

**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА**
№ 4 • 1980

УДК 531.36

**ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ
МАГНИТНОГО ПОДШИПНИКА**

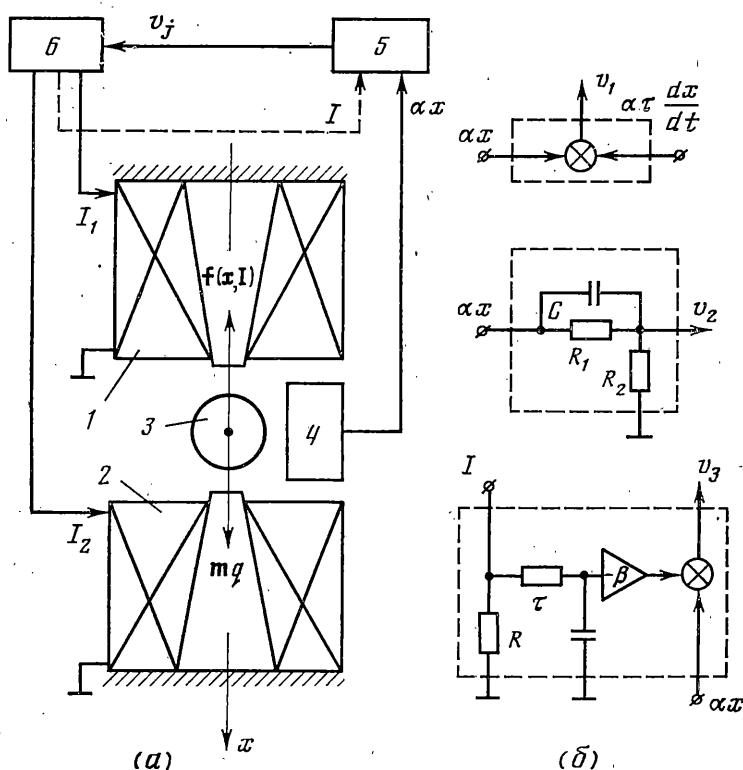
В. С. ВОРОНКОВ, О. Д. ПОЗДЕЕВ

(Горький)

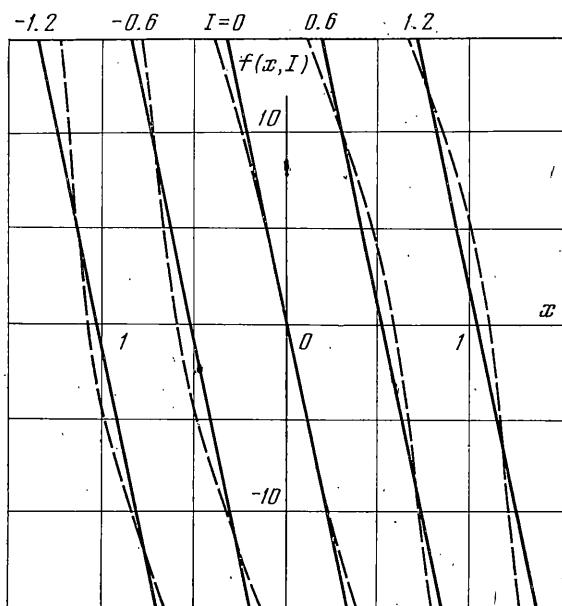
Методами нелинейной теории колебаний исследуется динамика систем стабилизации магнитного подшипника с различными видами корректирующих звеньев при учете нелинейности вольт-амперных характеристик усилителя постоянного тока. Определяются типы движений и оценивается область притяжения устойчивого состояния равновесия. Определяются требования к системе стабилизации магнитного подшипника, необходимые для улучшения его динамических характеристик.

