МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1980

УДК 534

О НАИМЕНЬШЕЙ МАССЕ УПРУГОИНЕРЦИОННЫХ ВИБРОИЗОЛИРУЮЩИХ СИСТЕМ

В. М. РЯБОЙ

(Москва)

Известно большое количество пассивных виброизолирующих систем, эффективность которых обеспечивается за счет нужной комбинации упругих и инерционных свойств, например простейшая виброизолирующая система, представляющая собой массу на упругих опорах [1], система с динамическим гасителем [2], двухкаскадная система [3], а также более сложные конструкции, предложенные в последнее время [4–7]. Анализ примеров показывает, что устройство, имеющее заданную статическую жесткость и обеспечивающее достаточно высокий уровень виброизоляции в заданной области частот без использования дополнительных источников энергии, должно обладать достаточно большой общей массой. В данной работе эта закономерность доказывается и исследуется в общем виде для линейно-упругих систем произвольной структуры с любым числом степеней свободы.

Рассматривается виброизоляция основания при гармоническом внешнем воздействии. В качестве меры виброизоляции принимается коэффициент передачи силы на неподвижное основание (функция частоты). Решение задачи с учетом динамических свойств объекта и основания при соответствующем критерии виброизоляции [8], а также с учетом демпфирования должно быть предметом дальнейших исследований.

Выводятся формулы, определяющие наименьшую массу, которую может иметь линейно-упругая система данной статической жесткости с данной частотной зависимостью коэффициента передачи. Получены оценки снизу для массы виброизолирующей системы заданной эффективности в диапазоне частот. Найден порядок возрастания наименьшей массы при увеличении виброизоляции в данном диапазоне частот.

Другие постановки задач об оптимизации и предельных возможностях виброизолирующих систем, обладающих инерционными свойствами, рассмотрены в [9–11].

1. Рассматривается система материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_n$, соединенных упругими связями с неподвижным основанием и между собой; упругие свойства системы описываются положительно-определенной действительной симметрической матрицей жесткости. Для простоты предполагается, что материальные точки способны перемещаться лишь в одном направлении. Можно показать, что это предположение не уменьшает общности получаемых результатов.

Уравнения колебаний системы при гармоническом внешнем воздействии записываются в виде

$$C\mathbf{u}-\omega^2 M\mathbf{u}=\mathbf{f} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$—n-мерные векторы амплитуд перемещений и внешних сил соответственно, ω — частота возбуждения, C — матрица жесткости, M — диагональная матрица масс.

Общая масса системы равна

$$m=\sum_{i=1}^{n} m_i=\operatorname{Sp} M \tag{1.2}$$

Предполагается, что внешняя сила приложена к массе m_1. Статическая жесткость системы дается формулой

$$c=1/g_{11} \tag{1.3}$$

где g_{11} — первый элемент матрицы податливости $G=C^{-1}$.

Коэффициент передачи силы r определяется как отношение амплитуд силы, действующей на основание, и внешней силы. Он положителен, если эти силы синфазны, и отрицателен, если они противофазны. Согласно принципу Даламбера, сумма внешней силы, реакции основания и сил инерции в системе равна нулю. Принимая во внимание уравнения колебаний (1.1), можно записать

$$r=\sum_{i=1}\sum_{j=1}c_{ij}u_j \tag{1.4}$$

Здесь c_{ij} — элементы матрицы жесткости C, u_j — амплитуды колебаний при действии силы единичной амплитуды на первую массу, т. е. решение системы уравнений (1.1) при

$$f_1=1,\ f_j=0\ (2\leqslant j\leqslant n) \tag{1.5}$$

Коэффициент передачи силы является функцией частоты: $r=r(\omega)$.

В данной работе рассматривается задача об определении минимума общей массы (1.2) по всем колебательным системам, удовлетворяющим (1.1)–(1.5) при фиксированном c и заданных требованиях к функции $r(\omega)$.

Колебательная система характеризуется матрицами C и M, содержащими $n(n+3)/2$ независимых параметров. Ниже будет показано, как представляющие интерес характеристики системы «в целом» — m, c, $r(\omega)$ — можно компактно выразить через меньшее число параметров.

