ПРОБЛЕМА КОНТАКТА ЖЕСТКИХ ТЕЛ С ТОНКОСТЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Г. Я. ПОПОВ, В. М. ТОЛКАЧЕВ

(Одесса, Москва)

Дается обзор работ, посвященных проблеме отыскания контактных напряжений при гладком (без касательных взаимодействий) контакте абсолютно твердых тел (штампов) с тонкостенными упругими элементами типа балок, пластин, оболочек. При этом считается, что деформации описываются не уравнениями теории упругости, а уравнениями приближенных теорий типа Кирхгофа — Лява с ее различными уточнениями [1].

Проблема контакта тонкостенных элементов со штампами является своеобразной частью теории контактных задач из-за резкого различия в структуре контактного напряжения (по сравнению, например, со случаем, когда штамп заменен на деформируемое тело, подчиненное уравнениям теории упругости).

Одним из проявлений упомянутого своеобразия является возможность постановки задачи о контакте тонкостенных элементов с остролинейными штампами, когда контакт осуществляется по линии. (Постановка такой задачи для упругого тела бессмысленна.) При этом, если штамп на концах участка контакта не имеет угловых точек (длина участка контакта заранее неизвестна), задача разрешима, но контактные напряжения на концах участка контакта не ограничены. В случае же, когда длина участка контакта заранее предопределена и штамп вдавливается в тонкостенный элемент под действием заданной силы, задача становится неразрешимой в рамках обычных представлений. Это показывается в п. 4. Там предлагается два нестандартных подхода к решению названной задачи.

1. Постановка проблемы, методы и модели. Пусть в тонкостенный элемент вдавливается без трения под действием произвольной системы сил штамп. Проблемой является отыскание величины интенсивности $p(B)$ нормального реактивного взаимодействия (контактного напряжения) в любой поверхностной точке B тонкостенного элемента, вступившей в контакт со штампом. Объединение подобных точек называют областью (зоной) контакта ω с границей Γ. Те задачи, где область ω заранее неизвестна и ее требуется находить, будем называть задачами с переменным контактом, задачи, где ω известна — задачами с постоянным контактом. В обоих типах задач подлежит определению перемещение штампа как абсолютно твердого тела после его внедрения в тонкостенный элемент.

Другой вариант проблемы доставляет ситуация, когда штамп неподвижен и контакт происходит за счет загружения самого тонкостенного элемента.

Деформация тонкостенного элемента в общем случае описывается двумерной системой дифференциальных уравнений, заданной в области Ω, занятой срединной поверхностью тонкостенного элемента. Указанную систему всегда можно записать в матричном виде

$$Lz(A)=f(A), \quad A\in\Omega \tag{1.1}$$

где $z(A)$ — матрица-столбец искомых функций, одним из ее элементов является прогиб (нормальное перемещение точки срединной поверхности тонкостенного элемента) $w(A)$, L — матричный дифференциальный оператор, $f(A)$ — матрица-столбец известных функций, связанных с нагрузкой на тонкостенный элемент.

Наиболее распространенный метод решения (метод сопряжения) разбираемых контактных задач заключается в разбиении области Ω на $\Omega-\omega$ и ω, решении краевой задачи для уравнения (1.1) в области $\Omega-\omega$ и сопряжении полученного решения с решением для области ω, в которой

$$w(A)=g(A), \quad A\in\omega \tag{1.2}$$

где $g(A)$ представляет собой сумму, состоящую из выражения, описывающего часть поверхности штампа (профиль штампа), вступившую в контакт, и выражения, в общем случае, связанного с поступательным перемещением штампа и двумя поворотами. Последние три параметра фиксируются условиями равновесия штампа.

Часто используется и другой (полуобратный) метод, который заключается в следующем. Задаются из каких-либо соображений выражением для контакта напряжения, содержащего произвольные постоянные. Например, в [95, 103] берут его в виде системы сосредоточенных сил, неизвестных по величине и приложенных в определенных точках области ω. Заданное таким образом контактное напряжение будет являться нагрузкой для тонкостенного элемента, и можно найти его прогибы, решая краевую задачу для уравнения в Ω. После этого удовлетворяют условию контакта, ис-

---

[1] Для сокращения объема статьи в обзор не включены работы, в которых разбираемая проблема решается с учетом различного вида нелинейности, вязкости, динамики и слоистости. Краткий обзор работ, посвященных контакту тонкостенных элементов со штампами, имеется также в работах [53, 85].

пользуя упомянутые произвольные постоянные. В случае одномерных контактных задач удается получить дифференциальное уравнение непосредственно для контактного напряжения и в качестве упомянутого выражения берут общее решение дифференциального уравнения [16, 17, 29]. Очевидно, для эффективной реализации полуобратного метода необходимо знать структуру искомого контактного напряжения.

В последние годы интенсивно применяется еще один метод — метод функции влияния. Он базируется на предварительном построении функции влияния $G(A, B)$ тонкостенного элемента, определяющей прогиб в точке A тонкостенного элемента от воздействия нормально приложенной единичной силы в точке B. Для этого достаточно решить краевую задачу для уравнения (1.1) во всей области Ω при указанном загружении тонкостенного элемента. Если построена функция влияния $G(A, B)$, то поставленная проблема для тонкостенного элемента формулируется в виде интегрального уравнения для нормального давления $p(B)$

$$\int\limits_{\omega} G(A,B)\,p(B)\,d\omega = g(A) \qquad (A \in \Omega) \tag{1.3}$$

Наиболее трудным в разбираемой проблеме является отыскание области контакта Ω (особенно для двумерных задач), т. е. решение задач с переменным контактом. Область контакта должна находиться из условия

$$p(A) \geqslant 0 \quad (A \in \Omega) \tag{1.4}$$

В тоже время при контакте штампа с тонкостенным элементом почти не существует ситуаций (в отличие от контакта с упругими телами), когда имеет место его постоянство. Чтобы его гарантировать, необходимо ввести допущение о двусторонних связях между штампом и тонкостенным элементом. Последнее означает, что точки, соприкасающиеся до деформации тонкостенного элемента или вошедшие в соприкосновение в процессе деформации, не отрываются друг от друга. Именно в рамках этого допущения и решается поставленная проблема в перечисленных ниже работах.

После того как задача решена в такой постановке и найдено $p(A)$, можно избавиться от указанного допущения, исключив из области контакта участки, где не выполнено условие (1.4), и повторить решение корректирующих задач с постоянным контактом до тех пор, пока всюду не будет выполнено условие (1.4).

Природа упоминавшегося во введении своеобразия поставленной проблемы вытекает из формулировки ее в виде уравнения (1.3). Например, если поведение тонкостенных элементов подчиняется теории Кирхгофа — Лява, то $G(A, B)$ для такого элемента будет довольно гладкой функцией и решение уравнения (1.3) становится математически некорректной задачей [80]. Более того, оно разрешено в обычных классах функций только для весьма узкого диапазона правых частей. Проиллюстрируем это на примере впервые поставленной и решенной С. П. Тимошенко [100] методом сопряжения задачи о контакте штампа с балкой (для нашей цели удобно изменить постановку и метод решения).

Пусть в шарнирно-опертую балку длиной $2l$ и жесткости D под действием силы P симметрично вдавливается штамп с профилем, описываемым четной функцией $h(x)$. В этом случае уравнение (1.3) приобретает вид

$$\frac{1}{D}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} G_1(x,s)\,p(s)\,ds = \delta_0 - g(x) = g_*(x) \qquad (|x| \leqslant \alpha) \tag{1.5}$$

где δ_0 — неизвестное поступательное перемещение штампа, α — искомая полудлина участка контакта, $G_1(x, s)$ — функция влияния балки, являющаяся одновременно и функцией Грина краевой задачи

$$w^{\mathrm{IV}}(x) = f(x), \qquad w(\mp l) = w''(\mp l) = 0 \tag{1.6}$$

Для нее можно записать формулу [71]:

$$G_1(x,s) = \int\limits_{-l}^{l} G_0(x,t)\,G_0(t,s)\,dt \tag{1.7}$$

причем $G_0(x, t)$ является функцией Грина более простой краевой задачи

$$w''(x) = f(x), \qquad w(-l) = w(l) = 0 \tag{1.8}$$

$$G_0(x,\ s) = -(2l)^{-1}(x+l)(s-l), \qquad x<s \tag{1.9}$$

(при $s<x$ следует поменять местами переменные x и s).

