

О МАГНИТНО-ГРАВИТАЦИОННОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ТРЕХОСНОГО СПУТНИКА

Т. Н. ОГАРКОВА, А. А. ХЕНТОВ

(Горький)

Обсуждается возможность реализации идеи о резонансной стабилизации по магнитному полю Земли спутника с неравными главными центральными моментами инерции, центральный эллипсоид инерции которого близок к сфере. Аналогичная задача для динамически симметричного спутника рассматривалась в работе [1].

Как известно [2], геомагнитное поле достаточно близко к дипольному. На фиг. 1 показаны две системы геоцентрических осей $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$. Оси Z и Z_1 направлены в восходящий узел орбиты спутника, ось Y_1 — по оси вращения Земли, а ось Y — по нормали к плоскости орбиты. Угол I — наклонение орбиты, r — радиус-вектор центра масс спутника, u — аргумент широты.

Если принять в качестве модели геомагнитного поля диполь, то для вектора напряженности \mathbf{H} в точке пространства с радиус-вектором \mathbf{r} будем, согласно [3], иметь

$$\mathbf{H} = \mu_e [\mathbf{k} - 3(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r] / r^3 \quad (0.1)$$

Здесь μ_e — постоянная земного магнетизма, \mathbf{k} — единичный вектор, направленный по оси диполя и антипараллельный его магнитному моменту. Для земного диполя положение вектора \mathbf{k} (фиг. 1) определим углами $\delta \approx 11^\circ 34'$ и σ (угол σ характеризует вращение диполя вместе с Землей).

Для проекций вектора \mathbf{H} на оси $X_1Y_1Z_1$ можно, исходя из формы (0.1), получить такие выражения

$$H_{X_1} = \mu_e r^{-3} [\sin \delta \sin \sigma - \frac{3}{2} (\cos \delta \sin^2 u \sin 2I + \sin \delta \cos \sigma \cos I \sin 2u + 2 \cos^2 I \sin^2 u \sin \delta \sin \sigma)] \quad (0.2)$$

$$H_{Y_1} = \mu_e r^{-3} [\cos \delta - \frac{3}{2} (\cos \delta \sin^2 u \sin^2 I + \sin I \sin 2u \sin \delta \cos \delta + \sin^2 u \sin 2I \sin \delta \sin \sigma)]$$

$$H_{Z_1} = \mu_e r^{-3} [\sin \delta \cos \sigma - \frac{3}{2} (\cos \delta \sin I \sin 2u + 2 \cos^2 u \sin \delta \cos \sigma + \sin 2u \cos I \sin \delta \sin \sigma)]$$

При движении спутника по орбите вектор \mathbf{H} , вообще говоря, изменяется в каждой ее точке. Годограф этого вектора — кривая, лежащая на некоторой конической поверхности. Вид конуса существенно зависит [4] от угла между вектором \mathbf{k} и нормалью Y к плоскости орбиты спутника. В течение суток этот угол непрерывно изменяется (разность между максимальным и минимальным его значениями равна 2δ).

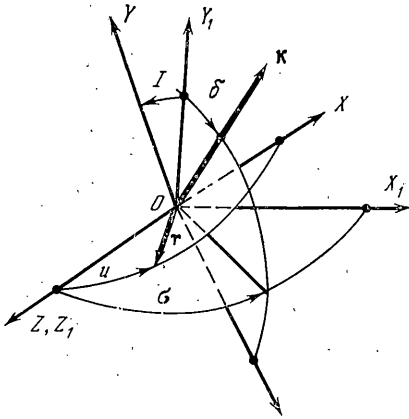
Усреднив выражения (0.2) по углу вращения Земли, получим

$$\langle H_{X_1} \rangle = -\frac{3}{2} \mu_e r^{-3} \cos \delta \sin 2I \sin^2 u, \quad \langle H_{Y_1} \rangle = \mu_e r^{-3} \cos \delta (1 - 3 \sin^2 I \sin^2 u) \quad (0.3)$$

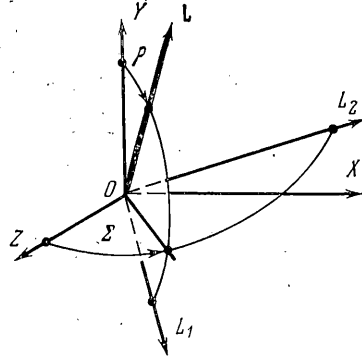
$$\langle H_{Z_1} \rangle = -\frac{3}{2} \mu_e r^{-3} \cos \delta \sin I \sin 2u$$

Годограф вектора \mathbf{H} с проекциями (0.3) лежит на конусе, мало отличающемся от кругового с углом $2\nu \ll \pi$ при вершине [4], где $\operatorname{tg} \nu = \frac{3}{2} \sin 2I (1 - 3 \sin^2 I + \sqrt{1 + 3 \sin^2 I})^{-1}$. Этот конус замыкается за поворотом спутника по орбите и является усредненной моделью конуса вектора \mathbf{H} с проекциями (0.2).

В дальнейшем под стабилизацией спутника по магнитному полю подразумеваются режимы его вращения, в которых одна из осей спутника вращается со средней угловой скоростью $2\omega_0$ вокруг высоты кругового конуса с углом 2ν при вершине на постоянном угловом расстоянии ν от этой высоты (ω_0 — средняя угловая скорость обращения спутника).



Фиг. 1



Фиг. 2

1. Предположим, что спутник имеет собственный постоянный магнитный момент \mathbf{J} с проекциями на главные центральные оси инерции спутника x, y и z соответственно J_1, J_2 и J_3 . Воздействие на спутник геомагнитного поля определяется, согласно [3], силовой функцией $U_1 = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{H})$, а воздействие гравитационного поля, согласно [5], — силовой функцией U_2 .