Матрицы M и C приводятся к диагональному виду одним преобразованием $\Phi^TM\Phi=E$, $\Phi^TC\Phi=\Lambda$ (символ T означает транспонирование), причем столбцы φ_i матрицы Φ представляют собственные формы колебаний системы, а диагональная матрица Λ составлена из квадратов собственных частот системы $\lambda_k=\omega_k^2$. Введя матрицу

$$\Psi=(\Phi^T)^{-1} \tag{1.6}$$

можно записать

$$M=\Psi\Psi^T,\ C=\Psi\Lambda\Psi^T \tag{1.7}$$

Матрица податливости системы выражается формулой

$$G=\Phi\Lambda^{-1}\Phi^T \tag{1.8}$$

Решение уравнения (1.1) представляется в виде

$$u=\sum_{k=1}^{n}\frac{(f,\varphi_k)}{\omega_k^2-\omega^2}\varphi_k \tag{1.9}$$

Из соотношений (1.2), (1.7) следует, что

$$m=\sum_{i=1}^{n}y_i^2 \tag{1.10}$$

где y_i представляет собой сумму элементов i-го столбца матрицы Ψ:

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}\psi_{ji} \tag{1.11}$$

Из формул (1.3), (1.8) вытекает, что

$$1/c=\sum_{i=1}^{n}x_i^2/\omega_i^2 \tag{1.12}$$

где x_i — элементы первой строки матрицы Ф

$$x_i=\varphi_{1i} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{1.13}$$

Выражение для коэффициента передачи получается из (1.4) с учетом представления (1.9), условия (1.5) и второй формулы (1.7). Имеем

$$r(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_iy_i}{1-\omega^2/\omega_i^2} \tag{1.14}$$

Условие (1.6) накладывает на величины x_i, y_i ограничение

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=1 \tag{1.15}$$

Приведем еще формулу для динамической податливости системы g, которая, хотя и не используется в дальнейшем, представляет самостоятельный интерес. Из (1.9), (1.5), (1.13) непосредственно получаем

$$g(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\omega_i^2-\omega^2}$$

Таким образом найдены формулы, выражающие характеристики системы «в целом» лишь через $3n-1$ независимых параметров: n собственных частот ω_i и $2n$ компонент x_i и y_i, связанных соотношением (1.15). Построение по этим величинам матриц M и C производится следующим образом. Обозначим $(x_1,\ldots,x_n)=\mathbf{x}$, $(y_1,\ldots,y_n)=\mathbf{y}$. Поскольку в силу (1.6), (1.7) система векторов-строк φ^i матрицы Ф и система векторов-строк ψ^i матрицы Ψ образуют пару взаимных ортогональных базисов в n-мерном пространстве, векторы $\varphi^1=\mathbf{x}$ и ψ^1 коллинеарны. Отсюда с учетом (1.15) следует, что

$$\psi^1=\mathbf{x}\Big/\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \tag{1.16}$$

Затем вычисляется разность $\mathbf{y}-\psi^1$ и раскладывается произвольным образом на ортогональные ненулевые слагаемые в $(n-1)$-мерном подпространстве, ортогональном к ψ^1. Эти слагаемые представляют собой векторы-строки $\psi^2,\ldots,\psi^n$. Получив таким образом матрицу Ψ, можно найти матрицы M и C по формулам (1.7). Построение выполнимо, если только разность $\mathbf{y}-\psi^1$ не обращается в нуль. Согласно (1.16), это условие записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-x_i\Big/\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^2>0 \quad (n\geqslant 2) \tag{1.17}$$

При $n=1$, 2 это построение однозначно; при $n>2$ задание величин x_i, y_i, ω_i оставляет произвол в определении матриц C и M, которым можно воспользоваться, чтобы удовлетворить каким-либо дополнительным требованиям.

По матрицам M и C можно построить динамическую схему конструкции в виде комбинации n сосредоточенных масс, соединенных между собой и с основанием посредством идеальных невесомых пружин, шарниров и рычагов.