К интегральному уравнению (1.5) следует еще добавить условие равновесия штампа

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} p(x)\,dx=P \tag{1.10}$$

Воспользовавшись теоремой 3.1 из [71], убеждаемся, что ядро уравнения (1.5) является функцией Грина и такой краевой задачи

$$w^{\mathrm{IV}}(x)=f(x),\quad |x|\leqslant\alpha;\quad w(\mp\alpha)\mp\beta w'(\mp\alpha)=0 \tag{1.11}$$

$$w''(\mp\alpha)\mp\beta w'''(\mp\alpha)=0,\quad \beta=a-\alpha$$

а это означает из определения функции Грина, что левая часть уравнения (1.5) является решением краевой задачи (1.11) при $f(x)=p(x)$. Следовательно, уравнение (1.5) в классе обычных функций разрешимо только при гладких правых частях, удовлетворяющих условиям

$$g_*(\mp\alpha)\mp g_*'(\mp\alpha)=0,\qquad g_*''(\mp\alpha)\mp g_*'''(\mp\alpha)=0 \tag{1.12}$$

и только в этих (весьма жестких!) условиях получаем решение уравнения (1.5) по формуле

$$p(x)=g_*^{\mathrm{IV}}(x)\equiv D^{-1}g^{\mathrm{IV}}(x) \tag{1.13}$$

Уже из этой формулы, видно, что даже если будут выполнены условия (1.12), но профиль штампа $g(x)$ недостаточно гладкий, то приходим к обобщенным функциям.

Таким образом, чтобы дать полное решение задачи о вдавливании штампа в тонкостенные элементы (в частности, в шарнирно-опертую балку), следует искать решения уравнений (1.5) и (1.3) в классе обобщенных функций. Построим, например, такое решение для уравнения (1.5). Притом его удобно предварительно продифференцировать дважды, что приведет к уравнению

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} G_0(x,s)\,p(s)\,ds=-Dg''(x),\qquad |x|\leqslant\alpha \tag{1.14}$$

Это уравнение можно было получить и непосредственно, если условия контакта балки со штампом выполнять не по перемещениям, а по кривизнам. Такая замена контактного условия по перемещениям на условие по кривизнам часто используется. При этом следует помнить, что решения уравнения, полученные этими двумя путями, эквивалентны с точностью до нетривиальных решений однородного уравнения, полученного из условия контакта по кривизнам.

При вдавливании в балку параболического штампа ($g''(x)=2\gamma$) непосредственной подстановкой с использованием свойств δ-функций [24] легко убедиться, что решение уравнения (1.14), удовлетворяющее условию (1.10), будет иметь вид

$$p(x)={}^1/_2P[\delta(x-\alpha)+\delta(x+\alpha)],\qquad P(a-\alpha)=-4\gamma D^{-1} \tag{1.15}$$

Второе равенство служит для определения полудлины участка контакта.

Если штамп с плоским основанием, длиной $2\alpha(g(x)\equiv0)$ и, следовательно, имеет место задача с постоянным контактом, то придем к необходимости искать нетривиальное решение однородного варианта уравнения (1.14). Здесь оказывается недостаточным одних только функций $\delta(x)$, необходимо подключать и их производные, т. е. решение искать в виде

$$p(x)={}^1/_2P[\delta(x-\alpha)+\delta(x+\alpha)]+{}^1/_2AP[\delta'(x-\alpha)-\delta'(x+\alpha)] \tag{1.16}$$

Здесь учтена четность искомой функции и условие (1.10).

Подставляя (1.16) в (1.14) при $g'''(x)\equiv0$ и учитывая, что, согласно теореме 3.1 из [71], функция Грина $G_0(x,\ s)$ по переменной x удовлетворяет краевым условиям

$$G'(-\alpha,\ s)-\beta G(-\alpha,\ s)=0,\qquad G'(\alpha,\ s)+\beta G(\alpha,\ s)=0 \tag{1.17}$$

а также ее симметричность $G_0(x,s)=G_0(s,x)$, обнаружим, что $A=a-\alpha$.

Если рассмотреть штампы более сложных (но гладких) профилей, то контактные напряжения сохранят структуру типа (1.15) в случае задач с переменным контактом и структуру типа (1.16) в случае постоянного контакта; добавятся только слагаемые, содержащие обычные функции, связанные с правыми частями соответствующих уравнений.

Как показано в [1], такая структура для контактных напряжений сохранится и в том случае, если балка бесконечной длины и опирается на упругое винклеровское основание. Случай опирания такой балки на упругую полуплоскость рассмотрен в [10].

Чтобы приблизить выявленную структуру контактного напряжения к структуре, имеющей место при контакте упругих тел, очевидно, необходимо привлечь более точную теорию, описывающую деформацию тонкостенного элемента.

Первым эту задачу исследовал М. М. Филоненко-Бородич [83], используя (применительно к контактной задаче для балки) теорию, учитывающую влияние сдвиговой деформации на прогибы, предложенную С. П. Тимошенко. Согласно этой теории, изгиб балки описывается уравнением

$$w^{\mathrm{IV}}(x)=D^{-1}q(x)-\varkappa q''(x) \tag{1.18}$$

где $\varkappa$ — коэффициент, связанный с жесткостью балки на сдвиг.

Наличие второй производной от нагрузки приводит к тому, что функция влияния для балки Тимошенко не является уже функцией Грина какой-либо краевой задачи и будет менее гладкой, чем у обычной балки.

В случае шарнирно-опертой балки она имеет вид

$$G(x, s)=\varkappa G_0(x, s)+D^{-1}G_1(x, s) \tag{1.19}$$

и, согласно определению $G_0(x, s)$, терпит разрыв непрерывности ее первая производная (а не третья, как в обычной балке).

Интегральное уравнение, получаемое из условия контакта по перемещениям, будет иметь прежний вид с заменой $D^{-1}G_1(x, s)$ на $G(x, s)$ согласно формуле (1.19). Если же записывать условие контакта по кривизнам (что эквивалентно двукратному дифференцированию указанного уравнения), то вместо (1.14) получим

$$\varkappa p(x)+\frac{1}{D}\int_{-\alpha}^{\alpha} G_0(x, s)p(s)\,ds=-g''(x), \qquad |x|\leqslant\alpha \tag{1.20}$$

т. е. приходим к фредгольмовскому уравнению второго рода, поэтому разбираемая проблема приобретает полную математическую корректность.

Тем не менее в случае решения задачи с постоянным контактом приходим, как и выше, к необходимости отыскивать нетривиальные решения однородного варианта полученного фредгольмовского уравнения, а оно может существовать только при специальных значениях (механически нереальных) упругих параметров, связанных с собственными значениями ядра. Таким образом, проблема становится неразрешимой. С механической точки зрения это означает, что при решении разбираемой задачи нельзя требовать непрерывности прогибов, углов поворота и всех усилий в балке при переходе через граничные точки контакта. Достаточно допустить разрыв непрерывности поперечной силы (при сдвиговой модели она линейно связана с производной от прогиба) и разбираемая задача становится разрешимой.

