МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1980

УДК 531.7

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ

А. И. ТКАЧЕНКО

(Киев)

Задача определения параметров движения с помощью системы датчиков (чувствительных элементов), установленных на движущемся объекте, решается асимптотической оценкой (идентификацией) совокупности переменных, характеризующих состояние датчиков, и искомых параметров движения. Такой подход позволяет повысить точность измерений: во-первых, предположение о постоянстве или медленном изменении измеряемых параметров, лежащее в основе обычного использования датчиков, заменяется предположением о постоянстве производных достаточно высокого порядка от измеряемых параметров; во-вторых, влияние динамики датчиков на точность измерений заменяется влиянием динамики идентификатора состояния, характеристики которого в отличие от динамических характеристик датчиков могут быть выбраны произвольно. Рассмотрен пример использования предложенной методики для уточнения показаний трех дифференцирующих гироскопов при измерении угловой скорости объекта.

1. Пусть для определения параметров $\omega_1(t),\ldots,\omega_n(t)$, характеризующих движение некоторого объекта, используются установленные на объекте датчики (чувствительные элементы), поведение которых с достаточной точностью описывается уравнениями

$$\beta_i^{\cdot\cdot}+h_i\beta_i^{\cdot}+b_i\beta_i=p_i\omega_i+\sum_{j=1}^n q_{ij}\omega_j^{\cdot}+\varphi_{ij}\quad (i=1,\ldots,n)\qquad (1.1)$$

Здесь β_i — доступная измерению выходная координата i-го датчика; h_i, b_i, p_i, q_{ij} — известные постоянные, причем h_i, b_i, p_i положительны. Функции $\varphi_i=\varphi_j(\beta_1,\ldots,\beta_n;\ \omega_1,\ldots,\omega_n)$ ограничены по отношению к $\beta_1,\ldots,\beta_n$ и допускают представление в виде конечных либо бесконечных рядов по степеням своих аргументов с членами не ниже второй степени относительно этих аргументов. Параметры ω_i изменяются в ограниченной области, содержащей точку $\omega_i=0$ $(i=1,\ldots,n)$.

Нахождение величин $\omega_1,\ldots,\omega_n$ по известным значениям $\beta_1,\ldots,\beta_n$ составляет содержание обратной задачи теории измерительных систем [1] применительно к системе уравнений датчиков (1.1). Эта задача может быть, в частности, сформулирована как задача асимптотической оценки параметров движения: по заданным $\beta_1(t),\ldots,\beta_n(t)$ найти величины $\omega_1^*(t),\ldots,\omega_n^*(t)$, такие, что $\omega_i^*\to\omega_i$ при $t\to\infty$. Приближенное решение этой задачи, обычно используемое на практике, состоит в том, что оценкой параметра ω_i служит величина $\omega_i^\circ=p_i^{-1}b_i\beta_i$, принимаемая в качестве показания i-го датчика. Это решение асимптотически устойчиво при выполнении условий $\omega_i^{\cdot}\equiv0$, $\varphi_i=0$ $(i=1,\ldots,n)$. Известные методы компенсации погрешностей датчиков, вызванных нарушением указанных условий [1-4], либо не обеспечивают полного устранения ошибок измерений, либо при их реализации приходится сталкиваться с такими трудностями, как необходимость увеличения числа датчиков, получение начальных значений искомых параметров, дифференцирование показаний датчиков.

Сформулируем задачу асимптотической оценки параметров ω_i по показаниям датчиков следующим образом: по известным $\beta_1(t),\ldots,\beta_n(t)$ найти величины $\omega_i^*(t),\ldots,\omega_n^*(t)$, такие, что если $\omega_i^{(k+1)}(t)\equiv 0$ $(i=1,\ldots n;$ $k\geqslant 1$ — заданное целое), то $\omega_i^*\to\omega_i$ при $t\to\infty$.