Известно, что в настоящее время магнитные и электростатические подшипники широко применяются в различных областях приборостроения [1, 2] благодаря их способности исключить трение, вызванное контактом ротора с опорой. В соответствии с теоремой Ирншоу — Браунбека [3] устойчивое положение тел с относительной диэлектрической постоянной или относительной магнитной проницаемостью, большей или равной единице, в статических полях невозможно. Для устойчивости таких бесконтактных опор требуется применение системы автоматического регулирования (САР), управляющей величиной напряженности поля. Неустойчивость объекта регулирования и ограниченность ресурсов управления определяют принципиальную невозможность создания абсолютно устойчивой системы. Для таких систем отклонения координат не должны выходить из области притяжения устойчивого состояния равновесия. Область притяжения зависит от структуры, параметров и является одной из важных характеристик системы.

1. Будем рассматривать динамику системы автоматического регулирования магнитного подшипника, изображенного на фиг. 1, а. Конфигурация магнитного поля, создаваемого идентичными электромагнитами 1, 2, такова, что бесконтактное положение ферромагнитного ротора 3 неустойчиво вдоль оси x системы и устойчиво в поперечном направлении. Система автоматического регулирования состоит из датчика 4 перемещения x ротора по оси электромагнитов с чувствительностью α , блока коррекции 5 сигнала αx датчика и усилителя постоянного тока 6, на вход которого подается напряжение v , с блока коррекции. Рассматриваются системы, включающие звенья коррекции, изображенные на фиг. 1, б. Индекс $j=1$ соответствует идеальной коррекции по скорости перемещения выведенного ротора, $j=2$ — коррекции с помощью дифференцирующей цепочки, $j=3$ — коррекции с помощью инерционной обратной связи усилителя постоянного тока. Два последних вида коррекции наиболее часто употребляются на практике. При исследовании динамики выходные вольт-амперные характеристики усилителя предполагаются кусочно-линейными вида: $\varphi(\sigma) = \varphi^+, R_i \sigma \geq \varphi^+$; $\varphi(\sigma) = R_i \sigma, \varphi^- \leq R_i \sigma \leq \varphi^+$; $\varphi(\sigma) = \varphi^-, R_i \sigma \leq \varphi^-$; где φ — выходное напряжение усилителя, $\sigma = I - sv$, $I = I_1 - I_2$ — разность токов электромагнитов, R_i , s — соответственно дифференциальное внутреннее сопротивление и крутизна усилителя, φ^\pm — уровни ограничения φ . Зависимость силы электромагнитов $f(x, I)$ (в Н) от перемещения x (в мм) при фиксированных значениях тока I (в А) для конкретного подшипника изображена на фиг. 2 пунктиром и с достаточной точностью аппроксимируется ли-



Фиг. 1



Фиг. 2

нейной функцией

$$f(x, I) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0 x + \frac{\partial f}{\partial I} \Big|_0 I$$

показанной сплошной линией. В равновесном положении ротор находится в центре системы, при этом разность токов электромагнитов создает силу, компенсирующую вес mg ротора. Эта сила может создаваться сторонним источником магнитного поля с тем, чтобы разность токов и остальные фазовые координаты в равновесном положении были нулевыми.

В подшипнике с одним электромагнитом нелинейность силовых характеристик выражена значительно сильнее. Динамика его системы регулирования при малой постоянной времени электромагнита рассмотрена в работе [4]. При учете инерционности электромагнита и нелинейности характеристик усилителя обнаруживаются новые качественные свойства динамики [5], характерные в равной степени для систем с линейными и нелинейными силовыми характеристиками: рождение неустойчивых периодических движений, сужение вследствие этого области притяжения к состоянию равновесия и др. Исследуемая нелинейная модель позволяет обобщить результаты работ [4, 5] по оценке области притяжения и выбрать из рассматриваемых систем лучшую в динамическом отношении.