Действительно, если в балку на участке $(-\alpha, \alpha)$ симметрично вдавливается штамп с плоским основанием, то, допустив разрыв непрерывности поперечной силы в точках $x=\mp\alpha$, тем самым «навязываем» такой же разрыв и для первой производной прогиба и, стало быть, ее вторая производная будет уже выражаться через δ-функции [1]. А это означает, что интегральное уравнение задачи вместо (1.20) приобретает следующий вид:

$$p(x)+\frac{1}{\varkappa D}\int_{-\alpha}^{\alpha} G_0(x, s)p(s)\,ds=A[\delta(x-\alpha)+\delta(x+\alpha)], \qquad |x|\leqslant\alpha$$

и его решение следует искать в виде

$$p(x)=A[\delta(x-\alpha)+\delta(x+\alpha)]+q(x) \tag{1.21}$$

где $q(x)$ — обычная гладкая функция.

Подставив (1.21) в полученное интегральное уравнение для $p(x)$, придем к разрешимому неоднородному фредгольмовскому уравнению для функции $q(x)$. После его решения постоянная A найдется из условия (1.10).

Однако даже в случае задач с переменным контактом, когда описанных осложнений не возникает, сдвиговая модель, как это следует из теории уравнений Фредгольма (1.20) и как это фактически показано в [7, 8, 54, 55, 63, 66, 83], гарантирует только ограниченность контактных напряжений, а не обращение их в нуль на кон-

[1] За приведенные соображения авторы признательны Ю. П. Артюхину.

цах участка. Эта ситуация сохраняется и в случае, когда балка лежит на упругом винклеровском основании.

Этот дефект устраняется, если учитывать эффект поперечного (вдоль нормали к поверхности) обжатия тонкостенных элементов. По-видимому, впервые идея учитывать этот эффект в контактных задачах для тонкостенных элементов появилась в [14]. Затем почти одновременно она использована в [15, 17, 29, 41, 55, 70].

Учет поперечного обжатия, предложенный в перечисленных работах, эквивалентен введению между штампом и конструкцией прослойки в виде упругого винклеровского основания с коэффициентом податливости k, в результате чего нормальные перемещения в зоне контакта получают дополнительное слагаемое $kp(A)$ и вместо уравнения (1.3) получается фредгольмовское уравнение

$$kp(A)+\int\limits_{\omega}G(A,B)p(B)\,d\omega=g(A),\qquad (A\in\Omega)\tag{1.22}$$

Формула для k в [17, 29, 41] получена интегрированием соотношения Гука для поперечной деформации; в [70] – получена асимптотическим разложением (по малым толщинам) нормальных перемещений в упругом слое, сцепленном с абсолютно жестким основанием.

Сведение разбираемой проблемы к уравнению (1.22) делает ее математически корректной, а структуру контактного напряжения – близкой к имеющей место в контактных задачах теории упругости.

Интегральное уравнение (1.22) в случае задачи о вдавливании штампа в шарнирно-опертую балку приобретает, согласно (1.5), вид

$$kp(x)+\frac{1}{D}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}G_1(x,s)p(s)\,ds=\delta-g(x),\qquad |x|\leqslant\alpha\tag{1.23}$$

В случае одновременного учета деформаций поперечного сдвига ядром будет функция (1.19).

Наличие в уравнении (1.23) неизвестных величин δ, α позволяет удовлетворить условию (1.10) равновесия штампа и условию обращения в нуль контактного напряжения на концах участка контакта, что и было реализовано в работе [71] в результате решения[1] интегрального уравнения (1.23). Задача о контакте балки со штампом с учетом поперечного обжатия и сдвиговой жесткости рассматривалась также в [7, 16, 29, 41, 67], где полученные решения сравнивались численно с соответствующими решениями для упругой полосы. Оказалось, что наиболее близкое совпадение наблюдается при учете поперечного обжатия. Кроме того, в работе [29] сопоставлялись изгибные напряжения под штампом в полосе и балке и выявлена их близость, причем они близки и к вычисленным на основе теории Кирхгофа – Лява (т. е. без учета обжатия и сдвига).

Как было показано выше на примере балки, при решении одномерных контактных задач методом функций влияния приходим к интегральным уравнениям второго рода, если учитывается поперечное обжатие или сдвиговая жесткость или и то и другое вместе, или первого (теория Кирхгофа – Лява) рода с ядрами в виде функций Грина (или линейной комбинации из таковых) одномерных краевых задач.

В [8, 38, 41, 39] предложен способ решения таких уравнений, основанный на том, что при действии подходящих дифференциальных операторов они переходят в дифференциальные уравнения относительно искомого решения. Например, двукратное дифференцирование уравнения (1.20) на основании (1.8) переводит его в дифференциальное уравнение второго порядка.

Записав общее решение полученного дифференциального уравнения, подставляют его в исходное интегральное уравнение. Из условия обращения его в тождество и выполнения условий типа (1.10) находятся произвольные постоянные, содержащиеся в упомянутом общем решении.

Более совершенный способ предложен в [5], где удалось разбираемый класс интегральных уравнений преобразовать в одномерные краевые задачи непосредственно для искомого контактного напряжения и на этой основе выяснить причину появления сосредоточенных сил в контактном напряжении.

Для интегральных уравнений второго рода рассматриваемого типа в [71] предложен способ, основанный на построении резольвент этих уравнений как функций Грина одномерных краевых задач. Результаты этой работы позволяют разработать

[1] В формуле (7.3) [71] перед вторым слагаемым должен быть знак минус, а не плюс. Неверно взятый знак привел к лишним первым слагаемым в окончательной формуле (7.4) и следующей за ней формуле.

общий способ решения и уравнений первого рода. Кроме того, разбираемые фредгольмовские уравнения можно преобразовать в уравнения Вольтерра (используя структуру функций Грина), допускающие в некоторых случаях явные решения. Метод, основанный на формулировке проблемы в виде уравнения Вольтерра и его точном решении, использован в [54], где применительно к задаче Филоненко-Бородича решение дано через построение резольвенты, а в [61, 60] оно решено преобразованием Лапласа.

Положительные эффекты, даваемые учетом сдвиговой жесткости и поперечного обжатия, вызвали интерес к различным обобщениям теории Кирхгофа – Лява. Теория Рейсснера [98], учитывающая сдвиговую жесткость при изгибе пластин, нашла применение в [87, 90]. Обобщение теории Рейсснера применительно к контактным задачам, дополнительно учитывающее и поперечное обжатие в пластинках и оболочках, дал Нагди [97]; другой более приспособленный к решению контактных задач вариант модификации теории Рейсснера предложен в [28]. Теория пластин и оболочек, предложенная в [2] и учитывающая сдвиговую жесткость и поперечное обжатие, применена к решению разобранной выше модельной задачи (балка – штамп) в [75]. Теория [2] применена также в [64]. В [57] предложена теория пологих оболочек (трансверсально-изотропных) на основе аппроксимаций напряжений полиномами Лежандра при условии точного выполнения граничных условий на внешних поверхностях оболочки, а в [67] предложен вариант теории трансверсально-изотропных плит, учитывающих поперечное обжатие, и на ее основе рассмотрена модельная задача (штамп – балка). В работе [43] предлагается способ решения контактных задач для цилиндрических оболочек на основе уравнений, полученных применением метода [46] приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным задачам теории оболочек, с использованием метода сопряжения. Такой подход реализован в [44] на примере одномерной задачи о внешнем контакте штампа с круговым кольцом. Даже в этой простой задаче предлагаемый способ, снимая многие дефекты приближенных теорий для тонкостенного элемента, приводит к довольно громоздким построениям.