Введем, следуя [5], переменные L, ρ, Σ (фиг. 2), задающие положение в пространстве вектора \mathbf{L} кинетического момента спутника, вычисленного относительно его центра масс, и углы Эйлера ψ, φ и θ , задающие положение главных центральных осей инерции относительно осей $L_1 L_2 L$ (θ — угол нутации, как обычно, угол между осями L и z , ψ — угол прецессии).

Орбиту спутника будем считать круговой, не зависящей от его вращения, эллипсоид инерции — близким к сфере, силовые функции U_1 и U_2 — сравнимыми, а $|U| \ll L^2/A$ (здесь $U = U_1 + U_2$). Через A, B, C обозначим моменты инерции спутника относительно осей x, y и z соответственно.

В принятых предположениях три из введенных переменных (σ, ψ и u) будут быстрыми, а остальные медленными. Для изучения представляющих интерес режимов резонансной стабилизации произведем замену

$$\psi = 2u + \kappa \quad (1.1)$$

и усредним силовые функции U_1 и U_2 независимо по углу σ и аргументу широты с учетом соотношения (1.1). Усредненные силовые функции имеют вид

$$\begin{aligned} \langle U_1 \rangle = & J_1 \mu_e r^{-3} \cos \delta \left\{ \frac{3}{4} \sin I (1 + \cos \rho) [\cos \varphi \sin (\kappa + \Sigma) + \right. \\ & \left. + \sin \varphi \cos \theta \cos (\kappa + \Sigma)] + \sin \theta \sin \varphi \cos I \cos \rho - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sin I \sin \theta \sin \varphi \sin \rho \sin \Sigma \right\} + \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} & + J_2 \mu_e r^{-3} \cos \delta \left\{ \sin \theta \cos \varphi \cos \rho \cos I - \frac{1}{2} \sin I \sin \theta \cos \varphi \sin \rho \sin \Sigma - \right. \\ & \left. - \frac{3}{4} \sin I (1 + \cos \rho) [\sin \varphi \sin (\kappa + \Sigma) - \cos \theta \cos \varphi \cos (\kappa + \Sigma)] \right\} + \\ & + J_3 \mu_e r^{-3} \cos \delta \left\{ \cos \theta \cos I \cos \rho - \frac{1}{2} \sin I \cos \theta \sin \rho \sin \Sigma - \right. \\ & \left. - \frac{3}{4} \sin I (1 + \cos \rho) \sin \theta \cos (\kappa + \Sigma) \right\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \langle U_2 \rangle = & \frac{3}{8} \omega_0^2 \left\{ (A - B) [2(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) + \sin^2 \rho (3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1) - \right. \\ & \left. - \sin 2\theta \cos^2 \varphi \sin \rho (1 + \cos \rho) \sin (\kappa + 2\Sigma) - \right. \\ & \left. - \sin \theta \sin 2\varphi \sin \rho (1 + \cos \rho) \cos (\kappa + 2\Sigma)] + \right. \\ & \left. + (A - C) [2 \sin^2 \theta + \sin^2 \rho (3 \cos^2 \theta - 1) + \sin 2\theta \sin \rho (1 + \cos \rho)] \right\} \end{aligned}$$

Изменение введенных переменных, согласно [5], описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{L \sin \rho} \left(\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \kappa} \cos \rho - \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \Sigma} \right) \\ \frac{d\Sigma}{dt} &= \frac{1}{L \sin \rho} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \rho}, \quad \frac{dL}{dt} = \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \kappa} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) L \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{L \sin \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \kappa} - \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{d\kappa}{dt} &= -2\omega_0 + L \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{1}{L} \left(\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \rho \right) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= L \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{1}{L \sin \theta} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Система (1.4) имеет интеграл

$$\frac{L^2}{2} \left[\left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{C} \right] - 2\omega_0 L - \langle U \rangle = \text{const} \quad (1.5)$$

2. Наибольший интерес представляют некоторые из положений равновесия $\rho = \rho_0$, $\Sigma = \Sigma_0$, $L = L_0$, $\theta = \theta_0$, $\kappa = \kappa_0$, $\varphi = \varphi_0$ (здесь ρ_0 , Σ_0 , L_0 , θ_0 , κ_0 , φ_0 — постоянные). Из последних двух уравнений системы (1.4) можно выразить

$$L_0 = 2\omega_0 / \left[\sin^2 \theta_0 (A^{-1} \sin^2 \varphi_0 + B^{-1} \cos^2 \varphi_0) + C^{-1} \cos^2 \theta_0 \right] \quad (2.1)$$

Для того чтобы правые части оставшихся уравнений системы обратить в нуль, попытаемся подобрать значения следующих свободных безразмерных параметров:

$$\delta_1 = \frac{A-B}{A-C}, \quad \delta_2 = \frac{4\mu_e J_1 \cos \delta}{3\mu(A-C)}, \quad \delta_3 = \frac{4\mu_e J_2 \cos \delta}{3\mu(A-C)}, \quad \delta_4 = \frac{4\mu_e J_3 \cos \delta}{3\mu(A-C)}$$

где μ — гравитационная постоянная Земли.

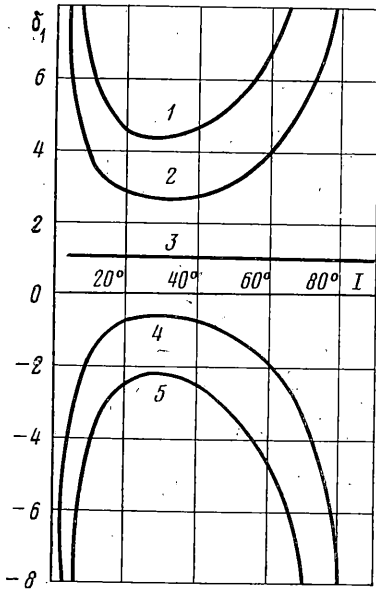
Выделим из множества положений равновесия системы (1.4) такие, на которых одна из осей спутника, например z , отслеживает круговой конус с углом 2ν при вершине, располагаясь определенным образом относительно вектора геомагнитной напряженности в его усредненном движении.