2. Рассмотрим задачу нахождения наименьшей массы идеально упругой системы с заданной частотной зависимостью коэффициента передачи. Как известно (см. также формулу (1.14)), коэффициент передачи силы идеально упругой системы с сосредоточенными параметрами представляется в виде

$$r(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i}{1-\omega^2/\omega_i^2} \tag{2.1}$$

причем

$$\sum_{i=1}^{n}z_i=1 \tag{2.2}$$

Последнее равенство отражает тот очевидный факт, что при статическом нагружении ($\omega=0$) $r=1$.

Утверждение 1. Наименьшее значение массы линейно-упругой системы, частотная зависимость коэффициента передачи силы которой имеет вид (2.1), равно

$$m_{\min}=c\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|/\omega_i\right)^2 \tag{2.3}$$

где c — статическая жесткость системы.

Доказательство. Сравнивая формулы (1.14) и (2.1), находим, что наименьшая масса при заданных c и $r(\omega)$ равна минимуму величины (1.10) по всем x_i, y_i, удовлетворяющим условиям $x_iy_i=z_i$ и (1.12). Составив функцию Лагранжа и продифференцировав ее по x_i, y_i, получим распадающуюся систему уравнений, из которой следует, что

$$y_i^2=\nu(x_i^2/\omega_i^2) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

(ν — множитель Лагранжа). Следовательно, минимум достигается при

$$y_i^2=\sqrt{\nu}|z_i|/\omega_i,\quad x_i^2/\omega_i^2=(1/\sqrt{\nu})\,|z_i|/\omega_i \tag{2.4}$$

Суммируя равенства (2.4) по i от 1 до n и исключая ν с помощью условия (1.12), получим для минимума массы выражение (2.3).

Из доказанного утверждения следует, что любую задачу о минимуме m при заданном c и произвольных ограничениях на функцию $r(\omega)$ можно решать в переменных z_i, определяя затем x_i, y_i по формулам (2.4), в которых $\nu=cm_{\min}$:

$$x_i^2=|z_i|\omega_i/c\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|/\omega_j\right) \tag{2.5}$$

$$y_i^2=c|z_i|\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|/\omega_j\right)\Big/\omega_i,\quad x_iy_i=z_i$$

Можно проверить непосредственно, что условие (1.17) при этом выполняется.

Полученные результаты позволяют, рассмотрев динамическую схему и частотную зависимость коэффициента передачи силы любой упругоинерционной виброизолирующей системы, определить, возможно ли достижение той же частотной зависимости $r(\omega)$ при той же статической жесткости в системе меньшей массы, найти наименьшее значение массы и построить динамическую схему соответствующей виброизолирующей конструкции.

3. Рассмотрим в качестве примеров два широко применяемых типа виброизолирующих устройств: двухкаскадную систему виброизоляции и систему с динамическим гасителем.

Утверждение 2. Наименьшая масса линейно-упругой системы, имеющей ту же статическую жесткость и ту же частотную зависимость коэффициента передачи силы, что и двухкаскадная система, изображенная на фиг. 1, равна

$$m_{\min}=m[(p-q)^2/(p+q^2)(p-2q)]$$
$$(m=m_1+m_2,\quad p=c_2/c_1+m_2/m_1+1,\quad q=\sqrt{c_2m_2/c_1m_1}) \tag{3.1}$$

При этом $m_{\min}<m$, если $q\neq 0$ и $(m_1/m_2)\neq(c_1/c_2)$.

Для доказательства нужно представить известное выражение для коэффициента передачи силы двухкаскадной системы

$$r(\omega)=\left[1-\left(\frac{m_2}{c_2}+\frac{m_1}{c_1}+\frac{m_1}{c_2}\right)\omega^2+\frac{m_1m_2}{c_1c_2}\omega^4\right]^{-1}$$

в виде (2.1). Имеем

$$\omega_1^2\omega_2^2=c_1c_2/m_1m_2,\quad \omega_1^2+\omega_2^2=c_2/m_2+c_1/m_1+c_1/m_2 \tag{3.2}$$

$$z_1=\omega_2^2/(\omega_2^2-\omega_1^2)>0,\ z_2=-\omega_1^2/(\omega_2^2-\omega_1^2)<0 \tag{3.3}$$

Согласно утверждению 1, наименьшая масса дается формулой (2.3), где $n=2$, $c=c_1c_2/(c_1+c_2)$. Подставив в эту формулу выражения (3.3) и воспользовавшись равенствами (3.2), получим после небольших преобразований формулу (3.1).