С учетом принятых идеализаций система уравнений, описывающая динамику системы стабилизации магнитного подшипника, приводится к безразмерному стандартному виду

$$\dot{x} = A_j x + b_j \varphi(\sigma), \quad \sigma = c_j^T x \quad (1.1)$$

где в зависимости от вида коррекции матрица A_j и вектора b_j , c_j^T будут следующими:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -T^{-1} \end{vmatrix}, \quad b_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -T^{-1} \end{vmatrix}, \quad c_1^T = \|-k, -k\tau, 1\|$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -T^{-1} & 0 \\ (\varepsilon\tau)^{-1} & \varepsilon^{-1} & 0 & -(\varepsilon\tau)^{-1} \end{vmatrix}, \quad b_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -T^{-1} \\ 0 \end{vmatrix}, \quad c_2^T = \|0, 0, 1, -k\|$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tau^{-1} & -\tau^{-1} \end{vmatrix}, \quad b_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -T^{-1} \\ 0 \end{vmatrix}, \quad c_3^T = \|-k/\varepsilon, 0, 1, (1-\varepsilon)/\varepsilon\|$$

Здесь x — вектор отклонений от равновесных значений с компонентами, пропорциональными: x_1 — положению ротора, x_2 — скорости перемещения ротора по оси системы, x_3 — разности токов электромагнитов, x_4 — выходному напряжению v_j блока коррекции. В случае идеальной коррекции по скорости ($j=1$) $x_4 = x_1 + \tau x_2$. За единицу масштаба времени принята постоянная времени объекта регулирования, равная $t_m = m^{1/2}(|\partial f / \partial x|_0|)^{1/2}$. Компоненты матрицы A_j и векторов b_j , c_j определяются параметрами: T — постоянной времени электромагнитов, τ — постоянной времени цепи коррекции, k — статическим коэффициентом усиления разомкнутой системы, $\varepsilon = R_2(R_1 + R_2)^{-1} \ll 1$ для дифференцирующей цепочки ($j=2$) и $\varepsilon = (1+R_s\beta)^{-1} \ll 1$ для инерционной обратной связи ($j=3$) [4] (см. фиг. 1, б).

При несовпадающих компонентах вектора собственных значений λ_{ij} матрицы A_j система (1.1) преобразуется к канонической форме Лурье [6], облегчающей ее анализ

$$y_i = \lambda_{ij} y_i + v_{ij} \varphi(\sigma), \quad \sigma = \sum_{l=1}^{n_j} y_l \quad (i=1, \dots, n_j) \quad (1.2)$$

В зависимости от типа коррекции коэффициенты уравнений (1.2) бу-

дут следующими:

$$\begin{aligned}
 & j=1, \quad n_1=3, \quad \lambda_1^T = \|1, -1, -T^{-1}\| \\
 & \mathbf{v}_1^T = \left\| -\frac{k(1+\tau)}{2(T+1)}, -\frac{k(1-\tau)}{2(T-1)}, k \frac{T-\tau}{T^2-1} - \frac{1}{T} \right\| \\
 & j=2, \quad n_2=4, \quad \lambda_2^T = \|1, -1, -T^{-1}, -(e\tau)^{-1}\| \\
 & \mathbf{v}_2^T = \left\| \frac{-k(1+\tau)}{2(T+1)(1+e\tau)}, \frac{-k(1-\tau)}{2(T-1)(1-e\tau)}, \frac{kT(T-\tau)}{(T^2-1)(T-e\tau)} - \frac{1}{T}, \frac{-ke\tau^2(1-e)}{(T-e\tau)(1-e^2\tau^2)} \right\| \\
 & j=3, \quad n_3=4, \quad \lambda_3^T = \|1, -1, -T^{-1}, -\tau^{-1}\| \\
 & \mathbf{v}_3^T = \left\| \frac{-k}{2e(T+1)}, \frac{-k}{2e(T-1)}, \frac{kT}{e(T^2-1)} - \frac{T-e\tau}{eT(T-\tau)}, \frac{1-e}{e(T-\tau)} \right\|
 \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что при $R_i \rightarrow \infty$ получается наилучшее качество переходного процесса в системе¹. При этом $\varphi(\sigma)$ стремится к релейной функции, доопределение которой в точке разрыва получается с помощью метода малого параметра [7].