Предположение о том, что производные достаточно высокого порядка от искомых параметров движения пренебрежимо малы, представляется правдоподобным, если эти параметры содержат только низкочастотные составляющие; однако в общем случае справедливость этого предположения маловероятна. Поэтому, решая поставленную задачу, рассмотрим возможность такого выбора характеристик решения, чтобы изменение упомянутых производных в ограниченных пределах не приводило к существенным погрешностям оценки параметров движения.

2. Будем считать параметры $\omega_i(t)$ и их производные до k-го порядка включительно непрерывными и ограниченными при $t\geqslant t_0$.

Введем обозначения

$$x_{i1}=\beta_i,\quad x_{i2}=\dot\beta_i,\quad x_{i3}=r_{i0}^{-1}\left(p_i\omega_i+\sum_{j=1}^{n}q_{ij}\dot\omega_j\right),$$

$$x_{i,m+3}=r_{im}^{-1}\dot x_{i,m+2}\quad (m=1,\ldots,k;\ i=1,\ldots,n) \tag{2.1}$$

Здесь $r_{i0}\neq 0,\ldots,r_{ik}\neq 0$ — постоянные. Учитывая предположение $\omega_i^{(k+1)}\equiv 0$, можно представить выражения (2.1) для $x_{i3},\ldots,x_{i,k+3}$ в форме системы $n(k+1)$ линейных алгебраических уравнений относительно $\omega_i,\ldots,\omega_i^{(k)}$, имеющей единственное решение

$$\omega_i^{(k)}=p_i^{-1}r_{i0}\ldots r_{ik}x_{i,k+3},$$

$$\omega_i^{(m-1)}=p_i^{-1}\left(r_{i0}\ldots r_{i,m-1}x_{i,m+2}-\sum_{j=1}^{n}q_{ij}\omega_j^{(m)}\right)\quad (m=1,\ldots,k;\ i=1,\ldots,n) \tag{2.2}$$

Из формул (1.1), (2.1), (2.2) следует система $n(k+3)$ уравнений с таким же числом неизвестных

$$\dot x_{i1}=x_{i2},\ \dot x_{i2}=-b_ix_{i1}-h_ix_{i2}+r_{i0}x_{i3}+$$

$$+\psi_i(x_{11},\ldots,x_{n1};\ x_{13},\ldots,x_{1,k+3},\ x_{23},\ldots,x_{n,k+3})$$

$$\dot x_{i,m+2}=r_{im}x_{i,m+3}\quad (m=1,\ldots,k),\qquad \dot x_{i,k+3}=0\quad (i=1,\ldots,n) \tag{2.3}$$

Функции ψ_i получены в результате подстановки в φ_i вместо величин $\omega_1,\ldots,\omega_n$ их выражений по формулам (2.2). Представления функций ψ_i в виде степенных рядов содержат члены не ниже второй степени относительно $x_{i1},\ x_{j3},\ldots,x_{j,k+3}$ $(i,j=1,\ldots,n)$.

Вводя конкретное i и положив $\psi_i=0$, выделим из системы (2.3) замкнутую линеаризованную подсистему $(k+3)$-го порядка. В качестве выхода этой подсистемы будем рассматривать величину $y_i=x_{i1}$. Нетрудно убедиться, что при $k=0$, $r_{i0}\neq 0$ подобная подсистема, состоящая из трех уравнений, полностью наблюдаема. Поэтому и при произвольном k выделенная подсистема полностью наблюдаема и для нее существует асимптотический k-идентификатор состояния [5].

Уравнения идентификатора состояния для нелинейной системы (2.3) запишем, следуя [6], в построении линейной части идентификатора

$$\dot z_{i1}=z_{i2}+l_{i1}(x_{i1}-z_{i1}) \tag{2.4}$$

$$\dot{z}_{i2}=-b_i z_{i1}-h_i z_{i2}+r_{i0} z_{i3}+l_{i2}(x_{j1}-z_{i1})+$$
$$+\psi_i(x_{11},\ldots,x_{n1};\, z_{13},\ldots,z_{1,\,k+3},\, z_{23},\ldots,z_{n,\,k+3})$$
$$\dot{z}_{i,m+2}=r_{im} z_{i,m+3}+l_{i,m+2}(x_{i1}-z_{i1}) \qquad (m=1,\ldots,k)$$
$$\dot{z}_{i,k+3}=l_{i,k+3}(x_{i1}-z_{i1}) \qquad (i=1,\ldots,n)$$