Утверждение 3. Наименьшая масса линейно-упругой системы, имеющей ту же статическую жесткость и ту же частотную зависимость коэффициента передачи силы, что и система с динамическим гасителем, изображенная на фиг. 2, равна

$$m_{\min}=m[(s+t)^2/s(s+2t+t^2)]$$
$$(m=m_1+m_2,\ s=1+m_2/m_1,\ t=\sqrt{m_2c_1/m_1c_2})$$

При этом $m_{\min}<m$ для любых конечных ненулевых значений параметров.

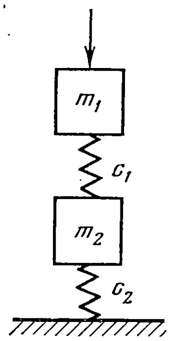
Доказательство проводится аналогично.

Следует отметить, что для значений параметров, обычно используемых в практике конструирования виброизолирующих систем [3], различие между $m_{\min}$ и m в обоих рассмотренных примерах незначительно.

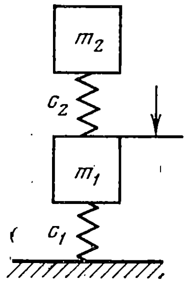
В качестве иллюстрации результатов, изложенных в предыдущих разделах, приведем явные формулы для элементов массы и упругости системы наименьшей массы при заданных c, $r(\omega)$ для случая $n=2$. Параметры x_i, y_i определяются формулами (2.5)

$$y_i^2=c\mu|z_i|/\omega_i,\ x_i^2=|z_i|\omega_i/c\mu$$

$$x_iy_i=z_i\ {\scriptstyle (i=1,\,2)},\ \mu=|z_1|/\omega_1+|z_2|/\omega_2$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Применяя процедуру построения матриц M и C, описанную в конце п. 1, получим для значений масс формулы

$$m_1=c\mu/\varkappa,\ m_2=c\mu(\mu-1/\varkappa)$$
$$\varkappa=|z_1|\omega_1+|z_2|\omega_2 \tag{3.4}$$

а для компонент матрицы жесткости

$$c_{11}=c\mu(|z_1|\omega_1^3+|z_2|\omega_2^3)/\varkappa^2$$
$$c_{12}=c\mu^2(\omega_2^2-\omega_1^2)(\omega_1|z_1|z_2-\omega_2 z_1|z_2|)/\varkappa^2$$
$$c_{22}=c\mu^2\omega_1\omega_2[|z_1z_2|(\omega_1^2+\omega_2^2)-2z_1z_2\omega_1\omega_2]/\varkappa^2 \tag{3.5}$$

Для примера рассмотрим построение системы, реализующей минимум массы, о котором говорится в утверждении 2. Пусть на фиг. 1 $m_1=m_2$, $c_2/c_1=4$. По формуле (3.1) получаем $m_{\min}=0.8m$. Расчет по формулам (3.2)–(3.5) дает $m_1=m_2=m_{\min}/2$, $c_{11}=-c_{12}=2c$, $c_{22}=4c$. Эти параметры соответствуют той же динамической схеме (фиг. 1); обе жесткости равны $2c$, а значения масс также равны между собой и составляют 0.8 от первоначальных величин.

4. В большинстве приложений представляют интерес не точные значения коэффициента передачи $r(\omega)$ при всех частотах, а лишь его максимальные допустимые значения в некоторой области частот Ω. Таким образом, возникает задача о минимуме массы при заданной виброизоляции в заданной области частот. В силу формул (2.1), (2.3) эта задача сводится к определению нижней грани величины μ:

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}|z_i|/\omega_i\to\inf \tag{4.1}$$

по всем n и всевозможным наборам действительных чисел z_i и положительных, не принадлежащих Ω чисел ω_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющих условиям (2.2) и

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i}{1-\omega^2/\omega_i^2}\right|\leqslant\varepsilon(\omega),\quad \omega\in\Omega \tag{4.2}$$

при этом

$$m_{\min}=c\mu^2 \tag{4.3}$$

Статическая жесткость системы c и функция $\varepsilon(\omega)$, характеризующая требуемую эффективность виброизоляции, считаются заданными.

