта справедливо уравнение (2.6), из которого во внешней области с помощью формулы (2.13) при режиме обильной смазки получим оценку

$$h-1 = O\left(\frac{\varepsilon_q^2}{\mu H_0}\right) \sim O\left(\frac{\varepsilon_q^{1/2}}{\mu}\right) \ll 1 \quad \text{при } \omega \ll 1.$$

Очевидно, что полученная для  $h(x)$  оценка справедлива также при режиме недостаточной смазки. Таким образом, условие тяжело нагруженного контакта (2.1) выполнено.

Отметим, что условиями, в которых справедлив проделанный вывод систем уравнений (2.11), (2.12) и (2.14), (2.16), являются неравенства (2.17), а также соотношения  $M_0 \sim 1$  при  $r, s \sim 1$ .

Из порядкового соотношения  $v \sim \varepsilon_q^{3/2} / (H_0 |sl|) \ll 1$ ,  $\omega \ll 1$  в зонах входа и выхода и соотношений  $|sl| \ll 1 \vee |sl| \sim 1$  с помощью определения режимов смазывания следует, что в данном случае могут быть реализованы лишь режимы недостаточной смазки.

Поэтому для замыкания систем уравнений (2.11), (2.12) и (2.14), (2.16) к ним необходимо добавить уравнения  $h_q(r) = h_g(s) = 1$ .

Учитывая ограниченность в зонах входа и выхода функций  $\mu$  и  $h$ , а также формулы (2.2), (2.3), (2.9), (2.10), из (1.6) и (2.5) в главном получим формулы для сил трения скольжения и качения

$$F_s = \frac{4}{\pi} \frac{b_H}{R'} P \left(\frac{V_\alpha}{12H_0}\right)^\alpha |sl|^{\alpha-1} sl \int_0^1 \mu(\sqrt{1-x^2}) dx \quad (2.18)$$

$$F_R = \frac{1}{\pi} \frac{b_H}{R'} P \frac{12^{\alpha-1}}{\alpha} A^{\alpha+2} \varepsilon_q^2 \int_a^c \frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 dx \quad (2.19)$$

Очевидно, что в случае, когда во внешней области функция  $\mu$  экспоненциально велика (что, как правило, имеет место), формула для  $F_R$  упрощается. Именно в этом случае в  $F_R$  основной вклад вносят зоны входа и выхода.

2.2. Рассмотрим условия смазывания, при которых в зонах входа и выхода  $v \sim 1$ . Данный режим, очевидно, является предельным для рассмотренного выше. Поэтому из (2.4), (2.5), (2.13) и первого из соотношений (2.9) найдем

$$\varepsilon_q = (V_\alpha^\alpha |sl|^{2\alpha+1})^{1/2}, \quad H_0 = A (V_\alpha^{3\alpha} |sl|^{3\alpha+1})^{1/2}, \quad A \sim 1 \quad (2.20)$$

В этом случае решение уравнений (1.2)–(1.5), а также системы уравнений, полученной обращением интегрального оператора в (1.2) и (1.4), в зонах входа и выхода будем искать в виде (2.9) и (2.21)

$$\begin{aligned} f &= H_0 \varepsilon_q^{-1/2} f_q(r) + o(H_0 \varepsilon_q^{-1/2}), & r \sim 1 \\ f &= H_0 \varepsilon_g^{-1/2} f_g(s) + o(H_0 \varepsilon_g^{-1/2}), & s \sim 1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $\varepsilon_q$  определяется из (2.20).

По аналогии с методом, изложенным выше, с помощью (2.9) и (2.21) получим связь (2.10), а также системы уравнений (2.11), (2.12) и (2.14), (2.16), в которых выражения для функции  $W_0$  и постоянной  $k$  примут вид

$$W_0(p, h, f, x) = \frac{sl}{2} (h-1) - \frac{12A^{(\alpha+1)/\alpha}}{\mu^{1/\alpha}} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z \left| f+t \frac{dp}{dx} \right|^{\alpha'} \left( f+t \frac{dp}{dx} \right) dt, \quad \kappa=1 \quad (2.22)$$

В формуле для  $W_0$  следует положить  $sl=0$ , если  $sl \ll 1$  при  $\omega \ll 1$ .