Начальные условия для уравнений (2.4) зададим в виде $z_{i1}(t_0)=x_{i1}(t_0)$, $z_{i2}(t_0)=\ldots=z_{i,\,k+3}(t_0)=0$. Сформируем оценки искомых параметров движения и их производных с помощью выражений

$$\overset{*(k)}{\omega_i}=p_i^{-1} r_{i0}\ldots r_{ik} z_{i,k+3}, \tag{2.5}$$
$$\overset{*(m-1)}{\omega_i}=p_i^{-1}\left(r_{i0}\ldots r_{i,m-1} z_{i,m+2}-\sum_{j=1}^{n} q_{ij}\overset{*(m)}{\omega_j}\right) \qquad (m=1,\ldots,k;\ i=1,\ldots,n)$$

Из единственности решения (2.2) упоминавшейся системы алгебраических уравнений следует, что $\overset{*(k)}{\omega_i}\to\overset{(k)}{\omega_i},\ldots,\omega_i^*\to\omega_i$ тогда и только тогда, когда $z_{il}\to x_{il}$ $(i=1,\ldots,n;\ l=3,\ldots,k+3)$.

3. В силу формул (2.3), (2.4) погрешности идентификатора $\varepsilon_{ij}=x_{ij}-z_{ij}$, удовлетворяют системе $n(k+3)$ уравнений

$$\dot{\varepsilon}_{i1}=\varepsilon_{i2}-l_{i1}\varepsilon_{i1} \tag{3.1}$$
$$\dot{\varepsilon}_{i2}=-(b_i+l_{i2})\varepsilon_{i1}-h_i\varepsilon_{i2}+r_{i0}\varepsilon_{i3}+$$
$$+f_i(x_{11},\ldots,x_{n1};\, x_{13},\ldots,x_{n,\,k+3};\, \varepsilon_{13},\ldots,\varepsilon_{n,\,k+3})$$
$$\dot{\varepsilon}_{i,m+2}=r_{im}\varepsilon_{i,m+3}-l_{i,m+2}\varepsilon_{i1} \quad (m=1,\ldots,k), \qquad \dot{\varepsilon}_{i,k+3}=-l_{i,k+3}\varepsilon_1 \quad (i=1,\ldots,n)$$
$$f_i=\psi_i(x_{11},\ldots,x_{n1};\, x_{13},\ldots,x_{n,\,k+3})-\psi_i(x_{11},\ldots,x_{n1};\, z_{13},\ldots,z_{n,\,k+3})$$

с начальными условиями $\varepsilon_{i1}(t_0)=0$, $\varepsilon_{is}(t_0)=x_{is}(t_0)$ $(s=2,\ldots,k+3)$. Здесь f_i — функции, разложения которых в степенные ряды содержат члены не ниже первой степени относительно $\varepsilon_{13},\ldots,\varepsilon_{1,\,k+3},\ \varepsilon_{23},\ldots,\varepsilon_{n,\,k+3}$. Из-за ограниченности параметров ω_i и их производных функции f_i ограничены по аргументу t, от которого они зависят неявно через $x_{11},\ldots,x_{n1},\ x_{13},\ldots,x_{n,\,k+3}$. В соответствии с леммой Адамара [7] можно представить f_i в виде

$$f_i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=3}^{k+3} g_{i,jl}(x_{11},\ldots,x_{n1};\, x_{13},\ldots,x_{n,k+3};\, z_{13},\ldots,z_{n,k+3})\,\varepsilon_{jl} \tag{3.2}$$

где $g_{i,\,jl}$ — функции, допускающие представление посредством степенных рядов.