Изменения φ происходят в области фазового пространства, заключенного между гиперплоскостями

$$\sum_{l=1}^{n_j} y_l - \mu \varphi^- = 0, \quad \sum_{l=1}^{n_j} y_l - \mu \varphi^+ = 0 \quad (1.3)$$

и описываются уравнением

$$\mu \cdot \dot{\varphi} = \left(\sum_{l=1}^{n_j} v_{lj} \right) \varphi + \sum_{l=1}^{n_j} \lambda_{lj} y_l$$

где $\mu = R_i^{-1} \ll 1$ — малый параметр. Медленные изменения φ ($\mu=0$) связаны с изменениями фазовых координат y_l системы алгебраическим выражением

$$\varphi^- \leq \varphi = - \left(\sum_{l=1}^{n_j} v_{lj} \right)^{-1} \sum_{l=1}^{n_j} \lambda_{lj} y_l \leq \varphi^+ \quad (1.4)$$

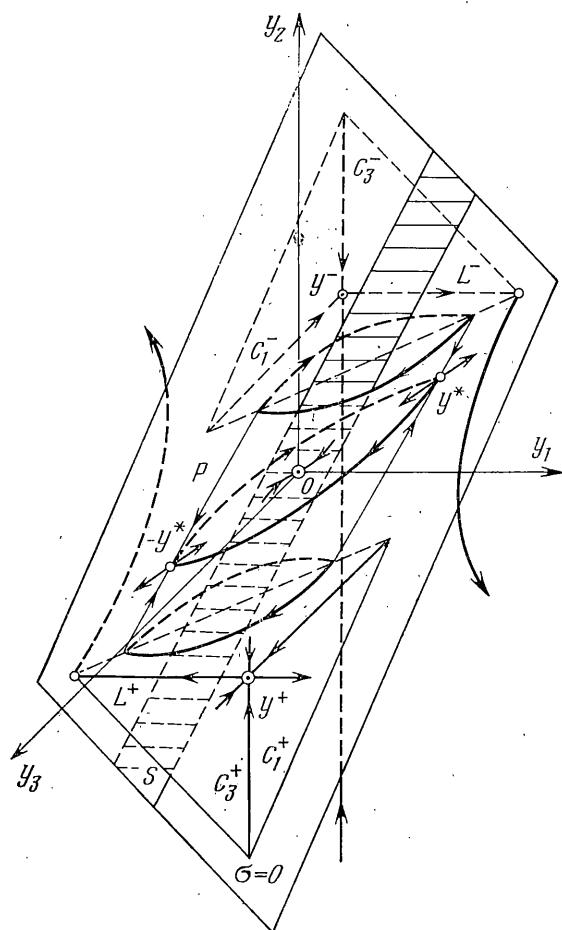
и происходят в области S фазового пространства, границы которой задаются выражениями (1.3) и дополнительными условиями выхода φ на ограничения (1.4) при знаке равенства в них. Медленные изменения φ устойчивы относительно быстрых при условии несущественности малого параметра, когда

$$\sum_{l=1}^{n_j} v_{lj} < 0 \quad (1.5)$$

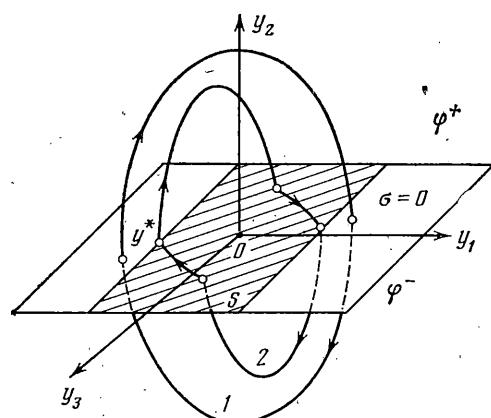
При $\mu \rightarrow 0$ ($R_i \rightarrow \infty$) область (1.3) фазового пространства вырождается в гиперплоскость

$$\sigma = \sum_{l=1}^{n_j} y_l = 0$$

¹ Увеличение дифференциального внутреннего сопротивления R_i обычно достигается введением в усилитель жесткой отрицательной связи по току.