Функции  $f_q(r)$  и  $f_g(s)$ , входящие в асимптотически справедливые уравнения в зонах входа и выхода, определяются из равенств

$$\int_{-h_q/2}^{h_q/2} \left| f_q+z \frac{dq}{dr} \right|^{\alpha'} \left( f_q+z \frac{dq}{dr} \right) dz = \frac{1}{12} \left( \frac{\mu}{A^{\alpha+1}} \right)^{1/\alpha} \text{sign}(sl) \quad (2.23)$$

$$\int_{-h_g/2}^{h_g/2} \left| f_g+z \frac{dg}{ds} \right|^{\alpha'} \left( f_g+z \frac{dg}{ds} \right) dz = \frac{1}{12} \left( \frac{\mu}{A^{\alpha+1}} \right)^{1/\alpha} \text{sign}(sl)$$

Принимая во внимание определения режимов недостаточной и обильной смазки, неравенство  $\varepsilon_q \ll 1$  и равенства (2.20), найдем условия, при которых во внешней области  $h-1 \ll 1$ , а также справедлив проделанный выше вывод асимптотической системы уравнений

$$|sl| \ll 1 \vee |sl| \sim 1, \quad V_\alpha |sl| \ll 1, \quad M_0 \sim 1; \quad r, s \sim 1 \quad (2.24)$$

Из определения режимов недостаточной и обильной смазки, равенств (2.20) и неравенств (2.24) следует, что в рассматриваемом случае могут быть реализованы режимы недостаточной и обильной смазки. Поэтому, чтобы замкнуть системы уравнений (2.11), (2.12) и (2.14), (2.16), в которых функция  $W_0$  и постоянная  $\kappa$  вычисляются с помощью (2.22), к ним необходимо добавить уравнения для  $h_q(r)$  и  $h_g(s)$ : при режиме недостаточной смазки ( $|sl| \ll 1$ ,  $\omega \ll 1$ ) это будут  $h_q(r) = h_g(s) = 1$ ; при режиме обильной смазки ( $|sl| \sim 1$ ,  $\omega \ll 1$ ) — уравнения (2.15), где постоянные  $H_0$  и  $\varepsilon_q^{3/2}$  надо заменить соответственно на  $A/|sl|$  и 1.

Исследуя во внешней области уравнение (1.5), получим  $v \ll 1$ . При этом, очевидно,  $f(x)$  определяется из (2.5), а сила трения скольжения  $F_s$  — по формуле (2.18). В случае, когда в герцевской зоне функция  $\mu(p)$  экспоненциально велика, для  $F_R$  получим формулу

$$F_R = \frac{1}{\pi} \frac{b_H}{R'} P A \varepsilon_q^2 \left\{ \int_0^\infty W_0(q, h_q, f_q, r) \frac{dq}{dr} dr + \int_{-\infty}^0 W_0(g, h_g, f_g, s) \frac{dg}{ds} ds \right\} \quad (2.25)$$

2.3. Рассмотрим условия смазывания, при которых в зонах входа и выхода  $v \gg 1$ . Из уравнения (1.5) с помощью разложения подынтегральной функции по формуле Тейлора в окрестности  $H_0 s dp/dx$  в зонах входа и выхода получим выражение для функции  $f(x)$  в виде асимптотического разложения по  $v^{-1}$ :

$$f = \frac{V_\alpha}{12H_0} \left| \frac{H_0 h}{2} \frac{dp}{dx} \right|^{-\alpha'} \frac{\mu^{1/\alpha} sl}{h} + \dots \quad (2.26)$$

Используя упомянутое разложение подынтегральной функции по формуле Тейлора, а также равенство (2.26), уравнение (1.2) в главном приведем к виду

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{24\alpha H_0^{(\alpha+1)/\alpha}}{(2\alpha+1)V_\alpha} \frac{1}{\mu^{1/\alpha}} \left( \frac{h}{2} \right)^{(2\alpha+1)/\alpha} \left| \frac{dp}{dx} \right|^{\alpha'} \frac{dp}{dx} \right\} = \frac{dh}{dx} \quad (2.27)$$

Следуя методике, изложенной в п. 2.1, обратим интегральный оператор в (2.27). Затем, отыскивая решение полученных систем уравнений в виде (2.9), для  $\varepsilon_g$  найдем равенство (2.10), а в зонах входа и выхода будем иметь асимптотически справедливые уравнения, по форме совпадающие с уравнениями (2.11), (2.12) и (2.14), (2.16). При этом выражения для  $W_0$  и  $\kappa$  примут вид

$$W_0(p, h, x) = \frac{3\alpha}{2\alpha+1} 2^{-\alpha} \left( \frac{h^{2\alpha+1}}{\mu} \left| \frac{dp}{dx} \right|^{1-\alpha} \right)^{1/\alpha} \frac{dp}{dx}, \quad \kappa = \frac{2\alpha+1}{\alpha} \quad (2.28)$$

По аналогии с п. 2.1 для  $H_0$  получим асимптотическую оценку

$$H_0 = A(V_\alpha^\alpha \varepsilon_q^{1/\rho})^\chi, \quad A = A(\alpha_1, \alpha, \lambda_0, \gamma) \sim 1, \quad \chi = (2\alpha+1)^{-1}, \quad \rho = 2(3\alpha+1)^{-1} \quad (2.29)$$

Из (2.29) следует, что при  $\varepsilon_q \ll V_\alpha^{\alpha\delta}$  реализуется режим недостаточной смазки, а при  $\varepsilon_q = V_\alpha^{\alpha\delta}$  — режим обильной смазки, причем  $H_0 = AV_\alpha^{3\alpha\delta/2}$ .