Другой подход к решению разбираемой проблемы заключается в моделировании прослойки между срединной поверхностью тонкостенного элемента и штампом, введенной для учета поперечного обжатия, не упругим винклеровским основанием, а упругой средой, перемещения которой описываются формулами для упругого полупространства. Такой подход, по-видимому, предложен впервые в [48] и развит в [46, 47]. К сожалению, он тоже существенно осложняет разбираемую проблему и делает ее математически эквивалентной проблеме контакта тонкостенного элемента с упругим телом (а не штампом).

2. Одномерные контактные задачи. Когда напряженное состояние тонкостенного элемента при контакте его со штампом описывается функциями одной переменной, такие задачи будем считать одномерными контактными. Разобранная выше модельная задача (штамп – балка) относится к их числу, и выявленная для нее структура контактного напряжения для различных моделей сохраняется (вместе с методами) для всех одномерных задач.

Наиболее простыми из них (после названной модельной задачи) являются осесимметричные задачи о контакте пластинок со штампами. В работе [91], например, решена задача об определении зоны контакта круглой пластинки Кирхгофа – Лява при контакте ее с жестким основанием под действием осесимметричной нагрузки. Аналогичная задача, когда контур пластинки приподнят над основанием, решена в [92]. С учетом сдвиговой жесткости осесимметричная задача о вдавливании параболического штампа в свободно опертую и защемленную пластинку решена в [74, 87]. Задача, рассмотренная в [92], решена в [90] с учетом сдвиговой жесткости и поперечного обжатия.

Задача о действии штампа на круглую пластинку с учетом сдвиговой жесткости применительно к трансверсально-изотропному материалу решена в [8, 63], а с учетом поперечного обжатия – в [86]. Задачи о вдавливании штампов в неограниченную пластинку, лежащую на упругом основании, рассмотрены в [1, 99] (пластинки Кирхгофа – Лява, основание Винклера), в [62, 64] (учет сдвиговой жесткости и анизотропии, основание Винклера) и в [68], где в качестве основания взят упругий слой и учитывается поперечное обжатие пластинки и возможность отрыва пластинки от упругого слоя.

Следующими по сложности являются одномерные задачи для круговых цилиндрических оболочек, когда оболочка находится в условиях осесимметричной деформации, либо цилиндрического изгиба (круговое кольцо).

Начнем с работ, посвященных осесимметричной деформации. По-видимому, первыми из них являются [1, 34], где решена задача о наружной посадке жесткой втулки с натягом на цилиндрическую оболочку Кирхгофа – Лява. В работе [21] предложен для той же задачи численный метод решения, который не может быть эффективным, так как авторы не учли, что решение уравнений типа (1.3) является некорректной задачей.

Случай, когда посадка внутренняя и оболочка бесконечно длинная, рассмотрен в [89], причем исследован и вариант с двумя полубесконечными втулками. Задача о наружной посадке втулки на цилиндрическую оболочку с учетом ортотропии и сдвиговой жесткости рассмотрена в [65, 55, 56, 59, 58, 79]. При этом в первых трех работах (это отмечено в [33]) допущена погрешность, заключающаяся в нарушении непрерывности углов поворота сечений оболочки при переходе через границы контакта. Задача о контакте кругового кольца (цилиндрический изгиб оболочки Кирхгофа – Лява), нагруженного внутри нормальным давлением, с жестким круговым основанием большего или равного радиуса рассмотрена в [18, 19, 23, 76, 101, 102]. Более трудная задача, когда штампы вдавливаются в круговое кольцо, подкрепляющее цилиндрическую оболочку, ранее исследована в [32]. Аналогичная задача, но когда круговое кольцо подкреплено не оболочкой, а упругой средой, рассмотрена в [11].

Задача о растяжении кругового кольца симметрично приложенными внутри него штампами с учетом поперечного обжатия решена в работе [50], где и дано численное сопоставление с полученным там же решением на основе уравнений теории упругости. Та же задача, но с учетом сдвиговой жесткости кольца решена в [37].

Наружный контакт штампов и кругового кольца с учетом его анизотропии и сдвиговой жесткости рассмотрен в [60, 61], а в [38, 41] дополнительно учтено поперечное обжатие. Та же задача, рассмотренная на основе другого подхода, решена в работе [44], о которой шла речь выше.

Осесимметричная задача о наружном контакте сферической оболочки со сферическим жестким основанием большего радиуса рассмотрена в [49]. Для описания деформации оболочки использована теория пологих оболочек В. З. Власова. Однако структура полученного приближенного решения не может считаться верной из-за отсутствия сосредоточенных усилий в контактном напряжении. Эти усилия учтены в работах [78, 20]. В [20] решена задача о растяжении закрепленной по контуру полусферы под действием изнутри приложенного сферического штампа меньшего радиуса. Правильное решение ранее было получено в [1].

В [36] с несущественными изменениями повторяется исследование [49] с повторением той же ошибки. Задача о вдавливании штампа в пологую сферическую оболочку рассмотрена также в [69] с повторением той же ошибки, что и в [36, 49].

Задача о симметричном сдавливании замкнутой сферической оболочки двумя штампами исследована в [81]. Для получения функции влияния с целью составить интегральное уравнение для контактного напряжения использовано полученное Койтером асимптотическое приближенное решение задачи о действии на оболочку двух уравновешенных сил, приложенных в полюсах. Получено явное решение указанного интегрального уравнения в рамках той же точности, что и решение Койтера.

Осесимметричная задача о наружном контакте штампа без угловых точек с пологой сферической оболочкой на основе теории, учитывающей сдвиговую жесткость, решена в [7]. В той же постановке, но когда основание круглого в плане штампа – сферическая поверхность того же радиуса, что и оболочки, названная задача решена в [6]. При этом рассмотрен как случай действия на штамп центрально приложенной силы (осевая симметрия), так и случай действия момента (косая симметрия).

3. Двумерные контактные задачи. К таким относятся задачи, когда контакт штампа с тонкостенным элементом вызывает в нем напряженное состояние, описываемое функциями двух переменных. Из-за большой сложности этих задач к настоящему моменту они исследовались только применительно к тонкостенным элементам, подчиняющимся теории Кирхгофа – Лява. Основополагающей здесь является работа Л. А. Галина [22], где исследована задача о давлении штампа в виде эллипса на круглую защемленную пластинку. Трудную проблему отыскания области контакта, которая оказалась эллипсом, автору удалось решить сведением ее к обратной краевой задаче для одной аналитической функции. Из полученного решения следует, что контактное напряжение внутри области контакта равно нулю и сосредоточено на границе области контакта.

Задача Л. А. Галина в [51] обобщена на случай вдавливания (симметричного относительно центра пластинки) двух эллипсоидов. Здесь проблема отыскания области контакта сведена к нелинейной краевой задаче для трех аналитических функций. Из решения в первом приближении этой задачи следует, что контуры площадок контакта и здесь оказываются эллиптическими.

В [84] разработан достаточно общий и эффективный способ решения проблемы вдавливания штампов в шарнирно-опертые по контуру (состоящему из прямолинейных отрезков) пластинки, основанный на сведении ее к одному типу краевых задач Римана для двух аналитических функций, решение которых получено в явном виде.

Двумерные контактные задачи для оболочек еще более сложны. Имеется несколько работ, где предложены весьма приближенные подходы: [42, 77] – контакт прямоугольного в плане штампа с цилиндрической оболочкой, [4] – контакт произвольного в плане штампа с оболочкой двоякой кривизны и [13] – радиальный контакт тороидальной оболочки с жестким плоским основанием. Численному методу решения двумерных контактных задач посвящена работа [12].

Следует заметить, что для создания эффективных приближенных и численных методов решения двумерных контактных задач для тонкостенного элемента Кирхгофа – Лява следует принимать во внимание, что они, как уже было отмечено, приводятся к некорректным математическим проблемам, и потому следует использовать информацию о методах решения таких задач [80]. Важно также знать структуру искомого контактного напряжения на границе области контакта. Этот вопрос для двумерных задач почти не исследован. Например, совершенно неясно, какова структура контактного напряжения в угловой точке, если область контакта – прямоугольник.

