

ДИНАМИКА ДВУНОГОЙ ХОДЬБЫ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ ДВИЖЕНИЯ

Э. К. ЛАВРОВСКИЙ

(Москва)

Рассматривается приближенный способ построения периодических походок двуногого шагающего аппарата с невесомыми ногами при больших скоростях движения. Предполагается, что аппарат совершает плоское, комфортабельное движение [1]. Решения, описывающие колебания корпуса, строятся в рядах по малому параметру. Исследуется также энергетика и устойчивость полученных периодических решений.

1. Постановка задачи. Рассматривается процесс одноопорной ходьбы плоского двуногого аппарата (фиг. 1), состоящего из пяти звеньев, которые моделируют «корпус» и «ноги» [1-3]. Передвижение механизма по поверхности осуществляется подачей управляющих воздействий в тазобедренном и коленном суставах.

Предполагая массу ног пренебрежимо малой, имеем следующую систему уравнений движения аппарата [1]:

$$Mx'' - k_r(\psi'' \cos \psi - \psi'^2 \sin \psi) = R_x, \quad k_r = Mr \quad (1.1)$$

$$My'' - k_r(\psi'' \sin \psi + \psi'^2 \cos \psi) = R_y - Mg$$

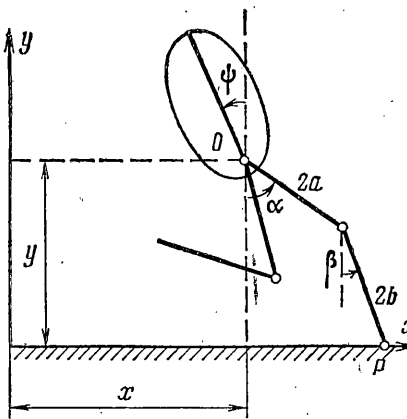
$$J\psi'' - k_r(x'' \cos \psi + y'' \sin \psi) - gk_r \sin \psi = q$$

$$x = x_p - 2(a \sin \alpha + b \sin \beta), \quad y = y_p + 2(a \cos \alpha + b \cos \beta)$$

$$-u - q + 2a(R_x \cos \alpha + R_y \sin \alpha) = 0$$

$$u + 2b(R_x \cos \beta + R_y \sin \beta) = 0$$

Здесь x, y — декартовы координаты «таза» (точка O), x_p, y_p — координаты конца опорной ноги (точка P), R_x, R_y — составляющие силы реакции опоры, q, u — управляющие «тазобедренный» и «коленный» моменты в опорной ноге, ψ, α, β — углы с вертикалью корпуса, а также «бедра» и «голени» опорной ноги, $2a, 2b$ — линейные размеры бедра и голени; M — масса всей системы; r — расстояние центра масс корпуса до точки O , J — момент инерции корпуса относительно точки O , g — ускорение силы тяжести.



Фиг. 1

Первые два уравнения (1.1) являются следствием теоремы о движении центра масс системы. Следующее уравнение выражает теорему об изменении кинетического момента системы относительно точки O . Последующие уравнения (1.1) — кинематические условия и условия равновесия опорной ноги.

Ввиду высокого порядка системы (1.1) задачу построения походки целесообразно решать при помощи полуобратного метода, при котором движение частично задается в явном виде, частично определяется из решения некоторых уравнений. Воспользуемся принципом комфортабельности движения точки O [1]. Полагая $x_p - x = \sigma - Vt$, $y - y_p = h$, где σ , V , h — некоторые параметры, а t — текущее время, из системы (1.1) можно получить следующее уравнение компенсирующих колебаний корпуса [1]:

$$\begin{aligned} & \{J + k_r h \cos \psi - k_r (Vt - \sigma) \sin \psi\} \psi'' - \\ & - k_r \psi'^2 \{(Vt - \sigma) \cos \psi + h \sin \psi\} - k_r g \sin \psi = -Mg(Vt - \sigma) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь V , h , σ — соответственно скорость, высота походки и передний вынос опорной ноги. Ставится задача исследования периодических решений уравнения (1.2), т. е. решений, удовлетворяющих условию

$$\psi(0) = \psi(T), \quad \psi'(0) = \psi'(T) \quad (1.3)$$

где T — период шага. Уравнение (1.2) поэтому достаточно рассматривать на временном отрезке одного шага $0 \leq t \leq T$.