Отсюда с помощью (2.29) и определений режимов обильной и недостаточной смазки можно найти условия, при которых в зонах входа и выхода  $v \gg 1$ :

$$(V_\alpha^\alpha |sl|^{2\alpha+1})^\delta \ll \varepsilon_q \ll V_\alpha^{\alpha\delta}, \quad (V_\alpha^\alpha |sl|^{2\alpha+1})^\delta \ll \varepsilon_q \sim V_\alpha^{\alpha\delta}, \quad |sl| \ll 1 \quad (2.30)$$

Рассмотрим во внешней области уравнение (1.5). Из исследования этого уравнения с помощью соотношений (2.29), (2.30) при  $\mu \gg 1 \sqrt{\mu} \sim 1$  получим, что во внешней области могут быть реализованы следующие условия смазывания:

$v \ll 1$  при

$$\delta^\delta \ll \varepsilon_q \ll V_\alpha^{\alpha\delta}, \quad \mu \gg (V_\alpha^{\delta/2} |sl|^{-1})^\alpha \text{ или}$$

$$\delta^\delta \ll \varepsilon_q \sim V_\alpha^{\alpha\delta}, \quad \mu \sim (V_\alpha^{\delta/2} |sl|^{-1})^\alpha \text{ или}$$

$$\delta^\delta \ll \varepsilon_q \ll (\delta^\alpha \mu^{2\alpha+1})^\eta, \quad \mu \ll (V_\alpha^{\delta/2} |sl|^{-1})^\alpha, \quad |sl| \ll V_\alpha^{\delta/2}$$

$v \sim 1$  при

$$\varepsilon_q \sim (\delta^\alpha \mu^{2\alpha+1})^\eta, \quad \mu \ll (V_\alpha^{\delta/2} |sl|^{-1})^\alpha, \quad |sl| \ll V_\alpha^{\delta/2} \text{ или}$$

$$\mu \sim 1, \quad |sl| \sim V_\alpha^{\delta/2} \quad (2.31)$$

$v \gg 1$  при

$$(\delta^\alpha \mu^{2\alpha+1})^\eta \ll \varepsilon_q \ll V_\alpha^{\alpha\delta} \text{ или } (\delta^\alpha \mu^{2\alpha+1})^\eta \ll \varepsilon_q \sim V_\alpha^{\alpha\delta}$$

$$\mu \ll (V_\alpha^{\delta/2} |sl|^{-1})^\alpha, \quad |sl| \ll V_\alpha^{\delta/2} \ll 1$$

где

$$\delta = V_\alpha^\alpha |sl|^{2\alpha+1}, \quad \eta = 2(\alpha+1)^{-1}(3\alpha+1)^{-1} \quad (2.32)$$

Отметим, что условия (2.31) обеспечивают во внешней области выполнение неравенства  $h-1 \ll 1$  при  $\omega \ll 1$ . Это вытекает из рассмотрения уравнений (1.2) и (1.4) во внешней области. Отсюда, кроме того, следует справедливость приведенного выше анализа при выполненных соотношениях (2.31), а также порядковых равенствах  $M_0 \sim 1$  при  $r \sim 1$ ,  $s \sim 1$ .

В данном случае для замыкания асимптотически справедливых систем уравнений (2.11), (2.12), (2.28) и (2.14), (2.16), (2.28) к ним надо добавить уравнения  $h_q(r) = h_g(s) = 1$  при режиме недостаточной смазки и уравнения (2.15), в которых  $H_0$  и  $\varepsilon_q^{\delta/2}$  заменяются на  $A$  и единицу, при режиме обильной смазки.