К числу разбираемых следует отнести задачу, поставленную и решенную в [52]. В оба торца цилиндрической оболочкой, описываемой приближенными уравнениями теории оболочек средней длины, симметрично вдавливается (в продольном направлении) периодическая система плоским штампов без сил трения. Незанятая часть поверхностей торцов свободна от нагружения. С помощью конечного преобразования Фурье по окружной переменной задача сводится к парному рядовому уравнению, которое затем преобразуется в бесконечную систему алгебраических уравнений.

Особый класс двумерных контактных задач (рассмотренных в основном для модели Кирхгофа – Лява) составляют задачи, в которых области контакта вырождаются в линии (вдавливание «остролинейных» штампов). К таким задачам приводятся, например, расчет пластинок, опирающихся на жесткие узкие перегородки, или расчет цилиндрических оболочек, опирающихся на жесткие и узкие в плане ложементы. К наиболее ранним работам, посвященным этому классу задач, следует отнести [25 35], где весьма приближенно исследовано напряженное состояние трубопроводов, опирающихся на отдельные опоры.

В [93, 94] исследуется напряженное состояние бесконечно длинной цилиндрической оболочки, опирающейся на жесткий ложемент того же радиуса. Проводится дискретизация задачи путем выполнения контакта в отдельных точках. Приводится обширный числовой материал, который, в частности, показывает резкую концентрацию контактных усилий в окрестности концов линии контакта. Это подтверждается и экспериментами, проведенными как самим автором названных работ, так и авторами [3, 95, 103].

Та же задача, но для случая, когда радиус ложемента больше радиуса оболочки (переменный контакт), рассмотрена в [88]. Решение здесь основывается на разложениях в ряд Фурье по окружной координате и в интеграл Фурье по продольной координате. Контактное же напряжение аппроксимируется полиномом с добавлением сосредоточенных сил на концах участка контакта. Коэффициенты этого полинома и величины сосредоточенных сил находились из условия контакта в отдельных точках.

Аналогичная задача рассмотрена в [82] для бесконечно длинной оболочки и в [27] для полубесконечной оболочки, свободно опертой на торце. В отличие от [88] в [82, 27] полагается, что оболочка сжимается произвольным числом одинаковых штампов, расположенных по линии одной и той же окружности. Использование функций влияния и выполнение условий контакта по кривизнам привело авторов к сингулярному интегральному уравнению с ядром, имеющим подвижную логарифмическую особенность. Это позволило строго показать, что контактное напряжение на концах участка контакта имеет особенность типа $(a^2-x^2)^{-1/2}$, где $2a$ – длина зоны контакта, x – расстояние от центра до рассматриваемой точки. Упомянутое интегральное уравнение решалось путем сведения его к фредгольмовскому уравнению. Такой способ решения получил дальнейшее развитие в [30].

Схема решения, предложенная в цитируемых работах, перенесена в [50] на случай ортотропных оболочек вращения. Однако в отличие от [27, 82] в [50] сингулярное интегральное уравнение решалось методом ортогональных многочленов [72].

Случай опирания цилиндрической оболочки на два жестких ложемента одинаковых с оболочкой радиусов рассмотрен в [96].

Родственная задача для пластин исследована в [104, 9], где рассмотрен изгиб бесконечной полосовой шарнирно-опертой по обеим граням пластинки (во второй из работ учитывается сдвиговая жесткость и трансверсальная ортотропия), нагруженной равномерно распределенной нагрузкой и опирающейся на периодическую систему поперечных жестких перегородок, примыкающих к одной из граней пластинки.

В цитируемых работах предложены различные приближенные способы, которые нельзя считать эффективными, так как авторы игнорируют вопрос о структуре контактного напряжения. Этому важному вопросу и в ранее названных работах не уделено никакого внимания. Исключение составляют работы [27, 82], где, как уже отмечалось, применительно к тонкостенным элементам Кирхгофа – Лява с достаточной строгостью установлено, что в случае задач с переменным контактом контактное напряжение имеет корневую особенность.

В случае же постоянного контакта вопрос разрешимости и структура решения оказывается (п.4) гораздо сложнее. Для таких задач в [31, 50] по аналогии с одномерными контактными задачами в состав контактного напряжения введены сосредоточенные силы. Ниже (применительно к модельной задаче) займемся выяснением вопроса, насколько это является обоснованным.

4. О контактном напряжении под остролинейными штампами. В качестве модельной задачи примем следующую. Пусть в пластинку Кирхгофа – Лява ($-\infty<x$, $y<\infty$), подпертую в двух точках ($x=0$, $y=-b$), ($x=0$, $y=+b$), вдавливается под действием центрально приложенной силы $2P$ остролинейный плоский штамп на отрезке ($y=0$, $-1\leqslant x\leqslant 1$). Требуется найти контактное напряжение под штампом $p(x)$. Сформулированная задача эквивалентна аналогичной задаче, когда вместо штампа на указанном отрезке имеется тонкостенное жесткое включение и к нему приложена сила $2P$.

Используя в качестве функции влияния известную функцию

$$(8\pi D)^{-1}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\ln[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1/2} \tag{4.1}$$

и осуществляя условие контакта по кривизнам, приходим к интегральному уравнению

$$lp\equiv\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{|x-\xi|}\right)p(\xi)\,d\xi=f(x),\qquad |x|\leqslant 1 \tag{4.2}$$

$$f(x)=P(2\ln r+1+2r^{-2}x^2),\quad r^2=x^2+b^2$$

Решение полученного уравнения должно удовлетворять условию равновесия штампа

$$\int_{-1}^{1}p(x)\,dx=2P \tag{4.3}$$

Единственное решение в классе интегрируемых функций можно записать в виде [86]

$$p(x)=\frac{A}{\pi\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\pi^2\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-s^2}\,f(s)\,ds}{s-x} \tag{4.4}$$

$$A=-\frac{1}{\pi\ln 2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[f(x)-\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}p\,ds\right]dx$$

Интегрированием решения (4.4) убеждаемся, что

$$A=\int_{-1}^{1}p\,dx=2P$$

после чего из второй формулы (4.4) находим

$$A=2P=\frac{2}{\pi(3-2\ln 2)}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.5}$$

Так как сила P задана, а функция $f(x)$, вообще говоря, может быть любой, то условие (4.5) в общем случае выполнено быть не может.

Попробуем найти решение уравнения (4.2) в виде

$$p(x)=q(x)+P_1[\delta(x-1)+\delta(x+1)] \tag{4.6}$$

где $q(x)$ – обычная интегрируемая функция. Подставив (4.6) в (4.2), для нее получим интегральное уравнение

$$lq=f(x)-P_1g(x),\qquad g(x)=3+2\ln\sqrt{1-x^2} \tag{4.7}$$

Однако, решая это уравнение с помощью формулы (4.4), убеждаемся, что $q\equiv p$, т. е. не существует обычного интегрируемого решения уравнения (4.7), и, следовательно, подключение одних только сосредоточенных сил в состав контактного напряжения, как это сделано в [31], не позволяет правильно решить задачу.

Для преодоления возникшего осложнения применим следующий подход [1]. Введем в состав контактного напряжения еще и распределенную по отрезку $[-a, a]$ моментную нагрузку интенсивности $P_1 m(x)$. Появление подобных реактивных усилий можно физически до некоторой степени оправдать, если трактовать задачу не как о вдавливании штампа, а как задачу о тонком включении.