Фиг. 3



Фиг. 4

переключения релейной функции $\varphi(\sigma)$. При условии (1.5) область S в пространстве, ограниченном гиперплоскостями (1.3), (1.4) (при знаках равенства в неравенствах (1.4)) эквивалентна области скользящих движений по гиперплоскости переключений, вне которой быстрые изменения φ становятся скачками от φ^- до φ^+ и наоборот.

Поскольку для рассматриваемых систем (1.2) условия несущественности малого параметра (1.5) выполняются (для каждого вида коррекции

$j=1 \div 3 \sum_{l=1}^{n_j} v_{lj} = -T^{-1} < 0$), доопределение релейной функции $\varphi(\sigma)$ в точке разрыва будет следующим:

$$\varphi(0) = - \left(\sum_{l=1}^{n_j} v_{lj} \right)^{-1} \sum_{l=1}^{n_j} \lambda_{lj} y_l, \quad y \in S$$

$$\varphi(0) \in [\varphi^-, \varphi^+], \quad y \notin S$$

Данное доопределение $\varphi(\sigma)$ совпадает с доопределениями [8, 9] релейной функции в области скольжения и позволяет линеаризовать систему (1.2) в окрестности состояния равновесия $y=0$. Область устойчивости состояния равновесия $y=0$ линеаризованной системы (1.2) в скользящем режиме задаётся в пространстве параметров условиями

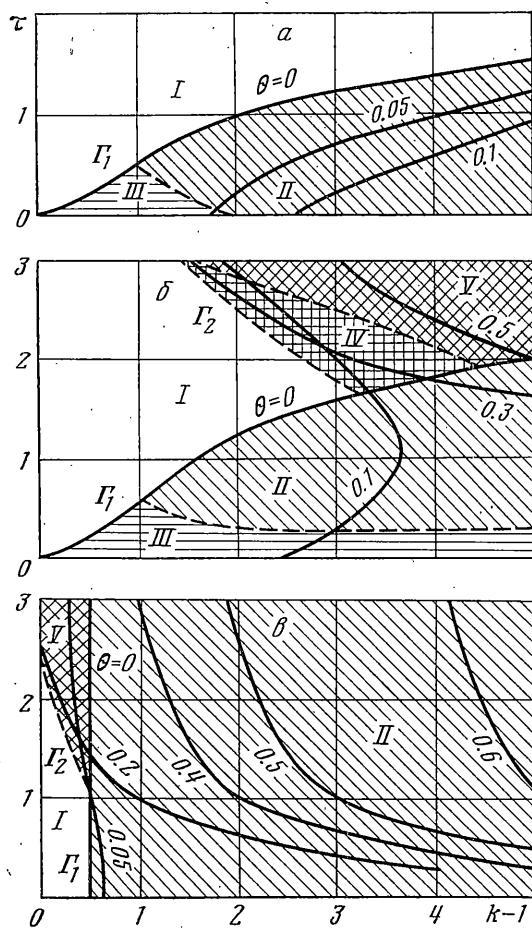
$$T \geq 0, \tau \geq 0, k-1 \geq 0, 1 \geq \varepsilon \geq 0. \quad (1.6)$$

при каждом из рассматриваемых видов коррекции, откуда следует, что в рамках линеаризованных моделей невозможно отдать предпочтение какому-либо из рассматриваемых вариантов системы стабилизации.