При  $v \ll 1$  и  $v \gg 1$  во внешней области функция  $f(x)$  вычисляется соответственно по формулам (2.5) и (2.26), а при  $v \sim 1$  функция  $f(x)$  находится



из решения уравнения

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left| f + H_0 s \frac{dp}{dx} \right|^{\alpha} \left( f + H_0 s \frac{dp}{dx} \right) ds = \frac{V_{\alpha} s l \mu^{1/\alpha}}{12 H_0} \quad (2.33)$$

При  $\nu \sim 1$  не удается получить выражение для силы трения  $F_s$  в аналитическом виде (исключение составляет случай  $\alpha=1$ ), в то время как при  $\nu \ll 1$  для  $F_s$  имеем формулу (2.18), а при  $\nu \gg 1$  — имеющую смысл при  $\alpha > 1/2$  формулу

$$F_s = \frac{1}{\pi} \frac{b_H}{R'} P \frac{V_{\alpha} s l}{12} \left( \frac{2}{H_0} \right)^{1/\alpha} \int_{-1}^1 |x|^{-\alpha'} (1-x^2)^{\alpha'/2} \mu^{1/\alpha} (\sqrt{1-x^2}) dx \quad (2.34)$$

Предположив, что во внешней области функция  $\mu(p)$  экспоненциально велика, из (1.6) и (2.28) для  $F_R$  получим формулу

$$F_R = \frac{1}{\pi} \frac{b_H}{R'} P A^{(2\alpha+1)/\alpha} \varepsilon_q^2 \left\{ \int_0^{\infty} W_0(q, h_q, r) \frac{dq}{dr} dr + \int_{-\infty}^0 W_0(g, h_g, s) \frac{dg}{ds} ds \right\} \quad (2.35)$$

3. При заданных параметрах  $\alpha_1$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda_0$  и  $\gamma$ , решив системы уравнений (2.11), (2.12) и (2.14), (2.16) совместно с соответствующими выражениями для  $h_q(r)$ ,  $h_g(s)$  и  $W_0$ , определим функции  $q(r)$ ,  $g(s)$  и постоянные  $A$  и  $\beta_1$ . После этого, зная величину  $\varepsilon_q$ , по одной из формул (2.13), (2.20), (2.29) найдем постоянную  $H_0$ , а затем по формулам (1.6), (2.18), (2.19), (2.34) и (2.35) вычислим силы трения скольжения  $F_s$  и качения  $F_R$ .

Рассмотрим пример с  $\mu = \exp(Qp^m)$ ,  $m > 0$ ,  $Q = \alpha_* p_H^m$  ( $\alpha_*$  — пьезокоэффициент). В этом случае возможны два типа тяжелого нагружения:  $\omega = V_{\alpha} \ll 1$  и  $\omega = Q^{-1} \ll 1$ . При этом первый из них обусловлен низкими скоростями и вязкостью, а также большими нагрузками  $P$ , в то время как во втором случае тяжелое нагружение вызывается быстрым ростом меры консистенции  $\mu(p)$  с давлением.

В случае  $Q \gg 1$ , кроме рассмотренных в п. 2 режимов смазывания, возможны также режимы, где  $Q^{-2/m} \ll \varepsilon_q \ll (Q^{1/m} V_{\alpha}^{\alpha})^{\rho} \sqrt{Q^{-2/m}} \ll \varepsilon_q \sim (Q^{1/m} V_{\alpha}^{\alpha})^{\rho}$ . При этом в зонах, удаленных от герцевского контакта  $[-1, 1]$  на расстояние, существенно превышающее  $Q^{-2/m}$ , зазор  $h(x)$  в главном определяется герцевским давлением  $p_{00}(x) = \sqrt{1-x^2}$ . Поэтому могут быть получены следующие асимптотические оценки для  $H_0$  [8]<sup>1</sup>:

$$H_0 = A |sl|^{\alpha_0} (Q^{1/m} \varepsilon_q^{5/2} V_{\alpha}^{\alpha})^{1/(\alpha+2)}$$

$$\varepsilon_q \ll (Q^{1/m} V_{\alpha}^{\alpha} |sl|^{2\alpha+1})^{\rho} \sqrt{\varepsilon_q} \sim (Q^{1/m} V_{\alpha}^{\alpha} |sl|^{2\alpha+1})^{\rho}$$

при  $\nu \ll 1 \sqrt{\nu} \sim 1$  в зоне входа и

$$H_0 = A (Q^{1/m} \varepsilon_q^{1/5} V_{\alpha}^{\alpha})^{\alpha}$$

$$(Q^{1/m} V_{\alpha}^{\alpha} |sl|^{2\alpha+1})^{\rho} \ll \varepsilon_q \ll (Q^{1/m} V_{\alpha}^{\alpha})^{\rho} \quad \text{или}$$

$$(Q^{1/m} V_{\alpha}^{\alpha} |sl|^{2\alpha+1})^{\rho} \ll \varepsilon_q \sim (Q^{1/m} V_{\alpha}^{\alpha})^{\rho}$$

при  $\nu \gg 1$  в зоне входа. Дальнейшее увеличение  $\varepsilon_q$  не приводит к изменению зависимости постоянной  $H_0$  от  $\varepsilon_q$ .