Очевидно, $z_{il}\to x_{il}$ $(i=1,\ldots,n;\ l=3,\ldots,k+3)$ при $t\to\infty$ в том и только в том случае, если нулевое решение системы (3.1) асимптотически устойчиво (тривиальный случай $x_{il}(t)\equiv 0$ здесь не рассматривается). В отличие от задач стабилизации квазилинейных динамических систем с использованием идентификаторов состояния [8] в рассматриваемой задаче речь не идет об обеспечении асимптотической устойчивости системы «объект плюс идентификатор», состояние которой определяется переменными x_{ij}, ε_{ij}. Необходимо лишь задать коэффициенты l_{ij} так, чтобы выполнялось требование $\varepsilon_{ij}\to 0$ при $t\to\infty$, в то время как переменные x_{ij}, вообще говоря, не стремятся к нулю.

При $f_i=0$ система (3.1) распадается на n независимых линейных стационарных подсистем $(k+3)$-го порядка. Для того чтобы i-й такой подсистеме соответствовало наперед заданное характеристическое уравнение

$$\lambda^{k+3}+\gamma_{i1}\lambda^{k+2}+\ldots+\gamma_{i,\,k+2}\lambda+\gamma_{i,\,k+3}=0 \tag{3.3}$$

все корни которого имеют отрицательные вещественные части, достаточно определить коэффициенты $l_{i1},\ldots,l_{i,\,k+3}$ выражениями

$$l_{i1}=\gamma_{i1}-h_i,\quad l_{i2}=\gamma_{i2}-b_i-h_il_{i1},\quad l_{i,\,m+3}=(r_{i0}\ldots r_{im})^{-1}\gamma_{i,\,m+3}\qquad (m=0,\,1,\ldots,\,k) \tag{3.4}$$

Будем считать область изменения параметров $\omega_1,\ldots,\omega_n$ и соответствующую область изменения координат $\beta_1,\ldots,\beta_n$ такими, что в области значений $\varepsilon_{13},\ldots,\varepsilon_{1,\,k+3},\ldots,\varepsilon_{n,\,k+3}$, имеющих тот же порядок, что и величины $x_{13},\ldots,x_{1,\,k+3},\ldots,x_{n,\,k+3}$ соответственно, справедливы оценки

$$|f_i|<a_i(|\varepsilon_{13}|+\ldots+|\varepsilon_{1,\,k+3}|+\ldots+|\varepsilon_{n,\,k+3}|)$$

где $a_i>0$ — некоторые постоянные. Это имеет место, в частности, если координаты β_i достаточно малы, а функции $g_{i,\,jl}$ в формулах (3.2) являются величинами не ниже первого порядка относительно $x_{11},\ldots,x_{n1}$. Тогда в силу теорем об устойчивости по первому приближению [9] решение $\varepsilon_{ij}=0$ $(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,k+3)$ системы (3.1) асимптотически устойчиво, если коэффициенты (3.4) заданы так, что все корни каждого из характеристических уравнений (3.3) имеют отрицательные и достаточно большие по абсолютной величине вещественные части. При этом формулы (2.5) дают решение задачи, поставленной в п. 1.

4. Оценим погрешности идентификации параметров ω_i, вызванные нарушением условий $\omega_i^{(k+1)}\equiv0$. Распространим предположение о непрерывности и ограниченности на производные от $\omega_i(t)$ до $(k+3)$-го порядка. Пусть

$$\sigma_i(t)=p_i\omega_i^{(k+1)}+\sum_{j=1}^{n}q_{ij}\omega_j^{(k+2)}\neq0 \tag{4.1}$$

При этом последнее равенство (2.3) заменяется выражением $\dot{x}_{i,k+3}=(r_{i0},\ldots,r_{ik})^{-1}\sigma_i$, а последнее равенство (3.1) — уравнением

$$\dot{\varepsilon}_{i,k+3}=-l_{i,k+3}\varepsilon_{i1}+(r_{i0}\ldots r_{ik})^{-1}\sigma_i$$

Пренебрежем функциями f_i, считая их столь малыми, что их влияние на оценку точности идентификатора незначительно по сравнению с влиянием величин σ_i. Заметим, что если $\dot{x}=Ax+f(t)$, $x(t_0)=x_0$, где A — постоянная матрица, зависящая от параметров, варьирование которых позволяет произвольно изменять все ее собственные числа λ_i, а $f(t)$ — вектор-функция с ограниченной нормой, то для любого $N>0$ найдутся такое $\rho<0$ и такое $T>t_0$, что при $\max\operatorname{Re}\lambda_i<\rho$ норма вектора x при $t\geqslant T$ удовлетворяет ограничению $\|x(t)\|<N$.