Все остальные переменные, входящие в систему (1.1), могут быть найдены после того, как решена краевая задача (1.2), (1.3).

2. Преобразование задачи при больших скоростях. Аналитическое исследование периодических решений нелинейного уравнения (1.2) представляет определенную трудность. Построим эти решения приближенно для случая достаточно большой скорости движения V . Длину шага $L = VT$ при этом будем считать неизменной. Приближенные решения позволяют уяснить в целом структуру решений краевой задачи (1.2), (1.3), получить надежное первое приближение для ее численного анализа, с их помощью удастся исследовать предельную энергетику ходьбы и т. д. Это исследование сводится к вычислению явных квадратур взамен решения (на предварительном этапе) более трудоемкой краевой задачи (1.2), (1.3).

Переходя в (1.2) к новой независимой переменной $\tau = (Vt - \sigma)/h$, получим

$$(y_1)_{\tau} = y_2, \quad (y_2)_{\tau} = y_2^2 \Phi(\tau, y_1) + \varepsilon F(\tau, y_1) \quad (2.1)$$

$$\Phi(\tau, y_1) = (\tau \cos y_1 + \sin y_1) / (I + \cos y_1 - \tau \sin y_1)$$

$$F(\tau, y_1) = (\sin y_1 - D\tau) / (I + \cos y_1 - \tau \sin y_1)$$

$$I = J/k_r h, \quad D = Mh/k_r, \quad \varepsilon = gh/V^2$$

где переменные y_1 и y_2 имеют смысл соответственно ψ и ψ_{τ}' .

Обозначим $\tau_0 = -\sigma/h$, $\tau_k = (L - \sigma)/h$, тогда условие периодичности (1.3) преобразуется к виду

$$\psi(\tau_0) = \psi(\tau_k) = \psi_0, \quad \psi_{\tau}'(\tau_0) = \psi_{\tau}'(\tau_k) = \psi_0' \quad (2.2)$$

Положим $\varepsilon = 0$ и рассмотрим порождающее периодическое семейство решений $\psi = \text{const}$ уравнения (2.1). Можно показать, что уравнение (2.1) других периодических решений в этом случае не имеет.

Действительно, система (2.1) имеет при $\varepsilon = 0$ следующий первый интеграл:

$$(I + \cos y_1 - \tau \sin y_1) y_2 - \cos y_1 = \text{const} \quad (2.3)$$

Следовательно, начальные условия периодических решений удовлетворяют соотношению

$$y_2(\tau_0) \sin y_1(\tau_0) = 0 \quad (2.4)$$

Пусть коэффициент при старшей производной в уравнении (1.2) на порождаю-

щих решениях не равен нулю¹, т. е. не равен нулю знаменатель функций Φ и F в правой части (2.1). Тогда в силу теоремы о существовании и единственности решений системы дифференциальных уравнений заключаем, что наряду с семейством $\psi = \text{const}$ могут существовать периодические решения, для которых $\sin y_1(\tau_0) = 0$.

Рассмотрим интеграл (2.3). Когда при каком-либо τ значение $y_1 \rightarrow y_1(\tau_0) = 0, \pi$, то функция y_2 стремится на этом решении к одной и той же величине $y_2^0 = y_2(\tau_0)$. Если $y_2^0 = 0$, то данное периодическое решение принадлежит к типу $\psi = \text{const}$. Если же $y_2^0 \neq 0$, то интегральная кривая не может вернуться к начальному значению по y_1 , поскольку при $y_1 \sim y_1(\tau_0)$ производная процесса $dy_1/d\tau$ имеет знак величины y_2^0 . Следовательно, нарушается условие периодичности (2.2); таким образом, $y_2^0 = 0$.