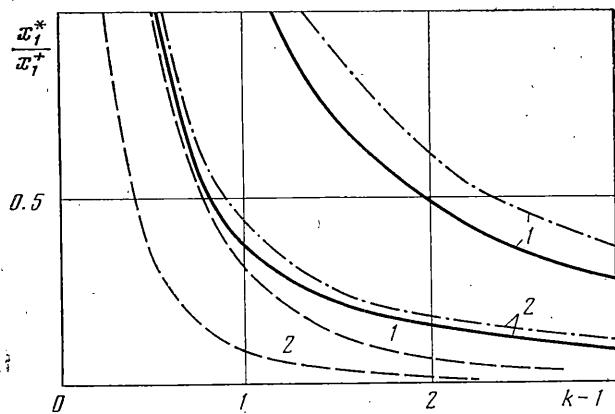
Кроме рассмотренных интегральных многообразий: состояния равновесия $y=0$, устойчивого в области параметров (1.6), области S скользящих движений по гиперплоскости $\sigma=0$, в фазовом пространстве системы (1.2) можно выделить интегральные многообразия, изображенные качественно для системы с идеальной коррекцией по скорости ($j=1$) на фиг. 3. Это — неустойчивые состояния равновесия $y^\pm = -\varphi^\pm \|v_{1j}/\lambda_{1j}, \dots, v_{nj}/\lambda_{nj}\|$ типа седло — узел, сепаратрисные плоскости $C_i^\pm: \lambda_{ij}y_i + v_{ij}\varphi^\pm = 0$, в которых все фазовые траектории идут в состояния равновесия y^+ или y^- , усы сепаратрис L^\pm , которые выходят из неустойчивых состояний равновесия и образуются пересечением плоскостей $C_l^\pm: \lambda_{lj}y_l + v_{lj}\varphi^\pm = 0$ ($l=2, \dots, n_j$), а также возможные периодические движения со своими интегральными многообразиями P .

2. Определение условий существования периодических движений и их устойчивости в зависимости от параметров системы проводилось методом точечных отображений [10].

Граница области S или гиперплоскость переключения $\sigma=0$ отображались сами в себя при симметричных уровнях ограничения $\varphi^+=-\varphi^-$. Исследовались симметричные относительно начала координат периодические движения, вид которых изображен на фиг. 4: первого типа (1) — без участков скольжения, второго типа (2) — с участками скольжения по гиперплоскости переключения $\sigma=0$. Каждому периодическому движению, являющемуся замкнутой фазовой траекторией, соответствует неподвижная точка y^* точечного отображения. Результаты исследования приведены на фиг. 5, $a \div e$ соответственно для $j=1 \div 3$. На этих фигурах изображено разбиение плоскости безразмерных параметров $k-1, \tau$ в области (1.6) устойчивости равновесного состояния $y=0$ на подобласти одинаковой структуры фазового пространства при фиксированных параметрах $T=2, \varepsilon=0$.



Фиг. 5



Фиг. 6

($j=1$), $\varepsilon=0$, 1 ($j=2$, 3). Подобласть параметров I характеризуется отсутствием исследуемых периодических движений. В частности, для $j=1$ при $k-1=T^{-1}$, $\tau=1$ плоскость переключения $\sigma=0$ параллельна сепаратрисным плоскостям и вся является областью скольжения [5]. Подобласти параметров II–V характеризуются наличием исследуемых периодических движений в системе (1.2) и отмечены на фиг. 5, а–в одинаковой штриховкой. В подобласти параметров II в системе существует единственное неустойчивое периодическое движение первого типа (без участков скольжения), в подобласти III – единственное неустойчивое периодическое движение второго типа (с участками скольжения), в подобласти IV – два периодических движения первого типа, причем одно (с меньшим периодом) неустойчивое, другое – устойчивое, в подобласти V – два неустойчивых периодических движения первого типа с различными периодами. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что коррекция дифференцирующей цепочкой ($j=2$) при учете ограниченности ресурсов регулирования в системе стабилизации магнитного подшипника в динамическом отношении является лучшей по сравнению с коррекцией инерционной обратной связью усилителя ($j=3$), поскольку подобласть параметров I отсутствия периодических движений в этом случае получается большей и стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к аналогичной подобласти системы с идеальной коррекцией по скорости ($j=1$). На фиг. 5 приведены также кривые равного периода $t^* = -\ln \theta = \text{const}$ периодических движений. Ход кривых равного периода периодических движений первого типа может быть получен аналитически из выражений:

$$\sum_{l=1}^{n_j} y_l^* = \sum_{l=1}^{n_j} \frac{v_{lj}}{\lambda_{lj}} \frac{1-\theta^{-\lambda_{lj}}}{1+\theta^{-\lambda_{lj}}} = 0 \quad (2.1)$$