Поскольку функция влияния при действии на пластинку сосредоточенного момента получается в (4.1) дифференцированием, то интегральное уравнение (4.2) с учетом (4.6) примет вид

$$lq+P_1\int_{-1}^{1}\frac{m(\xi)\,d\xi}{x-\xi}=f(x)-P_1 g(x),\qquad |x|\leqslant 1 \tag{4.8}$$

причем к условию равновесия штампа (4.3) добавится еще и моментное условие

$$\int_{0}^{1} m(x)\,dx=0 \tag{4.9}$$

Наличие в уравнении (4.8) двух неизвестных функций приводит к неединственному решению задачи. Одно из таких решений, очевидно, наиболее естественным путем можно получить, расчленив уравнение (4.8) на два следующих разрешимых уравнения:

$$lq=f,\qquad \int_{-1}^{1}\frac{m(\xi)\,d\xi}{x-\xi}=-g(x),\qquad |x|\leqslant 1 \tag{4.10}$$

Величину P_1 найдем, удовлетворив условию (4.3), а условие (4.9) будет удовлетворено за счет отыскания неограниченного решения второго уравнения.

Укажем здесь еще один способ решения поставленной задачи [2], требующий привлечения неинтегрируемых решений и интегралов, понимаемых в обобщенном (регуляризуемом) смысле [24]. Он основан на построении нетривиальных решений уравнения

$$lp_0=\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}-\ln\frac{1}{|x-\xi|}\right)p_0(\xi)\,d\xi=0,\qquad |x|\leqslant 1 \tag{4.11}$$

Одно из таких решений получается непосредственно из соотношения (7) [73]:

$$\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-\xi|}\,\frac{P_1^{-3/2,-3/2}(\xi)}{(1-\xi^2)^{3/2}}\,d\xi=0,\qquad |x|\leqslant 1 \tag{4.12}$$

Здесь и ниже интегралы следует понимать в регуляризованном смысле.

На основании (4.12) нетривиальным решением уравнения (4.11) будет нечетная функция

$$p_0(x)=\frac{P_1^{-3/2,-3/2}(x)}{(1-x^2)^{3/2}}=\frac{-2\sqrt{\pi}\,x}{(1-x^2)^{3/2}} \tag{4.13}$$

Для построения четного решения воспользуемся соотношением

$$\int_{-1}^{1}\ln|x-\xi|\,\frac{(1-\xi)^{\alpha}\,d\xi}{(1+\xi)^{\alpha+k}}=\frac{2^{-k-\alpha}\pi\operatorname{ctg}\pi\alpha}{(1+\alpha)(1-x)^{-\alpha-1}}\,F\begin{pmatrix}\alpha+1, & \alpha+k\\ \alpha+2, & \dfrac{1-x}{2}\end{pmatrix}+ \tag{4.14}$$

$$+\frac{2^{1-k}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1-\alpha-k)}{\Gamma(2-k)}\left[\ln 2+\psi(\alpha+1)-\psi(2-k)\right]$$

вытекающем из построений [73].

[1] Предложен В. М. Толкачевым.
[2] Предложен Г. Я. Поповым.

Оно справедливо в обычном смысле, если $k=1$ и $\operatorname{Re}\alpha>-1$, $\operatorname{Re}(\alpha+k)<1$. Придавая ему регуляризованный смысл [24] и полагая $k=3$, $\alpha=-3/2$, приходим к соотношению

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-\xi|}\frac{d\xi}{(1-\xi^2)^{3/2}}=1,\qquad |x|\leqslant 1 \tag{4.15}$$

Придавая тот же смысл известному интегралу

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda}=\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\Gamma^{-1}\left(\lambda+\frac{3}{2}\right) \tag{4.16}$$

обнаружим, что

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-3/2}\,dx=0 \tag{4.17}$$

Соотношения (4.15), (4.17) вместе с известным

$$\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-\xi|}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=\pi\ln 2,\qquad |x|\leqslant 1 \tag{4.18}$$

и приводят к искомому четному решению уравнения

$$p_0(x)=[(3/2-\ln 2)(1-x^2)^{-3/2}+(1-x^2)^{-1/2}]A \tag{4.19}$$

причем на основании (4.17)

$$\int_{-1}^{1}p_0(x)\,dx=A\pi \tag{4.20}$$

Именно добавление к решению уравнения (4.2) слагаемого (4.19) и позволит благодаря равенству (4.20) удовлетворить за счет выбора постоянной A условию равновесия штампа и получить полное решение поставленной задачи. Если же сила $2P$ действует с эксцентриситетом, то, очевидно, необходимо добавить еще и нечетное решение (4.13) уравнения (4.11).

Обе схемы, изложенные здесь применительно к неограниченной пластинке Кирхгофа – Лява, можно перенести на аналогичные задачи и для других тонкостенных элементов.

Авторы благодарят Ю. П. Артюхина за помощь в работе над публикуемым обзором.

Поступила 11 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Некоторые контактные задачи для балок, пластинок и оболочек. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 4.
2. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974.
3. *Антипов В. А.* Упругое взаимодействие цилиндрической оболочки с жесткой накладкой. Строит. механ. и расчет сооружений, 1975, № 3.
4. *Антуфьев Б. А., Шклярчук Ф. Н.* К контактной задаче для сферической оболочки с жестким включением произвольной формы. Тр. Моск. авиац. ин-та, 1976, вып. 362.
5. *Артюхин Ю. П.* О решении одномерных и осесимметричных контактных задач теории трансверсально-изотропных пластин и оболочек. Тезисы докл. Всес. научн. конф. «Смешанные задачи механики деформированного тела», ч. 2. Изд-во Ростовск. ун-та, 1977.
6. *Артюхин Ю. П., Карасев С. Н.* Определение напряжений в пологой сферической оболочке при действии жесткого тела. В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Изд-во Казанск. ун-та, 1975, вып. 11.
7. *Артюхин Ю. П., Карасев С. Н.* Действие жесткого штампа на пологую сферическую оболочку и пластинку. В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Изд-во Казанск. ун-та, 1972, вып. 9.