Рассмотрим, возможно ли продолжение порождающих решений семейства $\psi = \text{const}$ на область $\varepsilon \neq 0$ [4, 5]. С этой целью запишем уравнения в вариациях к системе (2.1) на порождающих решениях

$$(\delta y_1)'_{\tau} = \delta y_2, \quad (\delta y_2)'_{\tau} = 0 \quad (2.5)$$

Периодическое семейство решений уравнения в вариациях, сопряженного (2.5), имеет вид $\delta z_1 = 0, \delta z_2 = \text{const}$.

Условие продолжаемости периодических решений связано с исследованием корней некоторой функции $P(C)$, структура которой определяется [4, 5] характером поведения функций $\delta z_1, \delta z_2$, а также видом коэффициента при ε в (2.1) — функции $F(\tau, y_1)$:

$$P(C) = \int_{\tau_0}^{\tau_k} \frac{\sin C - D\tau}{I + \cos C - \tau \sin C} d\tau = 0 \quad (2.6)$$

где C — величина постоянной в формуле порождающего семейства $\psi = \text{const}$.

Предполагая условие (2.6) выполненным, рассмотрим процесс построения первого и второго приближений периодического решения. Зададимся формой разложения периодического решения

$$\begin{aligned} y_1(\tau) &= C + \varepsilon y_1^{(1)}(\tau) + \varepsilon^2 y_1^{(2)}(\tau) + \dots \\ y_2(\tau) &= \varepsilon y_2^{(1)}(\tau) + \varepsilon^2 y_2^{(2)}(\tau) + \dots \end{aligned}$$

Первое приближение удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$(y_1^{(1)})'_{\tau} = y_2^{(1)}, \quad (y_2^{(1)})'_{\tau} = F(\tau, C) \quad (2.7)$$

Тем самым условие (2.6) является по сути условием периодичности угловой скорости y_2 в первом приближении. Из (2.7) после некоторых преобразований находим

$$y_1^{(1)}(\tau) = A\tau + B + \frac{D\tau^2}{2\sin C} + \left[\frac{DI^*}{\sin^2 C} - 1 \right] \int_0^{\tau} \ln I_1^*(\tau) d\tau \quad (2.8)$$

$$y_2^{(1)}(\tau) = A + \frac{D\tau}{\sin C} + \left[\frac{DI^*}{\sin^2 C} - 1 \right] \ln I_1^*$$

$$I_1^*(\tau) = \frac{I^* - \tau \sin C}{I^*}, \quad I^* = I + \cos C$$

где A и B — некоторые постоянные, подлежащие определению.

Постоянная A определяется из условия периодичности функции

$$A = \frac{1}{\tau_k - \tau_0} \left[\frac{D(\tau_0^2 - \tau_k^2)}{2\sin C} + \left(\frac{DI^*}{\sin^2 C} - 1 \right) \int_{\tau_k}^{\tau_0} \ln I_1^* d\tau \right] \quad (2.9)$$

¹ Это допущение принято и всюду ниже.

Постоянная B определяется из условия периодичности угловой скорости во втором приближении. Дифференциальные уравнения второго приближения имеют вид

$$(y_1^{(2)})' = y_2^{(2)}, \quad (y_2^{(2)})' = F_1(\tau, C) (y_2^{(1)}(\tau))^2 + F_2(\tau, C) y_1^{(1)} \quad (2.10)$$

$$F_1(\tau, C) = \Phi(\tau, C), \quad F_2(\tau, C) = \partial F(\tau, C) / \partial C$$

откуда следует

$$\int_{\tau_0}^{\tau_h} F_1(\tau, C) (y_2^{(1)})^2 d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau_h} \left\{ A\tau + \frac{D\tau^2}{2\sin C} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{DI^*}{\sin^2 C} - 1 \right] \int_0^{\tau_h} \ln I_1^* d\tau \right\} F_2(\tau, C) d\tau = -B \int_{\tau_0}^{\tau_h} F_2(\tau, C) d\tau = -BP_c'(C) \quad (2.11)$$

Отметим специфический характер зависимости правых частей неоднородных систем (2.7), (2.10). Однородные уравнения, полученные из (2.7), (2.10), а также уравнения всех последующих приближений по всей структуре совпадают [4, 5]. Это обстоятельство позволяет (если выполнено условие (2.6) и $P'(C) \neq 0$) построить второе и все последующие приближения периодического решения в виде явных квадратур.