Проанализируем два типа таких режимов стабилизации по магнитному полю. Первый тип: ось z отслеживает в среднем вектор \mathbf{H} с проекциями (0.3), совпадая с ним при $u = 1/2n\pi$ (здесь и в дальнейшем $n = 0, 1, 2, \dots$). Второй тип: ось z в среднем опережает вектор с проекциями (0.3) на полюс по конусу.

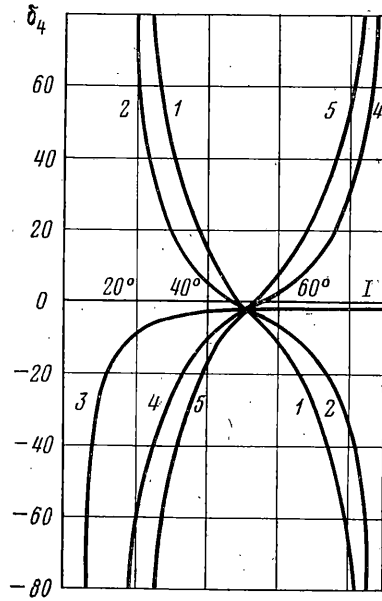
Рассмотрим сначала режимы первого типа. Для них: $\kappa_0 = \Sigma_0 = 3/2\pi$, $\rho_0 = \nu - I$, $\theta_0 = \nu$. Анализируя систему (1.4), можно установить, что такие режимы существуют, если выполнено соотношение

$$\sin \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \rho_0 \sin \rho_0 (1 + \cos \rho_0) = 0 \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что $\varphi_0 = 1/2n\pi$. Если $\varphi_0 = n\pi$, то режимы первого типа существуют, когда параметры δ_i удовлетворяют следующей линейной си-



Фиг. 3.



Фиг. 4.

стеме уравнений:

$$\begin{aligned}
 & \delta_2=0, \quad \delta_1[\sin \rho_0 \cos \rho_0 (3 \sin^2 \theta_0-1)-\sin \theta_0 \cos \theta_0 (\cos \rho_0+\cos 2 \rho_0)]+ \\
 & +\delta_3 \cos \varphi_0\left(\frac{3}{4} \sin I \sin \rho_0 \cos \theta_0+\frac{1}{2} \sin I \cos \rho_0 \sin \theta_0-\cos I \sin \rho_0 \sin \theta_0\right)+ \\
 & +\delta_4\left[-\frac{3}{4} \sin I \sin \theta_0 \sin \rho_0+\frac{1}{2} \sin I \cos \rho_0 \cos \theta_0-\cos I \sin \rho_0 \cos \theta_0\right]+ \\
 & +\sin \rho_0 \cos \rho_0 (3 \cos^2 \theta_0-1)+\sin \theta_0 \cos \theta_0 (\cos \rho_0+\cos 2 \rho_0)=0 \\
 & \delta_1[\cos 2 \theta_0 \sin \rho_0 (1+\cos \rho_0)-\sin \theta_0 \cos \theta_0 (1-3 \cos^2 \rho_0)+\frac{16}{3} \sin \theta_0 \cos \theta_0]+ \\
 & +\delta_3 \cos \varphi_0\left[-\frac{3}{4} \sin I (1+\cos \rho_0) \sin \theta_0-\frac{1}{2} \sin I \sin \rho_0 \cos \theta_0-\right. \\
 & \quad \left.-\cos I \cos \rho_0 \cos \theta_0\right]+\delta_4\left[-\frac{3}{4} \sin I (1+\cos \rho_0) \cos \theta_0+\right. \\
 & \quad \left.+\frac{1}{2} \sin I \sin \rho_0 \sin \theta_0+\cos I \cos \rho_0 \sin \theta_0\right]+\sin \theta_0 \cos \theta_0 (1-3 \cos^2 \rho_0)- \\
 & \quad -\cos 2 \theta_0 \sin \rho_0 (1+\cos \rho_0)-\frac{16}{3} \sin \theta_0 \cos \theta_0=0
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Решения системы (2.3) определялись численно. Некоторые из результатов представлены на фиг. 3 (показаны зависимости $\delta_1=\delta_1(I)$ при изменении параметра $\delta_3 \cos \varphi_0$) и на фиг. 4 (показаны зависимости $\delta_4=\delta_4(I)$). Значения параметра $\delta_3 \cos \varphi_0$ на кривых таковы: кривая 1 — (-10), кривая 2 — (-5), кривая 3 — (0), кривая 4 — (5), кривая 5 — (10).