8. *Артюхин Ю. П., Карасев С. Н.* Применение уточненной теории оболочек при решении контактных задач. В сб.: Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Изд-во Казанск. ун-та, 1977.
9. *Артюхин Ю. П., Каримов С. М.* Контактная задача для длинной плиты, опирающейся на жесткие поперечные стенки. В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Изд-во Казанск. ун-та, 1976, вып. 12.
10. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Контактная задача о вдавливании штампа в упругую полуплоскость с тонким усиливающим покрытием. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
11. *Атабеков И. У.* О контакте упругого диска, подкрепленного оболочкой с двумя жесткими штампами. В сб.: Вопросы вычислит. и прикл. матем. Ташкент, Изд. Ин-та кибернетики АН УзССР, 1975, вып. 35.
12. *Баничук Н. В.* Численное решение задачи о прогибе упругой пластины, стесненной ограничениями. Инж. ж. МТТ, 1976, № 4.
13. *Белкин А. Е.* Контактная задача для торообразной оболочки. Изв. вузов. Машиностроение, 1977, № 4.
14. *Биргер И. А.* Упругий контакт стержней. В сб.: Расчеты на прочность. М., «Машиностроение», 1969, вып. 14.
15. *Биргер И. А.* Контактные задачи теории стержней, пластинок и оболочек. Тр. IX Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Л., «Судостроение», 1975.
16. *Блох М. В.* К выбору модели в задачах о контакте тонкостенных тел. Прикл. механ., 1977, т. 13, № 5.
17. *Блох М. В.* Одномерный односторонний контакт стержней, пластин и оболочек. Тр. IX Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Л., «Судостроение», 1975.
18. *Божкова Л. В.* Распределение давлений в области контакта цилиндрической трубы с жестким цилиндрическим основанием. Сб. тр. Моск. инж.-строит. ин-та, 1969, № 63.
19. *Божкова Л. В., Рябов В. Г.* О контактном взаимодействии цилиндрического резервуара с жестким основанием. Сб. тр. Моск. инж.-строит. ин-та, 1974, № 118.
20. *Бондаренко В. А.* Контакт тонкостенной сферической оболочки с жестким шаром. Прикл. механ., 1971, т. 7, вып. 12.
21. *Вейц В. Л., Равич-Щербо Р. Ю., Шраго Л. Г.* Давление на поверхности цилиндрической оболочки, нагруженной осесимметрично через жесткие элементы. В сб.: Вопросы механики деформируемых сред. Иркутск. политехн. ин-т, 1973.
22. *Галин Л. А.* О давлении твердого тела на пластинку. ПММ, 1948, т. 12, вып. 3.
23. *Гафинов В. И., Зайцев А. В.* Поведение упругого кольца с вкладышем под действием внешнего давления. Тр. МВТУ, 1975, № 206.
24. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958.
25. *Гильман Л. С.* Расчет тонкостенных трубопроводов, лежащих на отдельных опорах при частичном заполнении. В сб.: Расчет пространственных конструкций, т. 1. М., Машстройиздат, 1951.
26. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М., «Наука», 1967.
27. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактная задача для полубесконечной цилиндрической оболочки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
28. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Модификация уточненной теории пластин для контактных задач. Изв. АН АрмССР. Механика, 1977, т. 30, № 3.
29. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Цилиндрический изгиб пластины жесткими штампами. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
30. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* О решении интегральных уравнений для контактных задач. В сб.: Избранные проблемы прикладной механики (К 60-летию В. Н. Челомея) М., ВИНИТИ, 1974.
31. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.*, К решению контактной задачи для тонкой цилиндрической оболочки. Тр. VIII Всес. конф. по теории оболочек и пластин М., «Наука», 1973.
32. *Гудрамович В. С., Моссаковский В. И.* Контактная задача для упругого кольца, подкрепляющего цилиндрическую оболочку. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961, № 2.
33. *Детинко Ф. М., Фастовский В. М.* О посадке бандажа на цилиндрическую оболочку. Прикл. механ., 1975, т. 11, вып. 2.
34. *Детинко Ф. М., Фастовский В. М.* Посадка короткой втулки на цилиндрическую оболочку. Вестн. машиностроения, 1967, № 7.
35. *Евтихин В. Ф.* К вопросу о расчете стальных трубопроводов большого диаметра, лежащих на отдельных опорах. Строит. механ. и расчет сооружений, 1963, № 1.
36. *Ильина Л. Г.* Расчет сферической оболочки, лежащей на жестком основании. Сб. тр. Моск. инж.-строит. ин-та, 1974, № 118.

37. *Карасев С. Н.* Контактная задача для тонкого кольца. Сб. аспирантск. работ Казанск. ун-та. Точные науки. Матем., механ., 1976.
38. *Карасев С. Н.* Цилиндрическая оболочка, лежащая на жестком ложементе. Сб. аспирантск. работ Казанск. ун-та. Точные науки. Матем., механ., 1976.
39. *Карасев С. Н.* Некоторые контактные задачи теории тонких трансверсально-изотропных пластин и оболочек. Канд. дис., Казанск. ун-т, 1976.
40. *Карасев С. Н., Артюхин Ю. П.* Контактное взаимодействие пластин с жесткими телами. В сб.: Исследование по теории пластин и оболочек. Изд-во Казанск. ун-та, 1975, вып. 11.
41. *Карасев С. Н., Артюхин Ю. П.* Влияние поперечного сдвига и обжатия на распределение контактных напряжений. В сб.: Исследование по теории пластин и оболочек. Изд-во Казанск. ун-та, 1976, вып. 12.
42. *Карпенко Т. М.* До питания про місцеві деформації при контакті циліндричної оболонки с твердим тілом. Доп. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 6.
43. *Карпенко Т. Н.* Контактная задача для цилиндрической оболочки конечной длины. Прикл. механ., 1976, т. 12, № 6.
44. *Карпенко Т. М.* Контактная задача для цилиндрической оболочки при отсутствии сцепления. Прикл. механ., 1977, т. 13, № 11.
45. *Кильчевский Н. А.* Основы аналитической механики оболочек, ч. 1. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
46. *Конвериетов Г. Б.* Взаимодействие штампа и балочной плиты. В сб.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев, «Будівельник», 1975, вып. 25.
47. *Конвериетов Г. Б.* Осесимметричная контактная задача для цилиндрической оболочки. В сб.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев, «Будівельник», 1975, вып. 27.
48. *Косов М. Г.* Некоторые контактные задачи теории упругости применительно к телам повышенной изгибной податливости. В сб.: Волновые передачи. Моск. станкостроит. ин-т, 1970.
49. *Лукаш П. А., Леонтьев Н. Н.* Расчет сферической оболочки, опирающейся на жесткое основание. Инж. сб., 1959, т. 25.
50. *Максименко В. Н., Фильштинский Л. А.* Контакт анизотропной оболочки вращения с жесткими линейными штампами. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 2.
51. *Мирсалимов В. М.* Об одной контактной задаче теории упругости. Прикл. механ., 1975, т. 11, № 9.
52. *Мовсисян Г. А.* Об одной контактной задаче для цилиндрической оболочки. Изв. АН АрмССР. Механика, 1968, т. 21, № 2.
53. *Моссаковский В. И., Гудрамович В. С.* Контактные задачи теории оболочек. В сб.: Контактная прочность пространственных конструкций. Киев, «Наукова думка», 1976.
54. *Мухадзе М. Г.* Об одном решении задачи изгиба тонкого стержня по лекалу. Сообщ. АН ГССР, 1977, т. 85, № 3.
55. *Пелех Б. Л.* Некоторые особенности постановки и решения контактных задач о взаимодействии упругих цилиндрических оболочек с твердыми жесткими телами. В сб.: Избранные проблемы прикладной механики, М., ВИНИТИ, 1974.
56. *Пелех Б. Л., Мамчур И. Л.* Об одной контактной задаче для трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки конечной длины. Прикл. механ., т. 9, вып. 6.
57. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* О приближенных представлениях разрешающих уравнений теории пологих оболочек применительно к решению контактных задач. Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 4.
58. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Некоторые осесимметричные контактные за-задачи для упругих ортотропных цилиндрических оболочек из армированных пластиков. I. Механика полимеров, 1976, № 4.
59. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Некоторые осесимметричные контактные задачи для упругих ортотропных цилиндрических оболочек из армированных пластиков. II. Механика полимеров, 1976, № 5.
60. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Взаимодействие системы жестких гладких штампов с упругими цилиндрическими оболочками из армированных пластиков. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 4.
61. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Постановка и решение контактной задачи для бесконечно длинной цилиндрической оболочки, зажатой между жесткими обоймами. Докл. АН УССР. Сер. А., 1974, № 6.
62. *Пелех Б. Л., Сысак Р. Д.* О контактных задачах для балок и пластинок с низкой сдвиговой жесткостью. Механика полимеров, 1970, № 4.
63. *Пелех Б. Л., Сысак Р. Д.* Об одном классе контактных задач для тонких анизотропных пластинок из армированных пластиков. Механика полимеров, 1972, № 2.
64. *Пелех Б. Л., Сысак Р. Д.* О давлении твердого тела на трансверсально-изотропную пластинку, связанную с упругим основанием. Изв. АрмССР. Механика, 1970, т. 23, № 3.