Решение сформулированной задачи определяет предельные возможности всего класса линейных упругоинерционных виброизолирующих систем независимо от особенностей конкретных конструкций.

Задача (4.1), (2.2), (4.2) представляет значительные трудности не только для аналитического, но и для численного решения. Можно, однако, вывести аналитически некоторые общие оценки наименьшей массы снизу. Далее намечена последовательность получения этих оценок. Область Ω считается состоящей из нескольких отрезков положительной полуоси ω.

Сначала рассматривается упрощенный вариант задачи, а именно предполагается, что в формулах (4.1), (4.2) собственные частоты ω_i заданы. Эту последнюю задачу можно поставить как задачу приближения нулевого элемента в n-мерном векторном пространстве, норма в котором определяется как сумма модулей компонент, с бесконечным числом ограничений. При этом базисные векторы суть $(\omega_1^{-1}, 0, \ldots, 0)$, $(0, \omega_2^{-1}, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, \omega_n^{-1})$; ограничения задаются формулами (2.2), (4,2). Пользуясь теоремой двойственности для этого класса задач, доказанной в гл. 9 [12], можно показать, что значение нижней грани μ по z_i равно значению верхней грани для экстремальной задачи в некотором функциональном пространстве с конечным числом ограничений, каждое из которых соответствует одному из ω_i. Решение исходной задачи (4.1), (2.2), (4.2) есть нижняя грань решений построенной таким образом двойственной задачи по всем возможным наборам $\{\omega_i\}$. Доказывается, далее, что решение двойственной задачи лишь уменьшается при расширении множества $\{\omega_i\}$, так что искомая нижняя грань достигается, если предположить, что ω_i пробегают все допустимое множество $C\Omega$ (дополнение Ω до положительной полуоси). После некоторых упрощающих преобразований получаем следующий результат.

Утверждение 4. Нижняя грань $\mu_{\min}$ величины (4.1) по всем n и всевозможным наборам z_i, ω_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющим условиям (2.2), (4.2), $\omega_i>0$, $\omega_i \in \Omega$, равна

$$\mu_{\min} = \sup \int_\Omega [h(\xi) - \varepsilon |h(\xi)|] d\xi \tag{4.4}$$

где sup берется по всем гладким функциям $h(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$\left| \int_\Omega \frac{\xi^2 h(\xi)\, d\xi}{\xi^2 - \omega^2} \right| \leqslant \frac{1}{\omega}, \quad \omega \in \Omega \tag{4.5}$$

Последнее утверждение открывает возможность получения оценок наименьшей массы снизу. Для этого достаточно вычислить интеграл в правой части (4.4) для любой функции $h(\xi)$, удовлетворяющей (4.5). Например, взяв в качестве области Ω отрезок $[\omega_-, \omega_+]$, положив $\varepsilon=\mathrm{const}$, $\varepsilon<1$ и рассмотрев δ-образную последовательность функций $h(\xi)$, стремящуюся к $h_0\delta(\xi-\xi_0)$, получим, что $\mu_{\min} \geqslant (1-\varepsilon)(\omega_+ - \omega_-)/\omega_+\omega_-$, т. е. в силу (4.3)

$$m_{\min} \geqslant c \frac{(1-\varepsilon)^2}{\omega_-^2} \left(1 - \frac{\omega_-}{\omega_+}\right)^2, \quad \varepsilon = \max_{\omega_- \leqslant \omega \leqslant \omega_+} |r(\omega)| \tag{4.6}$$

Неравенство (4.6) не содержит числа степеней свободы системы. Оно справедливо для линейно-упругих систем с любым числом степеней свободы произвольной структуры. При $\varepsilon \to 1$, $\omega_-/\omega_+ \to 1$, $\omega_- \to \infty$ или $c \to 0$ правая часть (4.6) обращается в нуль, что соответствует точному значению минимума.