3. Исследование функции P . В дальнейшем для простоты будем рассматривать случай симметричного опорного отрезка ноги $\sigma = L/2$. Отсюда $\tau_0 = -\tau_*$, $\tau_h = \tau_*$, $\tau_* = L/(2h)$.

Условие (2.7) примет вид

$$P(C) = \frac{2D\tau_*}{\sin C} + \left[\frac{D(I + \cos C)}{\sin^2 C} - 1 \right] \ln \frac{I + \cos C - \tau_* \sin C}{I + \cos C + \tau_* \sin C} = 0 \quad (3.1)$$

Нетрудно видеть, что значения $C=0$ и $C=\pi$ удовлетворяют в пределе (3.1). Поскольку $P(C)$ — нечетная функция, то на интервале $C \in [0, 2\pi)$ она имеет всегда четное число корней. Пусть $I \neq 1$. Разлагая в ряд по малому параметру $\sin C / (I + \cos C)$ центральный член формулы (3.1), значения функции $P(C)$ можно приближенно представить при $\sin C \sim 0$ в следующем виде:

$$P(C) = \frac{2\tau_* \sin C}{I + \cos C} \left\{ 1 - \frac{D\tau_*^2}{3(I + \cos C)} \right\} + O(1) \sin^2 C \quad (3.2)$$

Формула (3.2) позволяет оценить знак функции $P(C)$ и ее производной в окрестности корней $C=0$ и $C=\pi$. С ее помощью можно доказать ряд достаточных утверждений о числе корней функции P . Приведем некоторые из них.

Утверждение 1. Если

$$I > \sqrt{1 + \tau_*^2}, \quad \frac{D\tau_*^2}{3(I-1)} > 1 > \frac{D\tau_*^2}{3(I+1)}$$

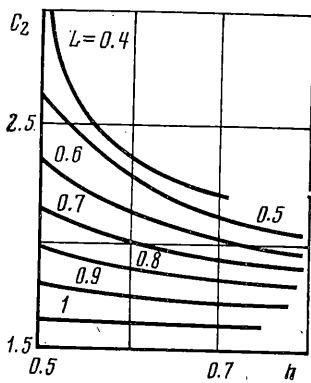
то функция $P(C)$ имеет на множестве $C \in [0, 2\pi)$ не менее четырех корней. Доказательство следует непосредственно из формулы (3.2).

Утверждение 2. Если

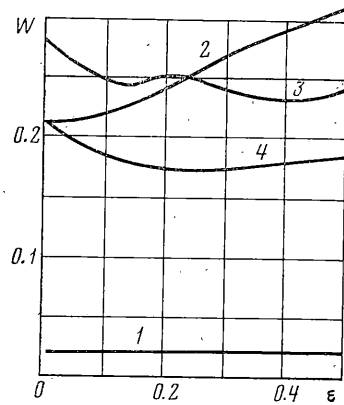
$$I > \sqrt{1 + \tau_*^2}, \quad 3(I-1) > D\tau_*^2 \quad (3.3)$$

$$2D\tau_* + (DI-1) \ln(I - \tau_*) / (I + \tau_*) < 0$$

то функция $P(C)$ на множестве $C \in [0, 2\pi)$ имеет не менее шести корней.



Фиг. 2



Фиг. 3

Нетрудно убедиться в том, что множество значений (I, D, τ_*) , удовлетворяющих этой системе неравенств, не пусто¹. Доказательство утверждения следует из (3.2), если учесть, что левая часть неравенства (3.3) равна $P(C=\pi/2)$.