65. *Пелех Б. Л., Сысак Р. Д.* К вопросу о горячей посадке бандажа на цилиндрическую оболочку. Физ.-хим. механика материалов, 1971, т. 7, № 4.
66. *Пелех Б. Л., Сысак Р. Д.* Об одной контактной задаче для упругой пластинки. Докл. АН УССР. Сер. А., 1972, № 3.
67. *Пелех Б. Л., Швабюк В. И.* Об одном обобщении теории упругих трансверсально-изотропных плит применительно к некоторым контактным задачам. В сб.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев, «Будівельник», 1975, вып. 26.
68. *Пельц. С. П.* Одна задача об изгибе пластин. Изв. Сев.-Кавказск. научн. центра высш. школы. Сер. естеств. наук, 1975, № 4.
69. *Питько В. В.* Решение некоторых задач для сферической оболочки. Строит. механ. и расчет сооружений, 1973, № 6.
70. *Попов Г. Я.* О контактных задачах для оболочек и пластин. Тр. X Всес. конф. по теории оболочек и пластин, т. 1. Тбилиси, «Мецниереба», 1975.
71. *Попов Г. Я.* Об интегральных уравнениях контактных задач для тонкостенных элементов. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.
72. *Попов Г. Я.* О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
73. *Попов Г. Я.* Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби. Укр. матем. ж., 1968, т. 20, № 4.
74. *Розенберг Л. А.* О давлении твердого тела на пластинку. Инж. сб., 1955, т. 21.
75. *Саркисян С. О.* О цилиндрическом изгибе пластинки жесткими штампами. Докл. АН АрмССР, 1977, вып. 64, № 4.
76. *Смирнов Е. А.* Контактная задача для кольца, лежащего в жесткой обойме. Тр. МВТУ, 1977, № 241.
77. *Соболев Ю. В., Алешин Н. Н.* Решение контактного нагружения цилиндрической оболочки жестким штампом. Сб. тр. Моск. инж.-строит. ин-та, 1975, 119.
78. *Соболев Ю. В., Красновский Е. И.* Местное нагружение сферической оболочки радиальным вдавливанием жесткого штампа. Строит. механ. и расчет сооружений, 1976, № 5.
79. *Сухорольский М. А., Матиешин Д. Д.* Эффективные решения одного класса контактных задач для анизотропных цилиндрических оболочек. В сб.: Композиционные материалы и новые конструкции, Киев, «Наукова думка», 1977.
80. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974.
81. *Толкачев В. М.* Контактная задача для сферической оболочки. В сб.: Теория пластин и оболочек, М., «Наука», 1971.
82. *Толкачев В. М.* Действие острых штампов на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
83. *Филоненко-Бородич М. М.* Изгиб тонкого стержня по заданной кривой. Тр. Моск. электромех. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1949, вып. 58.
84. *Черепанов Г. П.* Давление твердого тела на пластины и мембраны. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
85. *Черныщов Г. Н.* О контактных задачах в теории оболочек. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, 1969, М., «Наука», 1970.
86. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.– Л., Гостехиздат, 1949.
87. *Essenburg F.* Shear deformation on beams on elastic foundations. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 2. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. E, 1962, т. 29, № 2.)
88. *Brandes K.* Die Lagerung des Kreiszylinderrohres auf einem starren Linienlager. Beitrag zur practischen Berechnung der Kontaktkräfte. Stahlbau, 1971, No. 10.
89. *Bogy D. B.* The shrink-fit of a cylindrical shell onto a discontinuous rigid mandrel. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1974, vol. 41, No. 4.
90. *Essenburg F.* On a class of nonlinear axisymmetric plate problems. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, No. 4.
91. *Girkmann K.* Formänderung eines kreisförmigen, auf ebener Unterlage aufruhenden Behälterbodens durch Flüssigkeitsdruck. Stahlbau, 1931, Bd 4, H. 18.
92. *Hofmann R.* Über ein nichtlineares Problem der Plattenstatik. ZAMM, 1938, Bd 18, H. 4.
93. *Křupka V.* Problém kontaktni napjatosti valcové skořepiny uzavřeného kruhového průřezu. Strojirenstvi, 1968, vol. 18, No. 5.
94. *Křupka V.* An analisis for lug or saddle-supported cylindrical pressure vessels. Proc. First Internat. Conf. on Pressure Vessel Technology, Delft, North-Holland, 1969.
95. *Kitching R., Hughes J. F.* Stresses near local attachment on cylindrical shell reinforced by welded — on pad. Arch. budowy maszyn, 1977, vol. 24, No. 2.

96. *Mizoguchi Koki, Hatsuda Toshio.* Strength of a horizontal reservoir suppoted partially by two saddles in its cylindrical part. Trans. Japan Soc. Mech. Engrs, 1975, vol. 41, No. 341.
97. *Naghdi P. M.* On the formulation of contact problems of shells and plates. J. Elasticity, 1975, vol. 5, No. 3–4.
98. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates. J. Math. Phys., 1944, vol. 23, No. 4.
99. *Sneddon I. N., Gladwell G. M. L., Coen S.* Bonded contact of an infinite plate and an elastic foundation. Letters Appl. Engng Sci., 1975, vol. 3, No. 1.
100. *Timoshenko S. P.* Applied elasticity. Pittsburgh, Westing Techn. Hight Scholl Press, 1925.
101. *Tooth A. S., Duthie G.* Stresses and deformations in a cylindrical shell lying on a continuous rigid support. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1975, vol. 42, No. 4.
102. *Vinet R., Doré R.* Stresses and deformations in a cylindrical shell lying on a continuous rigid support. Trans. ASME. Ser. E. J. Appll. Mech., 1974, vol. 41, No. 4.
103. *Zwiesele R.* Spannungsuntersuchungen an kreiszylindrischen Behältern auf Sattellagern. Diss., Dokt. Ingr., Techn. Hochsule, Stuttgart, 1967.
104. *Zöphel J.* Plattenstreifen mit äguidistanten Querwänden (Stauchwänden) under Gleichlast. Bautechnik, 1973, Bd 50, H. 6.

УДК 531/534:061.6

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

Семинары

Семинар по механике деформируемого твердого тела под руководством Ю. Н. Работнова, Л. А. Галина, Г. С. Шапиро, В. Д. Клюшникова

10 III 1980. С. И. Мешков, Г. А. Шаталов (Москва) *Эффективные модули упругости композиционных материалов.*

Предлагается метод расчета эффективных модулей упругости композитов, основанный на анализе тензора Грина. В некотором приближении композит можно рассматривать как однородную (статически однородную) среду. В этом приближений тензор Грина выражается через эффективные модули упругости. С другой стороны, можно определить тензор Грина неоднородного материала. Совершая соответствующий переход к статистически однородной среде, можно получить тензор Грина, зависящий от модулей упругости компонент композита и их объемных долей. Из равенства обоих тензоров получаются уравнения для определения эффективных модулей упругости.

Определение и анализ тензора Грина проводится при помощи теории возмущений и диаграммной техники. Этот формализм, широко используемый также и для анализа классических проблем, позволяет качественно выяснить, какие физические процессы принимаются во внимание при определении эффективных модулей упругости в том или другом приближении. Показано, что большинство существующих результатов представляют собой частные случаи предлагаемой методики расчета. Кроме того, используемый подход существенно облегчает математические выкладки и позволяет получить новые результаты. В частности оказывается, что сдвиговые и объемные эффективные модули равным образом зависят от разницы и сдвиговых и объемных модулей композита.

Результаты теории иллюстрируются при помощи численного расчета изотропного композита, когда упругие модули его компонент отличаются на два-три порядка.

17.III 1980. Б. А. Друянов, А. Р. Пирумов (Москва) *Линеаризированная теория пластически сжимаемых тел.*

Предлагается за поверхность текучести принять шестигранную призму Треска, ограниченную октаэдрическими плоскостями σ=const. Материал считается упрочняющимся, за параметр упрочнения берется объемная деформация материала. Предел текучести на сдвиг и среднее напряжение есть известные функции объемной деформации. Принимается ассоциированный закон течения. Рассматривается плоское установившееся квазистатическое течение жесткопластического материала. Исследуется различные режимы пластического течения. Предлагается решение задачи о прессовании.