Представляет особый интерес получение оценки, отражающей возрастание наименьшей возможности массы при повышении требований к виброизоляции. Прежде чем перейти к построению такой оценки, приведем формулировку утверждения 4 в терминах аналитических функций. Будем считать $\Omega=[\omega_-,\omega_+]$, $\varepsilon=\mathrm{const}$, $\varepsilon<1$. Выполнив в (4.4), (4.5) замену переменных $\xi^2=\tau$, $h(\xi)d\xi=h_1(\tau)d\tau$, введем функцию комплексного переменного

$$H(z)=\int\limits_{\omega_-^2}^{\omega_+^2}\frac{\tau h_1(\tau)\,d\tau}{\tau-z}$$

В силу вещественности функции $h_1(\tau)$ имеем $H(\bar z)=\overline{H(z)}$. Используя это свойство, а также формулу Сохоцкого — Племеля $H^+(\tau)-H^-(\tau)=2\pi i\tau h_1(\tau)$, найдем $\pi\tau h_1(\tau)=\mathrm{Im}H^+(\tau)=-\mathrm{Im}H^-(\tau)$.

Пользуясь формулой Коши, получаем, что задача (4.4), (4.5) эквивалентна задаче о нахождении верхней грани

$$\mu_{\min}=\sup\left[H(0)-\frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{\omega_-^2}^{\omega_+^2}|\mathrm{Im}\,H(\lambda)|\frac{d\lambda}{\lambda}\right]\tag{4.7}$$

где sup берется по всем функциям $H(z)$, аналитическим в расширенной комплексной плоскости с выброшенным отрезком $[\omega_-^2,\omega_+^2]$, непрерывно продолжимым на этот отрезок и принимающим на действительной оси вне его действительные значения, удовлетворяющие условию $|H(\lambda)|\leqslant 1/\sqrt{\lambda}$, $0\leqslant\lambda\leqslant\omega_-^2$, $\omega_+^2\leqslant\lambda<\infty$.

Под $H(\lambda)$, $\omega_-^2\leqslant\lambda\leqslant\omega_+^2$ в формуле (4.7) понимается любое предельное значение $H(z)$ при $z\to\lambda$ (их мнимые части отличаются лишь знаком).

Выберем

$$H(z)=\frac{\sin[\alpha(\sqrt{(z-\omega_-^2)(z-\omega_+^2)}-z+{}^1/_2(\omega_-^2+\omega_+^2))\sqrt{z}]}{\sqrt{z}}\tag{4.8}$$

Ветвь корня квадратного выделяется условием $z^{-1}\sqrt{(z-\omega_-^2)(z-\omega_+^2)}\to 1$, $z\to\infty$. Нетрудно проверить, что функция (4.8) удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям. Выражение под знаком sup в (4.7) дает оценку снизу величины μ. Непосредственно из (4.8) имеем

$$H(0)=\alpha(\omega_+^2-\omega_-^2)/2\tag{4.9}$$

$$|\mathrm{Im}\,H(\lambda)=(1/\sqrt{\lambda})\,\mathrm{sh}[\alpha\sqrt{\lambda(\lambda-\omega_-^2)(\omega_+^2-\lambda)}]\,|\cos[\alpha(\lambda-(\omega_+^2+\omega_-^2)/2)\sqrt{\lambda}]|\quad(\omega_-^2\leqslant\lambda\leqslant\omega_+^2)$$

Пользуясь неравенством $\mathrm{sh}\,\beta\leqslant(\beta/\beta_0)\,\mathrm{sh}\,\beta_0$ $(0\leqslant\beta\leqslant\beta_0)$, легко показать, что

$$\int\limits_{\omega_-^2}^{\omega_+^2}|\mathrm{Im}\,H(\lambda)|\frac{d\lambda}{\lambda}\leqslant\frac{\mathrm{sh}\,\alpha A}{A}\frac{\pi}{2}(\omega_+^2-\omega_-^2)\tag{4.10}$$

где A — максимальное значение $\sqrt{\lambda(\lambda-\omega_-^2)(\omega_+^2-\lambda)}$ на отрезке $\omega_-^2\leqslant\lambda\leqslant\omega_+^2$: $A=(\omega_-^3/3\sqrt{3})[2(\rho^4-\rho^2+1)^{3/2}+2(\rho^6+1)-3\rho^2(\rho^2+1)]^{1/2}$ $(\rho=\omega_+/\omega_-)$

Неравенство (4.10) остается справедливым, если A заменить бо́льшим числом; заметим, что $A\leqslant{}^1/_2\omega_-^3\rho(\rho^2-1)$.