где y_l^* ($l=1, \dots, n_j$) – координаты неподвижной точки на гиперплоскости переключения $\sigma=0$. В частном случае, когда $\theta=0$ ($t^* \rightarrow \infty$), из выражений (2.1) получается граница Γ_1 рождения неустойчивого периодического движения из петли усов сепаратрис. В зависимости от вида коррекции Γ_1 определяется следующими выражениями:

$$\begin{aligned} j=1, \quad & \tau = T - (T+1)k^{-1} \\ j=2, \quad & \tau = \frac{kT - (T+1)}{k - \varepsilon(k-1)(T+1)} \\ j=3, \quad & k = (T+1)T^{-1} \end{aligned}$$

Вторая граница Γ_2 подобласти I, на которой зарождаются периодические движения с конечным периодом ($\theta \neq 0$), существует лишь при реальных звеньях коррекции ($j=2, 3$). Причем для дифференцирующей цепочки уменьшение параметра ε приводит к уходу границы Γ_2 на бесконечность и в пределе при $\varepsilon=0$ коррекция дифференцирующей цепочкой эквивалентна идеальной коррекции по скорости ($j=1$). Для коррекции с помощью инерционной обратной связи усилителя ($j=3$) такого предельного перехода нет.

Как следует из рассмотрения интегральных многообразий фазового пространства системы, границы области притяжения устойчивого состояния равновесия $y=0$ задаются либо интегральными многообразиями C_l^\pm ($l=1, \dots, n_j$) неустойчивых состояний равновесия y^\pm , как и при малой постоянной времени электромагнита [4], либо цилиндрическим многообразием P ближайшего к $y=0$ неустойчивого периодического движения. Указанные многообразия являются точными границами области притяже-

ния. В эти границы вписываются области притяжения, построенные для аналогичной задачи с помощью функций Ляпунова в работе [11].

Проверка результатов, полученных методом точечных отображений, проводилась численным решением безразмерной системы уравнений (1.2) методом Рунге – Кутта при кусочно-линейной зависимости $\varphi(\sigma)$ с конечным параметром $R_i=10^{-2}$, близким к реальному. Начальные условия выбирались при этом в малой окрестности или неустойчивых состояний равновесия $y_0=y^\pm\pm 0.01$ или найденных неподвижных точек $y_0=y^*\pm 0.01$ точечного отображения. При начальных условиях внутри области притяжения система приходит в малую окрестность устойчивого состояния равновесия, вне — в окрестность устойчивого периодического движения, если оно существует, или уходит на бесконечность. Из этого можно сделать вывод, что координаты неустойчивых состояний равновесия y^\pm в подобласти параметров I или координаты ближайшей к началу координат неподвижной точки рассмотренных точечных отображений в других подобластях параметров могут служить мерой величины области притяжения устойчивого состояния равновесия.

В исходных переменных неподвижные точки на гиперплоскости переключения $\sigma=c^T x=0$ имеют координаты, которые в зависимости от вида коррекции задаются выражениями ($j=1$):

$$x_1^* = \frac{T}{T^2-1} \left(T \frac{1-\theta^{1/T}}{1+\theta^{1/T}} - \frac{1-\theta}{1+\theta} \right) \varphi^\pm \quad (2.2)$$

$$x_2^* = \frac{-x_1^*}{T}, \quad x_3^* = \frac{1-\theta^{1/T}}{1+\theta^{1/T}} \varphi^\pm$$

и для $j=2, 3$ отличающимися лишь четвертыми координатами

$$j=2, \quad x_4^* = \left\{ \frac{1}{T^2-1} \left[T^2 \frac{T-\tau}{T-\varepsilon\tau} \frac{1-\theta^{1/T}}{1+\theta^{1/T}} - \frac{T-\tau+\varepsilon\tau(1-T\tau)}{1-\varepsilon^2\tau^2} \frac{1-\theta}{1+\theta} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon^2\tau^3(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2\tau^2)(T-\varepsilon\tau)} \frac{1-\theta^{1/\varepsilon\tau}}{1+\theta^{1/\varepsilon\tau}} \right\} \varphi^\pm$$

$$j=3, \quad x_4^* = \frac{1}{T-\tau} \left(T \frac{1-\theta^{1/T}}{1+\theta^{1/T}} - \tau \frac{1-\theta^{1/\tau}}{1+\theta^{1/\tau}} \right) \varphi^\pm$$