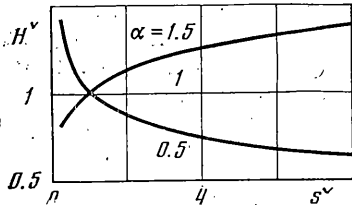
Рассмотрим подробнее результаты, полученные в п. 2.1 для режима недостаточной смазки. Из (2.13) следует, что с ростом  $|sl|$  толщина слоя

<sup>1</sup> В [8] имеются неточности непринципиального характера, которые устранены в [2].

для псевдопластических жидкостей падает, а для дилатантных — растет<sup>1</sup>; толщина слоя ньютоновской жидкости не зависит от  $|sl|$  (см. фигуру,  $H = H_0(sl)/H_0(sl_0)$ ,  $s^* = |sl/sl_0|$ ).

Аналогично, из выражения для  $F_s$  следует, что в случае ньютоновской жидкости  $F_s$  пропорциональна  $sl$ , для псевдопластической жидкости  $F_s$  растет медленнее  $sl$ , а для дилатантной жидкости — быстрее  $sl$ . Кроме того, из формулы (2.18) вытекает, что с увеличением количества смазки (ростом  $|\alpha_1|$ ,  $\alpha_1 < 0$ ) сила трения убывает. Это следует из того, что толщина слоя смазки растет с увеличением ее количества в зоне входа (см. ниже).

Предположим, что  $\mu(p)$  не зависит от  $\alpha$ . Тогда из (2.14), (2.12) при условиях (2.17) видно, что в случае недостаточной смазки функции  $q(r)$ ,  $g(s)$  и постоянная  $\beta_1$  при  $\alpha \neq 1$  совпадают с  $q(r)$ ,  $g(s)$  и  $\beta_1$ , полученными для ньютоновской жидкости ( $\alpha=1$ ), а постоянная  $A$  пересчитывается исходя из соотношения  $A = [\alpha(12)^{1-\alpha} A_*^3]^{1/(\alpha+2)}$ , где  $A_*$  — коэффициент  $A$ , вычисленный при  $\alpha=1$ . Отсюда вытекает, что при прочих равных условиях и  $\alpha > [A_*(\alpha_1, \lambda_0, \gamma)/12]^{\alpha-1}$  толщина слоя дилатантной жидкости при определенных значениях величин  $\alpha$ ,  $sl$ ,  $V_\alpha$  и  $\varepsilon_q$  может превысить толщину слоя ньютоновской жидкости (см. (2.13)).



Предположим, что в зонах входа и выхода можно считать  $\mu=1$ . В этом случае при условиях (2.31) между решениями  $q(r)=q(r, \alpha_1, \alpha, \lambda_0, \gamma)$ ,  $g(s)=g(s, \alpha_1, \alpha, \lambda_0, \gamma)$ ,  $A=A(\alpha_1, \alpha, \lambda_0, \gamma)$ ,  $\beta_1=\beta_1(\alpha_1, \alpha, \lambda_0, \gamma)$  задачи для неньютоновской смазки в условиях ее недостаточной подачи, полученными при  $\alpha_1=-1$  и  $\alpha_1 \neq -1$ , существует простая связь [2]:

$$q(r, \alpha_1, \alpha, \lambda_0, \gamma) = |\alpha_1|^{1/2} q\left(\frac{r}{|\alpha_1|}, -1, \alpha, \lambda_0 |\alpha_1|^{(\gamma-3)/2}, \gamma\right)$$

$$g(s, \alpha_1, \alpha, \lambda_0, \gamma) = |\alpha_1|^{1/2} g\left(\frac{s}{|\alpha_1|}, -1, \alpha, \lambda_0 |\alpha_1|^{(\gamma-3)/2}, \gamma\right)$$

$$A(\alpha_1, \alpha, \lambda_0, \gamma) = |\alpha_1|^\xi A(-1, \alpha, \lambda_0 |\alpha_1|^{(\gamma-3)/2}, \gamma)$$

$$\beta_1(\alpha_1, \alpha, \lambda_0, \gamma) = |\alpha_1| \beta_1(-1, \alpha, \lambda_0 |\alpha_1|^{(\gamma-3)/2}, \gamma), \quad \xi = \frac{3\alpha+1}{2(2\alpha+1)}$$