При $I < \sqrt{1+\tau_*^2}$ существует область Ω значений C , для точек которой выражение $(I + \cos C - \tau \sin C)$ — знаменатель функций $\Phi(\tau, C)$ и $F(\tau, C)$ в (2.1), обращается в нуль внутри отрезка $\tau \in [-\tau_*, \tau_*]$. Исключим множество Ω из рассмотрения, поскольку в противном случае уравнения приближений периодического решения типа (2.7), (2.11) не имеют смысла. Для оставшегося после исключения из интервала $C \in [0, 2\pi]$ множества Ω (это множество назовем ω) можно сформулировать ряд утверждений о числе корней $P(C)$. Укажем одно из них.

Утверждение 3. Если

$$I \leq \sqrt{1+\tau_*^2}, \quad \frac{\tau_* D(1+\tau_*^2)}{\tau_* I + \sqrt{1+\tau_*^2} + I^2} > 1 > \frac{D\tau_*^2}{3(I+1)}$$

то функция $P(C)$ имеет в области ω не менее четырех корней.

Доказательство утверждения следует из формулы (3.2), а также из анализа поведения функции $P(C)$ в окрестности границы ω .

Приведенные утверждения показывают, что функция P в довольно широком диапазоне изменения конструктивных параметров аппарата имеет более двух корней. Корни P , значения которых не совпадают ни с $C=0$, ни с $C=\pi$, назовем дополнительными.

4. Численное исследование. Приведем результаты исследования корней функции $P(C)$ для аппарата антропоморфной конструкции с параметрами: $M=70$ кг, $J=9.63$ кгм², $k_r=17$ кгм, $a=b=0.225$ м. Данные значения параметров отвечают аппарату с корпусом в виде стержня с равномерно распределенной массой и с сосредоточенным весом в точке таза; длина корпуса ~ 0.85 м, общая высота аппарата ~ 1.75 м. Рассматривались походки с симметричным опорным отрезком.

Обозначим через $C_1=0, C_2, C_3$ и т. д. все корни функции $P(C)$ на интервале $[0, 2\pi]$ в порядке возрастания их величин. Рассмотрим антропоморфный диапазон² изменения высот и длин шага $0.4 \text{ м} \leq h \leq 0.8 \text{ м}$, $0.4 \text{ м} \leq L \leq 1 \text{ м}$. Как показывают результаты численного исследования, функция

¹ Этой области принадлежит, например, точка $I=3, D=0.74, \tau_*=2.827$.

² Точнее рассматриваются такие точки (h, L) из этого диапазона изменения параметров, которые при данной длине ног 0.9 м могут реально отвечать каким-либо походкам.

P в этом случае имеет, как правило, четыре корня C , отвечающих порождающим решениям задачи: $C_1=0$, $C_2=C_2(h, L)$, $C_3=\pi$ и $C_4=2\pi-C_2(h, L)$. Зависимость $C_2=C_2(h, L)$ показана на фиг. 2. Значения C_2 (рад) строятся в функции параметра h (м) для величин $L=0.4, 0.5$ м и т. д. Только при $L=0.4$ м и $0.71 \text{ м} \leq h \leq 0.8$ м число корней сокращается до двух (см. фиг. 2).

Отметим, что при росте L корень $C_2 \rightarrow \pi/2$, т. е. другой дополнительный корень $C_4 \rightarrow 3\pi/2$. В этих положениях корпус расположен под прямым углом к вертикали. Наконец, корни функции $P(C)$ не являются, вообще говоря, кратными, т. е. dP/dC при этих значениях не равны нулю.

Рассмотрим, насколько возможна точная реализация периодических решений по первому приближению. Периодические решения по первому приближению определялись по формулам (2.8)–(2.11). На фиг. 3 представлены графики, характеризующие различия между приближенным и точным периодическим решением. В качестве временного момента сравнения выбрана точка начала (или конца) периодического решения $\tau = \pm \tau_*$. Замечено, что в окрестности этих положений точное и приближенное решения различаются наиболее резко. Обозначим

$$W(\varepsilon) = [(y_1^0 - y_1^I)^2 + 4\tau_*^2 (y_2^0 - y_2^I)^2]^{1/2} / \varepsilon$$

где y_1^0, y_2^0 и y_1^I, y_2^I — соответственно начальные значения фазовых переменных системы (2.1) на точном и приближенном периодических решениях. Кривые 1–4 на фиг. 3 являются графиками функций W , отвечающих соответственно корням $C_1=0, C_2, C_3=\pi$ и C_4 , в случае $h=L=0.5$ м.