Если $\varphi_0=\pi(2n+1)/2$, то режимы первого типа существуют, когда параметры δ_i удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
 & \delta_3=0, \quad -\delta_1 \sin \rho_0 \cos \rho_0+\delta_2 \sin \varphi_0\left(\frac{3}{4} \sin I \sin \rho_0 \cos \theta_0+\frac{1}{2} \sin I \cos \rho_0 \sin \theta_0-\right. \\
 & \quad \left.-\cos I \sin \theta_0 \sin \rho_0\right)+\delta_4\left(-\frac{3}{4} \sin I \sin \rho_0 \sin \theta_0+\frac{1}{2} \sin I \cos \rho_0 \cos \theta_0-\right. \\
 & \quad \left.-\cos I \cos \theta_0 \sin \rho_0\right)+\sin \rho_0 \cos \rho_0 (3 \cos^2 \theta_0-1)+ \\
 & \quad +\sin \theta_0 \cos \theta_0 (\cos \rho_0+\cos 2 \rho_0)=0
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} & \delta_2 \sin \varphi_0 [-^{3/4} \sin I (1 + \cos \rho_0) \sin \theta_0 - ^{1/2} \sin I \sin \rho_0 \cos \theta_0 - \cos I \cos \theta_0 \cos \rho_0] + \\ & + \delta_4 [-^{3/4} \sin I (1 + \cos \rho_0) \cos \theta_0 + ^{1/2} \sin I \sin \rho_0 \sin \theta_0 + \cos I \sin \theta_0 \cos \rho_0] + \\ & + \sin \theta_0 \cos \theta_0 (1 - 3 \cos^2 \rho_0) - \cos 2\theta_0 \sin \rho_0 (1 + \cos \rho_0) - ^{16/3} \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0 \end{aligned}$$

Численное исследование этой системы показывает, что решения существуют, если δ_1 и δ_4 очень велики (больше 10^3). По постановке задачи ($|U| \ll L^2/A$) столь большим значениям δ_1 и δ_4 должны соответствовать очень малые (меньше 10^{-4}) значения параметра $(A-C)/A$. Исключим такие решения из дальнейшего рассмотрения.

Режимы стабилизации второго типа $\kappa_0 = ^{1/2}\pi$, $\Sigma_0 = ^{3/2}\pi$, $\rho_0 = \nu - I$, $\theta_0 = \nu$ существуют так же, как и режимы первого типа только при выполнении условия (2.2).

Если $\varphi_0 = n\pi$, то параметры δ_i должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} & \delta_2 = 0, \quad \delta_4 [\sin \rho_0 \cos \rho_0 (3 \sin^2 \theta_0 - 1) + \sin \theta_0 \cos \theta_0 (\cos \rho_0 + \cos 2\rho_0)] + \\ & + \delta_3 \cos \varphi_0 (-^{3/4} \sin I \sin \rho_0 \cos \theta_0 + ^{1/2} \sin I \cos \rho_0 \sin \theta_0 - \cos I \sin \theta_0 \sin \rho_0) + \\ & + \delta_4 (^{3/4} \sin I \sin \rho_0 \sin \theta_0 + ^{1/2} \sin I \cos \rho_0 \cos \theta_0 - \cos I \cos \theta_0 \sin \rho_0) + \\ & + \sin \rho_0 \cos \rho_0 (3 \cos^2 \theta_0 - 1) - \sin \theta_0 \cos \theta_0 (\cos \rho_0 + \cos 2\rho_0) = 0 \\ & \delta_1 [\sin \theta_0 \cos \theta_0 (1 - 3 \cos^2 \rho_0) + \cos 2\theta_0 \sin \rho_0 (1 + \cos \rho_0) - ^{16/3} \sin \theta_0 \cos \theta_0] + \\ & + \delta_3 \cos \varphi_0 [-^{3/4} \sin I \sin \theta_0 (1 + \cos \rho_0) + ^{1/2} \sin I \sin \rho_0 \cos \theta_0 + \cos I \cos \rho_0 \cos \theta_0] - \\ & - \delta_4 [^{3/4} \sin I \cos \theta_0 (1 + \cos \rho_0) + ^{1/2} \sin I \sin \rho_0 \sin \theta_0 + \cos I \cos \rho_0 \sin \theta_0] - \\ & - \sin \theta_0 \cos \theta_0 (1 - 3 \cos^2 \rho_0) - \cos 2\theta_0 \sin \rho_0 (1 + \cos \rho_0) + ^{16/3} \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Некоторые решения системы (2.5) представлены на фиг. 5 (показаны зависимости $\delta_1 = \delta_1(I)$) и на фиг. 6 (показаны зависимости $\delta_4 = \delta_4(I)$). Значения параметра $\delta_3 \cos \varphi_0$, такие же, как на кривых фиг. 3, 4 с соответствующими номерами.

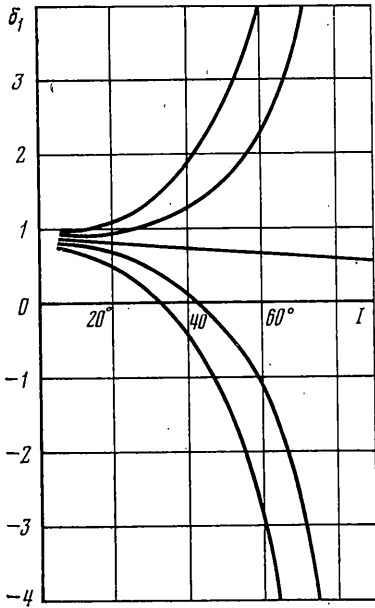
Если $\varphi_0 = \pi(2n+1)/2$, то режимы второго типа существуют при выполнении условий

$$\begin{aligned} & \delta_3 = 0, \quad -\delta_1 \sin \rho_0 \cos \rho_0 + \\ & + \delta_2 \sin \varphi_0 (-^{3/4} \sin I \sin \rho_0 \cos \theta_0 + ^{1/2} \sin I \cos \rho_0 \sin \theta_0 - \cos I \sin \theta_0 \sin \rho_0) + \\ & + \delta_4 (^{3/4} \sin I \sin \rho_0 \sin \theta_0 + ^{1/2} \sin I \cos \rho_0 \cos \theta_0 - \cos I \cos \theta_0 \sin \rho_0) + \\ & + \sin \rho_0 \cos \rho_0 (3 \cos^2 \theta_0 - 1) - \sin \theta_0 \cos \theta_0 (\cos \rho_0 + \cos 2\rho_0) = 0 \\ & \delta_2 \sin \varphi_0 [-^{3/4} \sin I (1 + \cos \rho_0) \sin \theta_0 + ^{1/2} \sin I \sin \rho_0 \cos \theta_0 + \cos I \cos \theta_0 \cos \rho_0] - \\ & - \delta_4 [^{3/4} \sin I (1 + \cos \rho_0) \cos \theta_0 + ^{1/2} \sin I \sin \rho_0 \sin \theta_0 + \cos I \sin \theta_0 \cos \rho_0] - \\ & - \sin \theta_0 \cos \theta_0 (1 - 3 \cos^2 \rho_0) - \cos 2\theta_0 \sin \rho_0 (1 + \cos \rho_0) + ^{16/3} \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