С помощью соображений, подобных тем, какие используются при доказательстве теоремы Перрона [10], можно показать, что если все корни уравнений (3.3) вещественны и отрицательны и $\varkappa_i=|\lambda_{i\mu}^{-1}\dot{\sigma}_i|\leqslant\sigma_i$, где $\lambda_{i\mu}$ — наименьший по абсолютной величине корень уравнения (3.3), то при достаточно больших значениях t справедливы оценки

$$\varepsilon_{i,l+3}=(r_{i0}\ldots r_{il})^{-1}\gamma_{i,l+2}\gamma_{i,k+3}^{-1}\sigma_i+O(\varkappa_i)\qquad (l=0,1,\ldots,k;\ i=1,\ldots,n) \tag{4.2}$$

На основании формул (2.2), (2.5) и (4.2) получим приближенные оценки ошибок идентификации параметров ω_i и их производных при достаточно больших значениях t

$$\delta\omega_i^{(k)}=\omega_i^{(k)}-\omega_i^{*(k)}\approx p_i^{-1}\gamma_{i,k+2}\gamma_{i,k+3}^{-1}\sigma_i \tag{4.3}$$

$$\delta\omega_i^{(m-1)}=\omega_i^{(m-1)}-\omega_i^{*(m-1)}\approx$$

$$\approx p_i^{-1}\left(\gamma_{i,m+1}\gamma_{i,k+3}^{-1}\sigma_i-\sum_{j=1}^{n}q_{ij}\delta\omega_j^{(m)}\right)\quad (m=1,\ldots,k;\ i=1,\ldots,n)$$

Предположим, что корни λ_{ij} уравнений (3.3) удовлетворяют ограничениям $0<\rho_1\leqslant|\lambda_{ij}|\leqslant\rho_2$ $(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,k+3)$ и, кроме того, $p=\min\limits_i p_i\gg1$.

Из выражений (4.3) следуют оценки

$$|\delta\omega_i^{(k)}|\leqslant\frac{(k+3)\rho_2^{k+2}}{p\rho_1^{k+3}}|\sigma_i|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|\delta\omega_i|\leqslant p^{-1}\left[\frac{(k+3)(k+2)\rho_2^2}{2\rho_1^{k+3}}|\sigma_i|+\sum_{j=1}^{n}|q_{ij}\delta\omega_j^{\cdot}|\right] \tag{4.4}$$

Пусть можно задать достаточно высокий порядок k-идентификатора и путем надлежащего выбора коэффициентов (3.4) сделать все корни уравнений (3.3) вещественными, отрицательными и столь большими по абсолютной величине, что $\rho_2^2|\sigma_i|\ll p\rho_1^{k+3},\ldots,\rho_2^{k+2}|\sigma_i|\ll p^{k+1}\rho_1^{k+3}$. Очевидно, такая возможность существует на практике, если частоты изменения параметров ω_i не слишком велики. Тем самым, как показывают формулы (4.4), в принципе обеспечивается высокая точность определения параметров ω_i подстановкой решения уравнений (2.4) в формулы (2.5) даже в том случае, когда $\omega_i^{(k+1)}\neq0$. Следует, однако, учесть (это подтверждается моделированием), что при весьма больших значениях $|\lambda_{ij}|$ влияние возмущений, вызванных ошибками округления при вычислениях, приводит к быстрому росту погрешностей идентификатора. Поэтому предлагаемый метод асимптотической оценки параметров движения эффективен лишь при условии, что эти параметры не содержат аддитивных высокочастотных составляющих.