где $\theta \in [0, 1]$ — параметр, определяемый по результатам расчета (см. фиг. 5). При $\theta=0$ (граница Γ_1) эти выражения задают координаты x^{**} точки одновременного пересечения усов сепаратрис L^\pm , гиперплоскости переключения $\sigma=0$ и сепаратрисных гиперплоскостей C_1^\pm :

$$(T+1)(x_1+x_2)-Tx_3+\varphi^\pm=0 \quad (2.3)$$

Очевидно, что $|x^{**}| > |x^*|$, т. е. наибольшая область притяжения устойчивого состояния равновесия достигается при выборе параметров из подобласти I, когда область притяжения совпадает с областью управляемости разомкнутой системы. С появлением в системе неустойчивых периодических движений, т. е. при выходе из подобласти параметров I, область притяжения устойчивого состояния равновесия существенно уменьшается. По формулам (2.2) на фиг. 6 изображена зависимость допустимого изменения зазора по отношению к координате неустойчивого состояния равновесия x_1^+ от продольной жесткости $k-1$ магнитного подшипника при безразмерных параметрах системы: $\tau=0.7$, $\varepsilon=0$ для $j=1$ (штрихпунктирные линии), $\varepsilon=0.1$ для $j=2$ (сплошные линии) и $j=3$ (пунктирные линии) при

значениях параметра T равных 2 и 4 (на фиг. 6 отмечены соответственно цифрами 1 и 2).

На основании полученных результатов можно оценить также допустимые начальные условия по скорости перемещения ротора, соответствующие импульсу силы по оси подвеса. Так, при параметрах из подобласти I и масштабах: смещения $x_m=0.2$ см, времени $t_m=10^{-2}$ с, безразмерной постоянной времени электромагнитов $T=2$, уровне симметричного ограничения $\varphi^+=\varphi^-=1$, начальная скорость перемещения ротора, согласно (2.3), не должна превышать ± 7 см/с. В подобластях параметров II—V допустимые отклонения фазовых координат тем меньше, чем дальше выбраны параметры от границы подобласти I.

Таким образом, для улучшения динамических характеристик системы стабилизации магнитного подшипника следует использовать в качестве корректирующего звена дифференцирующую щепочку, увеличивать дифференциальное внутреннее сопротивление усилителя постоянного тока, выбирать параметры системы из подобласти I отсутствия периодических движений, увеличивать уровни ограничения выходного напряжения усилителя φ^\pm , уменьшать относительную постоянную времени электромагнитов.

Авторы благодарят Ю. И. Неймарка, Д. М. Климова, Е. А. Девянина за ценные замечания, сделанные при обсуждении данной работы.

Поступила 24 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Geary P. J.* Magnetic and electric suspensions. South Hill, 1964 (Brit. Scient. Instrum. Assoc. SIRA Res. Rept, R 314).
2. *Малеев П. И.* Новые типы гироскопов. Л., «Судостроение», 1971.
3. *Braunbek W.* Freischwebende Körpere im elektrischen und magnetischen Feld. Z. Phys., 1939, Bd 112, N. 7—8, S. 753—763.
4. *Воронков В. С., Поздеев О. Д., Сандалов В. М.* О динамике магнитного подвеса. Изв. вузов. Электромеханика, 1974, № 10.
5. *Воронков В. С., Поздеев О. Д.* О динамике системы авторегулирования магнитного подвеса. В сб.: Динамика систем, вып. 5. Изд-во Горьковск. ун-та, 1975.
6. *Лурье А. И.* О канонической форме уравнений теории автоматического регулирования. ПММ, 1948, т. 12, вып. 5.
7. *Андронов А. А., Битт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
8. *Ильинский А. Ю.* Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
9. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960, т. 51, № 1.
10. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1972.
11. *Формальский А. М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М., «Наука», 1974.