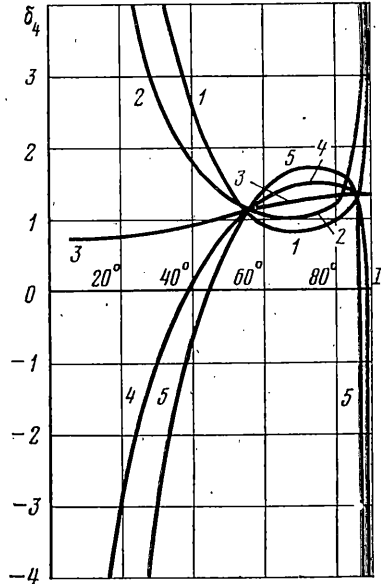
Примеры решений системы (2.6) приведены на фиг. 7 (зависимости $\delta_1 = \delta_1(I)$) и на фиг. 8 (зависимости $\delta_4 = \delta_4(I)$).

Параметр $\delta_2 \sin \varphi_0$ на кривых фиг. 7, 8 принимает такие значения: кривая 1 — (-10), кривая 2 — (-5), кривая 3 — (0), кривая 4 — (5), кривая 5 — (10).

В случае полярной орбиты на режимах стабилизации угол $\rho_0 = 0$, поэтому Σ_0 неопределенно. Для анализа таких режимов можно определить положение вектора L относительно осей X_1, Y_1, Z_1 углами ρ_1 и Σ_1 (т. е. на фиг. 2 оси XYZ следует заменить осями X_1, Y_1, Z_1 , а углы ρ и Σ — соответ-



Фиг. 5



Фиг. 6

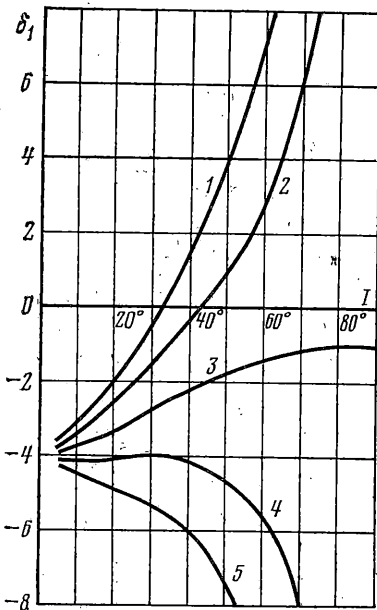
венно углами ρ_1 и Σ_1). Силовые функции $\langle U_1 \rangle$ и $\langle U_2 \rangle$ в новых переменных запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle U_1 \rangle = & \frac{3}{4} \mu_e r^{-3} \cos \delta \{ J_1 (-\cos \varphi \sin \rho_1 \cos \kappa + \cos \rho_1 \sin \kappa \cos \Sigma_1 + \\ & + \sin \kappa \sin \rho_1 \cos \theta \sin \varphi + \cos \kappa \cos \rho_1 \cos \Sigma_1 \cos \theta \sin \varphi + \cos \varphi \cos \kappa \sin \Sigma_1 - \\ & - \cos \theta \sin \kappa \sin \varphi \sin \Sigma_1 - \frac{2}{3} \sin \theta \sin \varphi \cos \rho_1) + J_2 (-\sin \kappa \cos \varphi \sin \rho_1 - \\ & - \cos \kappa \cos \varphi \cos \rho_1 \cos \Sigma_1 - \cos \kappa \sin \rho_1 \cos \theta \sin \theta + \sin \kappa \cos \rho_1 \cos \Sigma_1 \cos \theta \sin \varphi - \end{aligned} \quad (2.7)$$