Очевидно также, что постоянные $r_{i0},\ldots,r_{ik}$, присутствие которых может быть вызвано необходимостью масштабирования при вычислениях, не оказывают существенного влияния на точность оценки параметров ω_i.

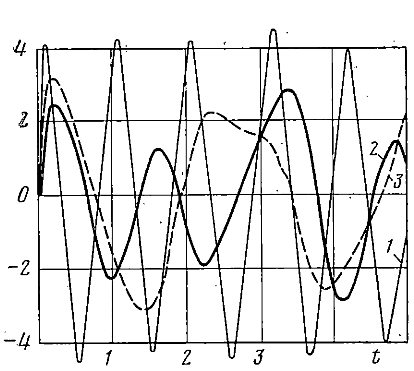
5. *Пример*. Пусть для измерения проекций ω_1, ω_2, ω_3 угловой скорости движущегося объекта на три связанных с ним взаимно ортогональных направления используются три установленных на объекте дифференцирующих гироскопа, уравнения которых приводятся к виду

$$\begin{gathered}
\beta_1^{\cdot\cdot}+h_1\beta_1^{\cdot}+b_1\beta_1=p_1(\omega_1\cos\beta_1-\omega_3\sin\beta_1)-\omega_2^{\cdot}+\\
+n_1(\omega_1\cos\beta_1-\omega_3\sin\beta_1)(\omega_1\sin\beta_1+\omega_3\cos\beta_1)\\
\beta_2^{\cdot\cdot}+h_2\beta_2^{\cdot}+b_2\beta_2=p_2(\omega_2\cos\beta_2-\omega_3\sin\beta_2)+\omega_1^{\cdot}+\\
+n_2(\omega_2\cos\beta_2-\omega_3\sin\beta_2)(\omega_2\sin\beta_2+\omega_3\cos\beta_2)\\
\beta_3^{\cdot\cdot}+h_3\beta_3^{\cdot}+b_3\beta_3=p_3(\omega_3\cos\beta_3-\omega_2\sin\beta_3)-\omega_1^{\cdot}+\\
+n_3(\omega_3\cos\beta_3-\omega_2\sin\beta_3)(\omega_3\sin\beta_3+\omega_2\cos\beta_3)
\end{gathered} \tag{5.1}$$

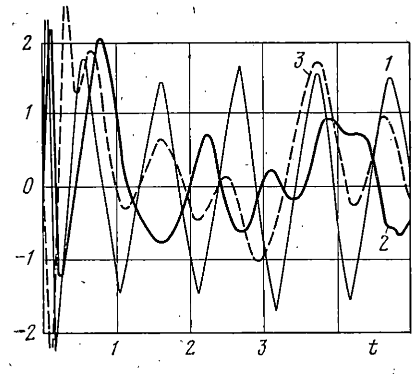
Уравнения (5.1) интегрировались при следующих условиях: $b_1=b_2=$ $=b_3=38\,100\ \text{с}^{-2}$, $h_1=h_2=h_3=250\ \text{с}^{-1}$, $p_1=p_2=p_3=1\,143\ \text{с}^{-1}$, $n_1=n_2=n_3=0.4$, $\omega_1=0.1\sin 6t\ \text{с}^{-1}$, $\omega_2=0.15\cos 09t\sin 3t\ \text{с}^{-1}$, $\omega_3=(0.18\sin 2.4t+0.1)\ \text{с}^{-1}$, $t_0=0$, $\beta_i(0)=\beta_i^{\cdot}(0)=0$ $(i=1, 2, 3)$.

На фиг. 1 кривые *1*, *2*, *3* показывают умноженные на 10^3 погрешности $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$, $\delta\omega_3$ соответственно (в с^{-1}) в зависимости от t в с при использовании оценок $\omega_i^{\circ}=p_i^{-1}b_i\beta_i$, имитирующих показания датчиков.