При условиях (2.17) зависимость между функциями  $q(r)$ ,  $g(s)$  и постоянной  $\beta_1$ , найденными при  $\alpha_1=-1$  и  $\alpha_1 \neq -1$ , совпадает с установленной выше, если в правых частях равенств положить  $\alpha=1$ ; для постоянной  $A$  с учетом формулы пересчета  $A$  по  $A_*$  найдем

$$A(\alpha_1, \alpha, \lambda_0, \gamma) = [\alpha 12^{1-\alpha} \alpha_1^2 A_*^3 (-1, 1, \lambda_0 |\alpha_1|^{(\gamma-3)/2}, \gamma)]^{1/(\alpha+2)} \quad (3.1)$$

Отсюда, в частности, следует снижение влияния микронеровностей (при фиксированном значении  $\lambda_0$  и  $0 < \gamma < 1$ ) на процесс смазывания с увеличением количества подаваемой смазки (т. е. с ростом  $|\alpha_1|$ ,  $\alpha_1 < 0$ ). Кроме того, данные формулы дают возможность сократить количество исходных параметров, от которых зависит решение задачи.

Основываясь на проведенном анализе асимптотически справедливых уравнений, можно заключить, что для режимов недостаточной смазки при условиях (2.17) достаточно получить решение для ньютоновской жидкости.

<sup>1</sup> При определенных условиях толщина слоя в неизотермической задаче для дилатантной жидкости с ростом  $|sl|$  может также возрастать, в то время как для псевдопластической и ньютоновской жидкости — падает [2].

Наибольший интерес в поставленной задаче представляют режимы недостаточной смазки, являющиеся своего рода моделью условий так называемого смешанного трения. В этих условиях шероховатость поверхностей оказывает существенное влияние на процесс смазки. В предельном случае слоя нулевой толщины поставленная задача вырождается в задачу о контакте двух шероховатых упругих тел [9].

Рассмотрим кратко численные расчеты, выполненные для ньютоновской жидкости в условиях недостаточной смазки (2.17) при  $\mu = \exp(Qp^m)$ ,  $0 < m \leq 1$  (правила пересчета для жидкостей с  $\alpha \neq 1$  указаны выше). Расчеты показали, что в ряде случаев шероховатость поверхностей заметно снижает толщину слоя  $H_0$ , которая является монотонно возрастающей функцией  $|\alpha_1|$ . Именно, при  $\alpha_1 = -2$ ,  $\lambda_0 = 1$ ,  $\gamma = 0.5$  и  $0 < m \leq 0.75$  отношение толщины слоя с учетом шероховатости к толщине слоя для гладких тел колеблется в пределах  $0.83 \div 0.91$ ; при увеличении  $\lambda_0$  это отношение уменьшается. В зоне входа качественное поведение давления, являющегося монотонно возрастающей функцией, совпадает с поведением давления для задачи о гладких телах. В зоне выхода давление монотонно падает при указанных значениях параметров  $\alpha_1$ ,  $\lambda_0$ ,  $\gamma$  и  $0 < m \leq 1$ , в то время как давление в задаче для гладких тел при  $m = 1$  имеет локальный максимум [2]. Необходимо отметить, что значения коэффициента  $A$ , полученные при  $\mu \neq 1$ , близки к значениям  $A$ , вычисленным по формуле (3.1) при  $\mu = \alpha = 1$ .

4. Рассмотрим контактно-гидродинамическую задачу для вязкой несжимаемой неньютоновской жидкости Рейнера — Ривлина [10]. В частном случае, когда девиатор напряжений пропорционален тензору скоростей деформации, в предположении малой толщины слоя по сравнению с его протяженностью связь между касательным напряжением  $\tau$  и  $\mu du/dz$  можно записать в виде

$$\tau = \Phi \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \text{или} \quad \mu \frac{\partial u}{\partial z} = F(\tau) \quad (4.1)$$

где  $\Phi$  и  $F$  — произвольные гладкие монотонно возрастающие взаимно обратные нечетные функции,  $\mu = \mu(p)$  — вязкость (мера консистенции и т. п.), представляющая собой неубывающую функцию давления  $p$ .

Легко видеть, что поставленная задача сводится к системе, состоящей из уравнений (1.3), (1.4) и уравнений

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\mu} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z F \left( f + H_0 t \frac{dp}{dx} \right) dt + \left( 1 - \frac{sl}{2} \right) h \right\} = 0 \quad (4.2)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} F \left( f + H_0 t \frac{dp}{dx} \right) dt = \mu sl \quad (4.3)$$

К полученной системе уравнений (1.3), (1.4), (4.2) и (4.3) в полной мере применимы определения режимов недостаточной и обильной смазки, а также изложенный в п. 2 метод получения асимптотически справедливых уравнений в зонах входа и выхода.