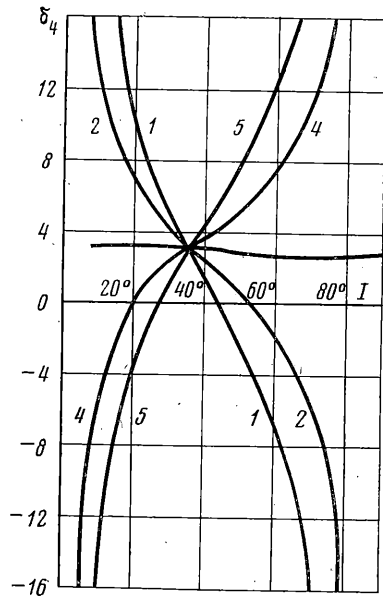
$$\begin{aligned} & - \sin \varphi \cos \theta \sin \Sigma_1 - \cos \theta \cos \varphi \sin \kappa \sin \Sigma_1 - \frac{2}{3} \sin \theta \cos \rho_1 \cos \varphi) + \\ & + J_3 (-\sin \kappa \sin \theta \sin \rho_1 - \sin \theta \cos \kappa \cos \rho_1 \cos \Sigma_1 + \\ & + \sin \theta \sin \kappa \sin \Sigma_1 - \frac{2}{3} \cos \theta \cos \rho_1) \} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \langle U_2 \rangle = & \frac{3}{8} \omega_0^2 (A - B) \{ (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos^2 \theta) (\sin^2 \rho_1 + \cos^2 \rho_1 \cos^2 \Sigma_1 + \sin^2 \Sigma_1) + \\ & + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi (\cos^2 \rho_1 + \sin^2 \rho_1 \cos^2 \Sigma_1) + \\ & + \sin \theta \cos \varphi [-(1 + \cos^2 \Sigma_1) (\sin \varphi \cos \kappa + \cos \theta \cos \varphi \sin \kappa) \sin 2\rho_1 - \\ & - 2 \cos \theta \cos \varphi \cos \kappa \cos \Sigma_1 \cos 2\rho_1 + 2 \cos \Sigma_1 \sin \varphi \sin \kappa] + \\ & + 2 \sin \theta \cos \varphi \sin \Sigma_1 [\sin \varphi (\cos \rho_1 \cos \kappa + \sin \rho_1 \cos \Sigma_1 \sin \kappa) + \\ & + \cos \varphi \cos \theta (\cos \rho_1 \sin \kappa - \sin \rho_1 \cos \kappa \cos \Sigma)] \} + \\ & + \frac{3}{8} \omega_0^2 (A - C) \{ \sin^2 \theta (1 + \sin^2 \rho_1 \sin^2 \Sigma_1) + 2 \cos^2 \theta (1 - \sin^2 \rho_1 \sin^2 \Sigma_1) + \\ & + \sin 2\theta \sin \kappa [\sin \rho_1 \cos \rho_1 (1 + \cos^2 \Sigma_1) - \sin \Sigma_1 \cos \rho_1] + \\ & + \sin 2\theta \cos \kappa [\cos \Sigma_1 (\sin \rho_1 \sin \Sigma_1 + \cos 2\rho_1)] \} \end{aligned}$$

Можно показать, что вид уравнений (1.4) при замене ρ на ρ_1 и Σ на Σ_1



Фиг. 7



Фиг. 8

сохраняется. Рассматриваемым ранее режимам стабилизации в новых переменных соответствуют ($I=90^\circ$) решения вида $\rho_1=\rho_{10}=\frac{1}{2}\pi$, $\Sigma_1=\Sigma_{10}=\frac{3}{2}\pi$, $\theta=\theta_0=\frac{1}{2}\pi$, $\kappa=\kappa_0=\frac{3}{2}\pi$ (для режимов первого типа) и $\kappa=\kappa_0=\frac{1}{2}\pi$ (для режимов второго типа). Они существуют при $\delta_2=\delta_3=0$ и любых значениях параметров δ_1 и δ_4 .

Следовательно, из рассмотренных ранее семейств решений системы (1.4) на случай полярной орбиты могут быть продолжены только решения, соответствующие $\delta_3=0$, если $\varphi=\pi n$, и решения, соответствующие $\delta_2=0$, если $\varphi=\pi(2n+1)$. Таким образом, пассивная магнитно-гравитационная стабилизация полярного спутника с близкими моментами инерции практически нереализуема: режимы стабилизации неустойчивы по параметрам δ_3 и δ_2 . Как следует из фиг. 3—8, нереализуемы и соответствующие режимы стабилизации на орбитах, очень близких к полярной.

3. Рассмотрим устойчивость режимов стабилизации. Характеристическое уравнение системы в вариациях для исследуемых положений равновесия системы (1.4) можно привести к виду

$$\lambda^6 + A_1 \lambda^4 + A_2 \lambda^2 + A_3 = 0 \quad (3.1)$$

$$A_1 = -a_{11}a_{16}, \quad A_2 = a_{11}(a_1a_4a_{16} + a_3a_{12}a_{16} + a_5a_6a_{16} + a_8a_{13}a_{16} - a_2a_4a_{15} - a_7a_{13}a_{17} - a_2a_{12}a_{17} - a_5a_7a_{15})$$

$$A_3 = a_{11}(a_1a_4a_7a_{13}a_{17} + a_2a_4a_8a_{13}a_{15} + a_3a_4a_6a_{13}a_{16} + a_2a_5a_6a_{12}a_{17} + a_3a_5a_7a_{12}a_{15} + a_4a_5a_8a_{12}a_{16} - a_1a_4a_8a_{13}a_{16} - a_2a_4a_6a_{13}a_{17} - a_3a_4a_7a_{13}a_{15} - a_3a_5a_6a_{12}a_{16} - a_4a_5a_7a_{12}a_{17} - a_2a_5a_8a_{12}a_{15})$$

$$a_1 = \frac{\operatorname{ctg} \rho_0 \cdot \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \kappa_0 \partial \Sigma_0}}{L_0} - \frac{1}{L_0 \sin \rho_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \Sigma_0^2}, \quad a_2 = \frac{\operatorname{ctg} \rho_0 \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \kappa_0^2}}{L_0} - \frac{1}{L_0 \sin \rho_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \Sigma_0 \partial \kappa_0}$$

$$a_3 = \frac{\operatorname{ctg} \rho_0 \cdot \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \kappa_0 \partial \varphi_0}}{L_0} - \frac{1}{L_0 \sin \rho_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \Sigma_0 \partial \varphi_0}, \quad a_4 = \frac{1}{L_0 \sin \rho_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \rho_0^2}$$