Таким образом, точность реализации периодических решений различается весьма сильно: для «верхнего» положения корпуса $C_1=0$ она на порядок лучше. Худшая точность реализации у корня C_2 и корня $C_3=\pi$, отвечающего «нижнему» положению корпуса. Такая картина довольно типична и при других значениях параметров h и L . Как правило, точность реализации убывает с ростом h и L ; однако довольно часто приближенное решение дает удовлетворительную точность вплоть до значений скорости V в 3–5 м/с и даже меньше.

5. Энергетика периодических решений. Введем в рассмотрение функционал энергии

$$E = \int_0^{\tau} \{ |q(\alpha' - \psi')| + |u(\alpha' - \beta')| \} dt \quad (5.1)$$

Подынтегральная функция в (5.1) представляет сумму модулей производной механической работы, затрачиваемой в тазобедренном и коленном суставе аппарата в процессе ходьбы. Функции $\psi, \alpha, \beta, u, q$ удовлетворяют системе (1.1). В частности, из кинематических соотношений в (1.1) вытекает, что

$$\alpha'_\tau = \frac{\kappa \sin \beta}{\sin \varphi}, \quad \beta'_\tau = -\frac{\kappa \sin \alpha}{\sin \varphi}, \quad \kappa = \frac{h}{2a}, \quad \varphi = \alpha - \beta \quad (5.2)$$

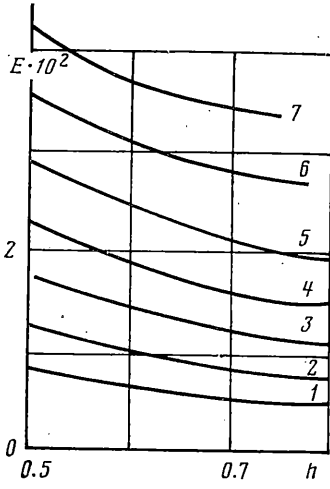
$$\sin \beta = -\frac{\kappa}{2} \frac{\tau(1 + \cos \varphi) + \sin \varphi}{1 + \cos \varphi}, \quad \sin \alpha = -\sin \beta - \tau \kappa \quad (5.3)$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} [\kappa^2(1 + \tau^2) - 2], \quad \cos \beta = \frac{\kappa}{2} \frac{(1 + \cos \varphi) - \tau \sin \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

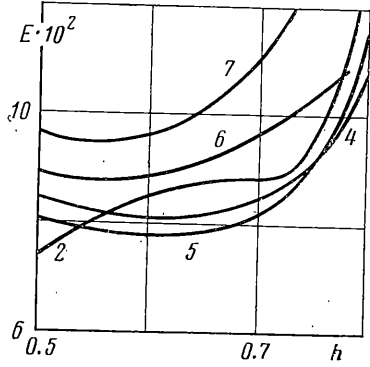
Формулы (5.2) и (5.3) получены в предположении $a=b$.

Разрешим первые два уравнения (1.1) относительно величин R_x и R_y :

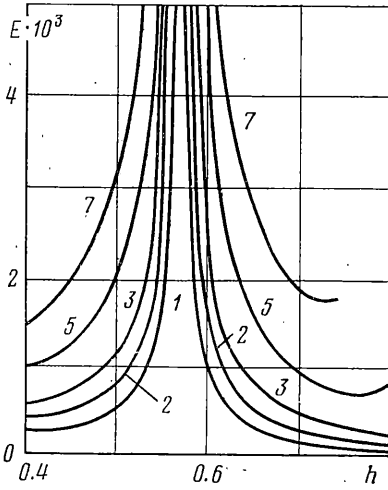
$$R_x = k_r (\psi'^2 \sin \psi - \psi'' \cos \psi), \quad R_y = Mg - k_r (\psi'^2 \cos \psi + \psi'' \sin \psi)$$