Из (4.7), (4.9), (4.10) следует, что $\mu_{\min}\geqslant(\omega_+-\omega_-)^2[\alpha A-\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\alpha A]/2A$. Величина α определяется из условия максимума правой части. Имеем с учетом (4.3)

$$m_{\min}\geqslant c\frac{(\omega_+-\omega_-)^4}{4A^2}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}-\sqrt{1-\varepsilon^2}\right]^2 \tag{4.11}$$

Можно записать также упрощенную оценку

$$m_{\min}\geqslant c\frac{(\omega_+-\omega_-)^2}{\omega_+^2(\omega_++\omega_-)^2}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}-\sqrt{1-\varepsilon^2}\right]^2 \tag{4.12}$$

Оценки (4.11), (4.12), как и (4.6), справедливы для систем произвольной структуры с любым числом степеней свободы. Из них следует, что $m_{\min}$ стремится к бесконечности по меньшей мере, как $cO(\ln^2 \varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$.

Покажем, что найденный порядок возрастания $m_{\min}$ при $\varepsilon\to 0$ является точным. Рассмотрев известное выражение для коэффициента передачи силы $r(\omega)$ цепочки из n одинаковых масс и жесткостей [13], можно показать, что при малых ε масса цепочки, обеспечивающей $|r(\omega)|<\varepsilon$, $\omega\geqslant\omega_-$ при общей статической жесткости c, равна

$$m=(c/\omega_-^2)\,(n^2/\sqrt[n]{\varepsilon}) \tag{4.13}$$

Найдя огибающую правой части (4.13), получим, что $m_{\min}$ растет при $\varepsilon=0$ не быстрее, чем $(c/\omega_-^2)\,(e^2\,4)\ln^2\varepsilon$.

Таким образом, найдена следующая асимптотика наименьшей массы при малых ε:

$$m_{\min}=cO(\ln^2\,\varepsilon) \tag{4.14}$$

Степень виброизоляции обычно выражается в логарифмическом масштабе в децибелах. Асимптотика (4.14) позволяет сформулировать

Утверждение 5. При увеличении требований к виброизоляции в данной области частот при данной статической жесткости наименьшая возможная масса отвечающей этим требованиям линейной упругоинерционной виброизолирующей системы возрастает как квадрат величины виброизоляции, выраженной в децибелах.

Поступила 7 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ден-Гартог Дж. Г.* Механические колебания. М., Физматгиз, 1960.
2. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М., «Наука», 1967.
3. *Беляковский Н. Г.* Конструктивная амортизация механизмов, приборов и аппаратуры на судах. Л., «Судостроение», 1965.
4. Вибрация энергетических машин. Справочное пособие. Под ред. Н. В. Григорьева. Л., «Машиностроение», 1974.
5. *Munjal M. L.* A rational synthesis of vibration isolator. J. Sound Vibr., 1975, vol. 39, No. 2.
6. *Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д., Мальцев К. И.* Конструирование, расчет и испытание решеточных фундаментов и опор. В сб.: Динамика и акустика машин. М., «Наука», 1971.
7. *Рябой В. М., Яблонский В. В.* Метод увеличения виброизоляции в некоторых стержневых конструкциях. В сб.: Виброизолирующие системы в машинах и механизмах. М., «Наука», 1977.
8. *Клюкин И. И.* О критериях виброизоляции и соотношениях между ними. Акуст. ж., 1975, т. 21, № 5.
9. *Коловский М. З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М., «Наука», 1976.
10. *Гурецкий В. В., Мазин Л. С.* Синтез оптимальной виброзащитной системы при учете динамических свойств амортизирующего крепления. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 3.
11. *Григорьев Н. В., Иванов А. И.* О снижении динамических реакций на корпусе. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1.
12. *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М., «Наука», 1971.
13. *Нагаев Р. Ф., Ходжаев К. Ш.* Колебания механических систем с периодической структурой. Ташкент, «Фан», 1973.