$$\begin{aligned}
 a_5 &= \frac{1}{L_0 \sin \rho_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \rho_0 \partial \theta_0} \\
 a_6 &= \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{L_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \chi_0 \partial \Sigma_0} - \frac{1}{L_0 \sin \theta_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \varphi_0 \partial \Sigma_0}, \quad a_7 = \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{L_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \chi_0^2} - \frac{1}{L_0 \sin \theta_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \varphi_0 \partial \chi_0} \\
 a_8 &= \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{L_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \chi_0 \partial \varphi_0} - \frac{1}{L_0 \sin \theta_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \varphi_0^2} + L_0 \cos 2\varphi_0 \sin \theta_0 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \\
 a_9 &= - \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{L_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \theta_0 \partial \rho_0} - \frac{\operatorname{ctg} \rho_0}{L_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \rho_0^2}, \\
 a_{10} &= - \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{L_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \theta_0^2} - \frac{\operatorname{ctg} \rho_0}{L_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \rho_0 \partial \theta_0} + \frac{1}{L_0 \sin^2 \theta_0} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \theta_0} \\
 a_{11} &= \frac{\sin^2 \varphi_0}{A} + \frac{\cos^2 \varphi_0}{B} + \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{L_0^2} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \theta_0}, \quad a_{12} = \frac{1}{L_0 \sin \theta_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \theta_0 \partial \rho_0} \\
 a_{13} &= \frac{1}{L_0 \sin \theta_0} \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \theta_0^2} - \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{L_0 \sin \theta_0} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \theta_0} - L_0 \sin \theta_0 \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi_0}{A} - \frac{\cos^2 \varphi_0}{B} \right) \\
 a_{14} &= - \frac{1}{L_0^2 \sin \theta_0} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \theta_0} + \cos \theta_0 \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi_0}{A} - \frac{\cos^2 \varphi_0}{B} \right) \\
 a_{15} &= \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \chi_0 \partial \Sigma_0}, \quad a_{16} = \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \chi_0^2}, \quad a_{17} = \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial \chi_0 \partial \varphi_0}
 \end{aligned}$$

Индекс нуль при переменных в выражениях производных от силовой функции означает, что эти производные вычисляются на исследуемых стационарных решениях системы (1.4).

Можно показать, что все корни λ_i уравнения (3.1) будут иметь нулевые действительные части, если выполнены условия

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad A_2^2 > 4A_1A_3 \quad (3.2)$$

Когда хотя бы одно из этих неравенств выполнено с обратным знаком, то по крайней мере один из корней уравнения (3.1) имеет положительную вещественную часть.

Неравенства (3.2) на режимах стабилизации проверялись численно. Установлено; в частности, что указанные неравенства для решений системы (2.3), представленных на фиг. 3 и 4, выполнены в следующих интервалах изменения наклона орбиты: $41^\circ 20' \leq I \leq 53^\circ 42'$ (когда $\delta_3 \cos \varphi_0 = -10$ и $A > C$); $58^\circ 12' \leq I < \pi/2$ (когда $\delta_3 \cos \varphi_0 = -10$ и $A < C$); $44^\circ 42' \leq I \leq 52^\circ 12'$ (когда $\delta_3 \cos \varphi_0 = -5$ и $A > C$); $54^\circ 50' \leq I < \pi/2$ (когда $\delta_3 \cos \varphi_0 = -5$ и $A < C$); $0 < I < \pi/2$ (когда $\delta_3 = 0$ и $A < C$); $47^\circ 12' \leq I \leq 59^\circ 30'$ (когда $\delta_3 \cos \varphi_0 = 5$ и $A < C$); $64^\circ 36' \leq I < \pi/2$ (когда $\delta_3 \cos \varphi_0 = 5$ и $A > C$); $49^\circ 12' \leq I \leq 55^\circ 14'$ (когда $\delta_3 \cos \varphi_0 = 10$ и $A < C$); $64^\circ 54' \leq I \leq \pi/2$ (когда $\delta_3 \cos \varphi_0 = 10$ и $A > C$).

Вне перечисленных интервалов изменения наклона орбиты решения системы (2.3), показанные на фиг. 3 и 4, неустойчивы.

В случае полярной орбиты решения системы (2.3) существуют при любых значениях параметров δ_1 и δ_4 . Необходимые условия устойчивости этих решений выполнены при условии, что $A > C$ (если $\delta_4 > 0$), либо при условии, что $A < C$ (если $\delta_4 < 0$).

Для решений системы (2.5), представленных на фиг. 5 и 6, неравенства (3.2) выполнены в следующих интегралах изменения наклона орбиты: $0 < I \leq 55^\circ 34'$ (когда $\delta_3 \cos \varphi_0 = -10$ и $A < C$); $0 < I \leq 60^\circ 18'$ (когда

$\delta_3 \cos \varphi_0 = -5$ и $A < C$); $19^\circ 45' \leq I \leq 40^\circ 13'$ (когда $\delta_3 = 0$ и $A < C$); $0 < I \leq 9^\circ 31'$ (когда $\delta_3 \cos \varphi_0 = 5$ и $A > C$); $0 < I \leq 14^\circ 5'$ (когда $\delta_3 \cos \varphi_0 = 10$ и $A > C$).

В случае полярной орбиты решения системы (2.5) существуют при любых значениях параметров δ_1 и δ_4 . Необходимые условия устойчивости этих решений выполнены при условии, что $A > C$ (если $\delta_4 < 0$), либо при условии $A < C$ (если $\delta_4 > 0$).

Наконец, для решений системы (2.6), представленных на фиг. 7 и 8, неравенства (3.2) выполнены в следующих интервалах изменения наклона орбиты: $0 < I \leq 39^\circ 10'$ и $47^\circ 21' \leq I \leq 65^\circ 44'$ (когда $\delta_2 \sin \varphi_0 = -10$ и $A < C$); $0 < I \leq 40^\circ 33'$ и $45^\circ 39' \leq I \leq 66^\circ 50'$ (когда $\delta_2 \sin \varphi_0 = -5$ и $A < C$); $13^\circ 32' \leq I \leq 32^\circ 45'$ и $56^\circ 41' \leq I \leq 71^\circ 14'$ (когда $\delta_2 = 0$ и $A > C$); $49^\circ 21' \leq I \leq 61^\circ 29'$ (когда $\delta_2 \sin \varphi_0 = 5$ и $A > C$); $0 < I \leq 19^\circ 17'$ и $48^\circ 53' \leq I \leq 61^\circ 21'$ (когда $\delta_2 \sin \varphi_0 = 10$ и $A > C$).