Ограничимся указанием основных моментов, к которым сводится применение асимптотического метода решения системы уравнений (1.3), (1.4), (4.2) и (4.3).

Предполагая выполненным условие (2.1), во внешней области получим решение (2.2). Исследуем решение уравнения (4.3) в зонах входа и выхода. Разложив по формуле Тейлора функцию  $F$ , в указанных зонах в главном будем иметь:  $f = \Phi(u)$  при  $v \ll 1$ ;  $f = uv/F(v)$  при  $v \gg 1$ . Здесь  $u = \mu sl/h$  и  $v = 0.5 H_0 h dp/dx$ . Уравнение (4.2) с учетом выражений для  $f$  может быть

приведено к виду

$$dW(p, h, f, x)/dx = dh/dx \quad (4.4)$$

причем функция  $W$  при  $\nu \ll 1$  имеет вид

$$W = \frac{h^3}{12\mu} H_0 \frac{dp}{dx} / \Phi' \left( \frac{\mu sl}{h} \right) \quad (4.5)$$

а при  $\nu \gg 1$  — соответственно

$$W = -\frac{1}{\mu} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z F \left( H_0 t \frac{dp}{dx} \right) dt \quad (4.6)$$

Учитывая вид внутреннего разложения внешнего решения (2.2), решение задачи в зонах входа и выхода будем искать в виде (2.9). Предполагая, кроме того, что

$$\Phi \left( \frac{\mu sl}{h} \right) = \omega' |sl|^m H_0^{-n} \Phi_0 \left( \frac{r}{s} \right) + \dots, \quad \Phi_0 \left( \frac{r}{s} \right) \sim 1 \quad \text{при} \quad \left( \frac{r}{s} \right) \sim 1 \quad (4.7)$$

будем иметь

$$F \left( H_0 z \frac{dp}{dx} \right) = (\omega'^{-1} \varepsilon_q^{-1/2} H_0^{n+1})^{1/m} F_0 \left( \frac{r}{s} \right) + \dots, \quad F_0 \left( \frac{r}{s} \right) \sim 1 \quad \text{при} \quad \left( \frac{r}{s} \right) \sim 1 \quad (4.8)$$

Переходя в уравнениях (4.4)–(4.6) к переменным  $r$  и  $s$ , из сравнения порядка членов получим равенство (2.10), а также системы уравнений (2.11), (2.12), (2.15) и (2.14)–(2.16). Для толщины слоя  $H_0$  если  $\nu \ll 1$  найдем

$$H_0 = A (\omega' |sl|^{m-1} \varepsilon_q^2)^{1/(n+2)}, \quad A \sim 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon_q \ll (\omega' |sl|^\varphi)^\psi \quad (4.9)$$

если  $\nu \gg 1$

$$H_0 = A (\omega' \varepsilon_q^\theta)^{1/\varphi}, \quad A \sim 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon_q \gg (\omega' |sl|^\varphi)^\psi \quad (4.10)$$

$$\varphi = n + m + 1, \quad \psi = 2(3n + 2)^{-1}, \quad \theta = (3m + 1)/2$$

Функции  $W_0$ , входящие в функцию  $M_0$  из (2.12), и постоянная  $\kappa$  очевидным образом выражаются через функции  $\Phi_0$ ,  $F_0$  и постоянные  $n$  и  $m$  из (4.7) и (4.8).

Не останавливаясь подробно на случае  $\nu \sim 1$  в зонах входа и выхода, заметим, что функция  $f$  ищется в виде (2.21). Дальнейший анализ полностью аналогичен изложенному в п. 2.2, причем для  $H_0$  получаем формулу (4.10), где постоянная  $\varepsilon_q$  определяется из соотношения  $\varepsilon_q = (\omega' |sl|^\varphi)^\psi$ .

Заметим, что области изменения параметров  $sl$ ,  $\varepsilon_q$  и так далее, в которых в зонах входа и выхода  $\nu \ll 1$ ,  $\nu \sim 1$  или  $\nu \gg 1$ , а во внешней области  $h-1 \ll 1$  при  $\omega \ll 1$ , определяются аналогично п. 2 с помощью уравнений (4.2), (4.3), асимптотических оценок для  $f$  и  $H_0$  (см. формулы (4.9), (4.10)) и определений режимов недостаточной и обильной смазки.

Следует отметить, что кроме формул (4.9), (4.10) для толщины слоя смазки при режимах, рассмотренных в п. 3, аналогичным образом могут быть получены соответствующие формулы для  $H_0$ .