Одновременно с уравнениями (5.1) интегрировались соответствующие уравнения идентификатора (2.4), составленные для $k=2$, при $r_{i0}=p_i$, $r_{i1}=$



Фиг. 1



Фиг. 2

$=r_{i2}=1$ $(i=1, 2, 3)$. Коэффициенты (3.4) были заданы так, что каждое из трех характеристических уравнений (3.3) имело пятикратный корень $\lambda=$ $=-200\ \text{с}^{-1}$. Кривые *1*, *2*, *3* на фиг. 2 представляют умноженные на 10^5 погрешности $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$, $\delta\omega_3$ соответственно в зависимости от t в с, полученные при оценке ω_1, ω_2, ω_3 по формулам (2.5). В рассмотренном примере величины $\omega_i^{(k+1)}=\omega_i^{\cdot\cdot\cdot}$ существенно отличны от нуля, тем не менее использование идентификатора состояния позволило повысить точность определения угловой скорости на два порядка. Производные $\omega_1^{\cdot}$, $\omega_2^{\cdot}$, $\omega_3^{\cdot}$ оценивались по формулам (2.5) с относительными погрешностями в установившемся режиме не более 1%.

6. Рассмотрим влияние ошибок задания модели и параметров датчиков на точность оценки переменных ω_i. Пусть вместо параметров b_i, h_i, p_i, q_{ij} известны их приближенные значения

$$b_i^*=b_i+\Delta b_i,\quad h_i^*=h_i+\Delta h_i,\quad p_i^*=p_i+\Delta p_i,\quad q_{ij}^*=q_{ij}+\Delta q_{ij}$$

заданные с постоянными малыми ошибками Δb_i, Δh_i, Δp_i, Δq_{ij}. Представим уравнения датчиков в виде

$$\beta_i^{\cdot\cdot}+h_i^*\beta_i^{\cdot}+b_i^*\beta_i=p_i\omega_i+\sum_{j=1}^{n}q_{ij}\omega_j^{\cdot}+\varphi_i+\Delta b_i\beta_i+\Delta h_i\beta_i^{\cdot}+\Delta\varphi_i \quad (i=1,\ldots,n) \tag{6.1}$$

Здесь $\Delta\varphi_i$ — совокупность членов выше первой степени относительно $\beta_1, \ldots, \beta_n$, $\omega_1, \ldots, \omega_n$, которые, возможно, не учтены в уравнении (1.1). Полагая для упрощения записи $r_{i0}=\ldots=r_{ik}=1$, введем вместо формул

(2.1) замену переменных

$$x_{i1}=\beta_i,\qquad x_{i2}=\beta_i^{\cdot},\qquad x_{i3}=p_i\omega_i+\sum_{j=1}^{n}q_{ij}\omega_j^{\cdot}+\Delta x_{i3}$$

$$\Delta x_{i3}=\Delta b_i\beta_i+\Delta h_i\beta_i^{\cdot}+\Delta\varphi_i,\qquad x_{i,m+3}=x_{i,m+2}\quad (m=1,\ldots,k;\ i=1,\ldots,n) \tag{6.2}$$

В силу равенств (6.1), (6.2) переменные x_{ij} удовлетворяют системе уравнений

$$x_{i1}^{\cdot}=x_{i2},\qquad x_{i2}^{\cdot}=-b_i^*x_{i1}-h_i^*x_{i2}+x_{i3}+\psi_i,\qquad x_{i,m+2}^{\cdot}=x_{i,m+3}\quad (m=1,\ldots,k)$$

$$x_{i,k+3}^{\cdot}=\sigma_i+\zeta_i,\qquad \zeta_i=\Delta b_i\beta_i^{(k+1)}+\Delta h_i\beta_i^{(k+2)}+\Delta\varphi_i^{(k+1)} \tag{6.3}$$

Величины σ_i определяются формулой (4.1). Уравнения идентификатора состояния для системы (6.3) представим по-прежнему формулами (2.4), в которых теперь под b_i, h_i подразумеваются соответственно значения b_i^*, h_i^*. Для оценки искомых параметров движения используем преобразование (2.5), в котором вместо p_i, q_{ij} должны фигурировать значения p_i^*, q_{ij}^*.