В случае полярной орбиты решения системы (2.6) существуют при любых значениях параметров δ_1 и δ_4 . Необходимые условия устойчивости этих решений выполнены при условии, что $A > C$ (если $\delta_4 > 0$), либо при условии $A < C$ (если $\delta_4 < 0$).

Чтобы получить достаточные условия устойчивости, введем возмущения ξ_i :

$$\begin{aligned} \cos \rho &= \cos \rho_0 + \xi_1, & \sin \rho &= \sin \rho_0 + \xi_2, & \cos \Sigma &= \cos \Sigma_0 + \xi_3, \\ \sin \Sigma &= \sin \Sigma_0 + \xi_4, & \cos \theta &= \cos \theta_0 + \xi_5, & \sin \theta &= \sin \theta_0 + \xi_6, \\ \cos \kappa &= \cos \kappa_0 + \xi_7, & \sin \kappa &= \sin \kappa_0 + \xi_8, & \cos \varphi &= \cos \varphi_0 + \xi_9, \\ & & \sin \varphi &= \sin \varphi_0 + \xi_{10}, & L &= L_0 + \xi_{11} \end{aligned}$$

Легко построить связку интегралов вида

$$V = V_1 + \sum_{i=2}^6 (\mu_i V_i + \lambda_i V_i^2) \quad (3.3)$$

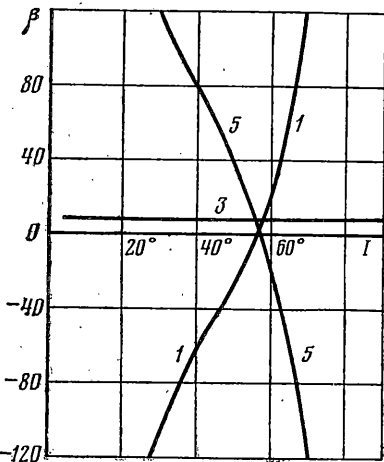
Здесь V_1 — интеграл (1.5), записанный для возмущенного движения

$$\begin{aligned} V_2 &= \xi_3^2 - 2\xi_4 + \xi_4^2, & V_3 &= 2\sin \rho_0 \xi_2 + \xi_2^2 + 2\cos \rho_0 \xi_1 + \xi_1^2 \\ V_4 &= \xi_7^2 + 2\sin \kappa_0 \xi_8 + \xi_8^2, & V_5 &= 2\xi_6 \sin \theta_0 + \xi_6^2 + 2\cos \theta_0 \xi_5 + \xi_5^2 \\ V_6 &= 2\xi_9 \cos \varphi_0 + \xi_9^2 + 2\xi_{10} \sin \varphi_0 + \xi_{10}^2 \end{aligned}$$

Постоянные μ_i удается подобрать так, чтобы функция (3.3) не содержала членов, линейных относительно возмущений, постоянные λ_i остаются произвольными. В соответствии с известной теоремой Ляпунова [6] достаточные условия устойчивости исследуемого движения есть условия знакоопределенности квадратичной относительно возмущений части функции (3.3). Получаемые условия устойчивости (так же как и выражения для μ_i) весьма громоздки и по этой причине не приводятся. По-видимому, возможна лишь их численная проверка для конкретных решений.

Роль резонансных эффектов можно, как и в работе [1], оценить приближенно, рассматривая область фазовой плоскости, ограниченную охватывающей устойчивое положение равновесия сепаратрисой уравнения

$$\frac{d^2 \kappa}{du^2} + \frac{3(C-A)}{16A} \beta \cos \kappa = 0 \quad (3.4)$$



Фиг. 9

В этой области (обычно называемой резонансной зоной) $2(L-L_0) \leq \leq A(3(C-A)/\beta)^{1/2}$. Для режимов стабилизации, удовлетворяющих условию $\varphi_0 = \pi n$, параметр $\beta = [1 + \cos(\nu - I)][2\sin(\nu - I)(\delta_1 - 1)\sin 2\nu + 3(\delta_2 \cos \nu \cos \varphi_0 - \delta_4 \sin \nu) \sin I]$, а для режимов, где $\varphi_0 = \pi(2n+1)/2$, параметр $\beta = [1 + \cos(\nu - I)][-2\sin(\nu - I)\sin 2\nu + 3(\delta_2 \cos \nu \sin \varphi_0 - \delta_4 \sin \nu) \sin I]$. На фиг. 9 показаны зависимости параметра β , определяющего размеры резонансных зон, от наклона орбиты для некоторых из режимов, представленных на фиг. 3, 4 (цифры на кривых фиг. 9 соответствуют цифрам на кривых фиг. 3, 4).

Анализ кривых фиг. 9 показывает, что режимы стабилизации могут стать неустойчивыми не только из-за действия определенных возмущений, но и из-за потери резонансных свойств вследствие уменьшения размеров (либо полного исчезновения) резонансных зон.

Поступила 7 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В., Хенгов А. А. Магнитно-гравитационная стабилизация спутника. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
2. Яновский Б. М. Земной магнетизм. Л., Изд-во ЛГУ, 1964.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, Т. 2. Теория поля, М., Физматгиз, 1962.
4. Хенгов А. А. Пассивная стабилизация искусственных спутников по магнитному полю Земли. Космические исследования, 1967, т. 5, № 4.
5. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М., Изд-во МГУ, 1975.
6. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М. Л., Гостехиздат, 1950.