По аналогии с п. 2 в ряде случаев могут быть получены аналитические формулы для силы трения  $F_s$ ; именно, при  $\nu \ll 1$  во внешней области имеем

$$F_s = \frac{4}{\pi} \frac{b_H}{R'} P \int_0^1 \Phi[\mu(\sqrt{1-x^2})sl] dx$$

а при  $v \gg 1$  во внешней области соответственно получим

$$F_s = \frac{1}{\pi} \frac{b_H}{R'} PH_0 sl \int_{-1}^1 x(1-x^2)^{-1/2} \mu(\sqrt{1-x^2}) \left\{ F \left[ \frac{1}{2} H_0 x(1-x^2)^{-1/2} \right] \right\}^{-1} dx$$

Аналогичным образом могут быть получены формулы для силы трения качения  $F_R$ .

Описанная методика исследования с незначительными изменениями переносится на общий случай жидкости Рейнера — Ривлина [10].

Впервые изложенный метод был предложен при исследовании плоской изотермической контактно-гидродинамической задачи для ньютоновской жидкости в случае тяжелого нагружения<sup>1</sup>. Позже было показано, что применительно к задачам контактно-гидродинамической теории смазки данный метод обладает широкими возможностями. Он с успехом использован<sup>2</sup> для решения задачи в случае ньютоновской жидкости и жидкости Ри-Эйринга [6, 10] при  $sl=0$ , а также при рассмотрении неизотермической задачи<sup>3</sup>. Метод может быть использован в задаче контактно-гидродинамической теории смазки для микрополярной жидкости (см., например, [11]).

Метод оказывается применимым и в том случае, когда в отличие от классической постановки в процессе решения задачи контактно-гидродинамической теории смазки требуется также определить координату  $a$  входа в область контакта. Можно показать, что для реализации такого нового подхода в случае ньютоновской жидкости граничные условия задачи, соответствующие ее физическому смыслу, необходимо принять в виде

$$p(a) = p(c) = 0, \quad \frac{dp}{dx}(a) = \frac{b}{h^2(a)}, \quad \frac{dp}{dx}(c) = 0$$

где  $b$  — определенная постоянная, зависящая от  $\mu_0$ ,  $u_1$  и  $u_2$ .

Отметим еще, что, хотя выше основное внимание было уделено рассмотрению случаев тяжело нагруженного контакта, метод также применим для рассмотрения противоположного случая — легко нагруженного контакта. При этом производится построение регулярной асимптотики решения [1], по параметру

$$V = \frac{3\pi^2}{4} \frac{\mu_0(u_1+u_2)R'E'}{P^2} \gg 1$$

Авторы благодарят Н. Х. Арутюяна за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 21 XII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости, М., «Мир», 1967.
2. Кудиш И. И. Асимптотический анализ плоской неизотермической упругогидродинамической задачи для тяжело нагруженного контакта качения. Изв. АН АрмССР. Механика, 1978, т. 31, № 6.

<sup>1</sup> Кудиш И. И. Гидродинамическая теория смазки цилиндрических тел при качении. Тезисы докл. Всес. конф. «Контактно-гидродинамическая теория смазки и ее практическое применение в технике». Изд-во Куйбышевск. авиац. ин-та, 1976.

<sup>2</sup> Кудиш И. И. Асимптотическое решение плоской изотермической контактно-гидродинамической задачи. Тезисы докл. Всес. научн. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела». Изд-во Ростовск. гос. ун-та, 1977.

<sup>3</sup> Александров В. М., Кудиш И. И. Асимптотическое решение плоской контактно-гидродинамической задачи для тяжело нагруженного контакта. Тезисы Всес. семинара «Технологические методы повышения качества машин». Изд-во Фрунз. политехн. ин-та, 1978.

3. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
  4. Шульман З. П. Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей. М., «Энергия», 1975.
  5. Демкин Н. Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М., «Наука», 1970.
  6. Коднир Д. С. Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М., «Машиностроение», 1976.
  7. Воронич И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
  8. Кудиш И. И. Упругогидродинамическая задача для тяжело нагруженного контакта качения. Изв. АН АрмССР. Механика, 1978, т. 31, № 1.
  9. Александров В. М., Кудиш И. И. Асимптотический анализ плоской и осесимметричной контактных задач при учете поверхностной структуры взаимодействующих тел. Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 1.
  10. Астарига Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М., «Мир», 1978.
  11. Prakash J., Sinha P. Squeeze film theory for micropolar fluids. Trans. ASME, Ser. F. J. Lubrication Technology, 1976, vol. 98, No. 1. (Рус. перев.: Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Проблемы трения и смазки, 1976, № 1.)
-