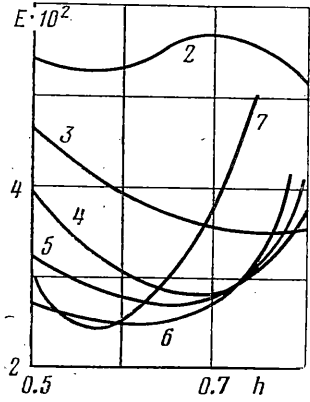
Фиг. 4



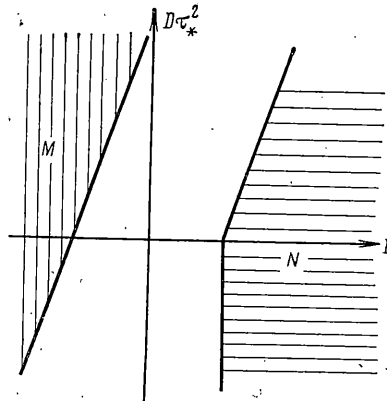
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

Поскольку

$$\psi' = y_2 \frac{d\tau}{dt} = [\varepsilon y_2^{(1)}(\tau) + \varepsilon^2 y_2^{(2)}(\tau) + \dots] \frac{V}{h}$$

$$\psi'' = (y_2)_{\tau'} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = [\varepsilon (y_2^{(1)})_{\tau'} + \varepsilon^2 (y_2^{(2)})_{\tau'} + \dots] \frac{V^2}{h^2}$$

значения величин R_x, R_y с первой степенью точности по ε равны

$$R_x = k_r \frac{g}{h} \{-F(\tau, C) \cos C + \varepsilon [(y_2^{(1)})^2 \sin C + y_1^{(1)} (y_2^{(1)})_{\tau'} \sin C - \cos C (y_2^{(2)})_{\tau'}]\}$$

$$R_y = Mg - k_r \frac{g}{h} \{F(\tau, C) \sin C + \varepsilon [(y_2^{(2)})_{\tau'} \sin C +$$

$$+ (y_2^{(1)})^2 \cos C + y_1^{(1)} (y_2^{(1)})_{\tau'} \cos C]\}$$
(5.4)

где первое и второе приближения процесса, а также их производные по τ могут быть выражены в явном виде по формулам (2.7)–(2.11). Перейдем к новой переменной τ в интеграле энергии (5.1)

$$E = \int_{\tau_0}^{\tau_h} \{ |q(\tau) (\psi_{\tau'} - \alpha_{\tau}')| + |u(\tau) (\alpha_{\tau}' - \beta_{\tau}')| \} d\tau \quad (5.5)$$

$$\psi_{\tau'} = \varepsilon y_2^{(1)}(\tau) + \varepsilon^2 y_2^{(2)}(\tau) + \dots$$

Управляющие моменты выражаются как функции τ согласно (4.1) по формулам

$$q = h[R_x - \tau R_y], \quad u = -2a(R_x \cos \beta + R_y \sin \beta),$$

причем силы реакции и угол β определяются по (5.3) и (5.4). Наконец, угловые скорости α_{τ}' и β_{τ}' вычисляются по формуле (5.2). Таким образом, применение метода малого параметра позволяет свести задачу нахождения энергетик периодических решений к вычислению квадратуры (5.5).

На фиг. 4–7 показана зависимость $E = E(L, h)$ на порождающих решениях (кривые 1–7 соответствуют значениям $L = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$ м). Расчеты производились при тех же параметрах аппарата. Фиг. 4 отвечает энергетике решений корня $C_1 = 0$, фиг. 5 — корня C_2 , фиг. 6 — корня $C_3 = \pi$, фиг. 7 — корня C_4 (E — в Дж, h — в м). Из рассмотрения графиков можно сделать ряд выводов.