Ошибки Δp_i, Δq_{ij} сказываются только на точности преобразования (2.5). От выбора коэффициентов (3.4) зависит только влияние ошибок Δb_i, Δh_i, $\Delta\varphi_i$, входящих в ζ_i. Пренебрегая быстро затухающими собственными составляющими переменных β_i, будем считать, что эти переменные изменяются в малых пределах с теми же частотами, что и параметры ω_i. Если эти частоты невысоки, то величины ζ_i достаточно малы, а их влияние на точность идентификации параметров ω_i подобно влиянию величин σ_i, рассмотренному в п. 4, и может быть ослаблено, если разрядность вычислительного устройства допускает выбор достаточно больших по абсолютной величине отрицательных корней уравнений (3.3).

Как видно из формул (2.5) и (6.2), дополнительная погрешность идентификации параметра ω_i, вызванная ошибками Δp_i, Δq_{ij}, а также ошибками Δb_i, Δh_i, $\Delta\varphi_i$, входящими в Δx_{i3}, приближенно оценивается выражением

$$\delta\omega_i\approx p_i^{-1}\left(\Delta p_i\omega_i-\Delta x_{i3}+\sum_{j=1}^{n}\Delta q_{ij}\omega_j^{\cdot}\right) \tag{6.4}$$

Согласно этому выражению, влияние ошибок Δb_i, Δp_i на точность идентификации параметров ω_i по формулам (2.4), (2.5) количественно совпадает с влиянием этих ошибок на точность оценки по формуле $\omega_i^\circ=(p_i^*)^{-1}b_i^*\beta_i$, а вызванные этими ошибками относительные погрешности идентификации соответствуют относительной точности задания значений b_i, p_i.

Моделирование примера, рассмотренного в п. 5, показало, что при введении порознь ошибок $\Delta b_i=3{,}8\ \text{с}^{-2}$ (т. е. $\Delta b_i/b_i=10^{-4}$) или $\Delta h_i=1\ \text{с}^{-1}$ (т. е. $\Delta h_i/h_i=4\cdot10^{-3}$) дополнительные погрешности идентификации компонент ω_1, ω_2, ω_3 угловой скорости не превышают соответствующих погрешностей, представленных на фиг. 2, и хорошо согласуются с формулой (6.4). При изменении ошибок Δb_i, Δh_i наблюдалось пропорциональное изменение вызванных ими погрешностей идентификации параметров ω_i.

Можно показать, что если съем координат β_i производится с малыми аддитивными ошибками $\Delta\beta_i(t,\ \beta_i)$, представляющими собой достаточно гладкие функции, то появляются дополнительные ошибки идентификации искомых параметров, приближенно оцениваемые выражениями

$$\delta\omega_i \approx p_i^{-1}(b_i\Delta\beta_i + h_i\Delta\beta_i^{\cdot} + \Delta\beta_i^{\cdot\cdot})$$

Поступила 29 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Плотников П. К.* Измерительные гироскопические системы. Изд-во Саратовск. ун-та, 1976.
2. *Mosner P.* Elimination of cross-coupling errors in rate gyro data. IRE Trans. Instrum., 1960, vol. 9, No. 1.
3. *Одинцов А. А.* Об уменьшении влияния внешних механических помех на двухстепенные гироскопические датчики угловой скорости. Прикл. механика, 1974, т. 10, вып. 1.
4. *Плотников П. К., Алешкин В. В.* О точности определения ускорения объекта по полным и упрощенным алгоритмам решения обратной задачи теории акселерометров. Изв. вузов. Приборостроение, 1976, т. 19, № 10.
5. *Meditch J. S., Hostetter G. H.* Observers for systems with unknown and inaccessible inputs. Internat. J. Control, 1974, vol. 19, No. 3.
6. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М., «Мир», 1971.
7. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1964.
8. *Лебедев Д. В.* К управлению вращательным движением твердого тела при неполной информации о векторе угловой скорости. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
9. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
10. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1954.