На фиг. 4 энергетика ходьбы с корпусом в верхнем положении $\psi = C_1 = 0$ убывает с ростом высоты h и длины шага L . При нижнем положении корпуса (фиг. 6) основные тенденции поведения функционала E те же. Однако эта зависимость носит более сложный характер. Расчеты выявляют своеобразную резонансную зону при высотах порядка 0.56 м. Наличие ее объясняется тем, что при этом значении параметра h обращается в нуль коэффициент при старшей производной в уравнении (4.2). В целом ходьба в верхнем положении корпуса наиболее экономична по энергетике, а ходьба в нижнем положении — самая не экономная.

Фиг. 5, 7 отвечают другим стационарным решениям — ходьбе, «откинувшись назад» или «согнувшись вперед». Зависимости $E = E(h, L)$ носят менее регулярный характер, хотя и обнаруживают определенные тенденции в поведении функционала E . Более экономична ходьба головой «вперед». В некотором диапазоне длин шага ($L = 0.9, 1$ м) такая ходьба отвечает даже глобальному минимуму E на всех четырех графиках. Ходьба головой «назад» в смысле функционала E занимает промежуточное поло-

жение. Однако при относительно больших высотах ($h \sim 0.7-0.8$ м) она наиболее не экономична.

Расчеты периодических решений задачи (1.2), (1.3) указывают на наличие своеобразного плато в графике зависимости $E(V)$ при скоростях $V \sim 1-3$ м/с и более. По этой причине предельные значения энергетике дают достаточно хорошую аппроксимацию E в области конечных скоростей движения.

6. Устойчивость периодических решений. Рассмотрим устойчивость периодических решений задачи (2.1), (2.2) при достаточно больших, но конечных значениях скорости V , т. е. при достаточно малых значениях параметра ε . Следует иметь в виду, однако, что это исследование связано с уравнением (2.1), что позволяет поставить лишь вопрос об условной устойчивости данного алгоритма ходьбы, а именно об устойчивости его при ошибках по переменным ψ и $\dot{\psi}$.

Разложим в ряд коэффициенты характеристического уравнения [4]. Можно показать, что в первом приближении по ε условиям устойчивости удовлетворяют периодические решения, отвечающие порождающим значениям C , для которых $dP/dC < 0$.

Рассмотрим сначала устойчивость в первом приближении верхних и нижних положений корпуса. Ввиду (3.2) для значений $C=0$ или π :

$$\frac{\partial P}{\partial C} = \frac{2\tau_* \cos C}{1 + \cos C} \left\{ 1 - \frac{D\tau_*^2}{3(I + \cos C)} \right\}$$

Следовательно, верхние положения корпуса устойчивы при

$$1 < \frac{1}{3} D\tau_*^2 / (I+1) \quad (6.1)$$

и нижние — при

$$I > 1, \quad 1 > \frac{1}{3} D\tau_*^2 / (I-1) \quad (6.2)$$

На фиг. 8 показаны в переменных $D\tau_*^2$ и I области устойчивости M и N верхних и нижних положений корпуса. Поскольку области M и N не пересекаются, верхние и нижние положения корпуса не могут быть в принципе устойчивыми одновременно.

Решения, отвечающие дополнительным корням функции $P(C)$, удовлетворяют необходимым условиям устойчивости при рассмотренных выше числовых значениях параметров аппарата. В тех случаях, когда дополнительные корни отсутствуют (фиг. 2, $L \sim 0.4$ м), свойствами устойчивости обладают нижние положения корпуса. Верхние положения в рассмотренном диапазоне длин шага неустойчивы.

Поступила 21 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы I, II. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, 4.
2. Белецкий В. В., Кирсанова Т. С. Плоские линейные модели двуногой ходьбы. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4.
3. Белецкий В. В., Чудинов П. С. Параметрическая оптимизация в задаче двуногой ходьбы. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1.
4. Малкин И. П. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
5. Блехман И. И. Синхронизация динамических систем. М., «Наука», 1971.