МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1980

УДК 539.3

ПОЛНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕМБРАННОЙ ОБОЛОЧКИ В КОСОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Л. Н. ПОКРОВСКИЙ

(Москва)

В [1] получены строгие нелинейные уравнения мягкой оболочки в предположении, что криволинейные координаты на недеформированной поверхности являются линиями главных кривизн. Использовался вариационный подход. В публикуемой работе другим способом на основе [2–4] аналогичные уравнения построены в произвольной косоугольной системе координат. Полученные уравнения описывают напряженно-деформированное состояние оболочки при любых значениях относительных деформаций и при любых перемещениях. Они являются полными в том смысле, что из них как частные случаи вытекают уравнения безмоментных, мягких и сетчатых оболочек.

1. Обозначим через $\mathbf{M}(\alpha, \beta)$ радиус-вектор произвольной точки недеформированной поверхности оболочки, α и β — криволинейные координаты на поверхности, χ — угол между координатными линиями, A и B — коэффициенты первой квадратичной формы, L, M и N — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности.

В дальнейшем используются формулы для вторых производных вектора $\mathbf{M}$ по координатам α, β (ниже выписана только одна из этих формул) [2]:

$$\mathbf{M}_{\alpha\alpha}=\Gamma_{11}^1\mathbf{M}_\alpha+\Gamma_{11}^2\mathbf{M}_\beta+L\mathbf{n} \tag{1.1}$$

где Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности, нижними индексами α и β здесь и в дальнейшем обозначены частные производные.

Необходимы будут также формулы Вейнгартена для производных вектора нормали

$$\mathbf{n}_{\alpha,\beta}=a_{1,2}\mathbf{M}_\alpha+b_{2,1}\mathbf{M}_\beta \tag{1.2}$$

где $a_{1,2}$ и $b_{2,1}$ — коэффициенты, выражающиеся через A, B, L, M, N, χ [2].

Выражение для вектора смещения представим в виде

$$\mathbf{u}=u\mathbf{M}_\alpha/A+v\mathbf{M}_\beta/B+w\mathbf{n} \tag{1.3}$$

где u и v — тангенциальные компоненты вектора смещения, w — смещение по нормали к поверхности.

Продифференцируем (1.3) с использованием формул (1.1) и (1.2). Получим

$$\mathbf{u}_\alpha=\varepsilon_1\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}+\gamma_1\frac{\mathbf{M}_\beta}{B}+\theta_1\mathbf{n},\qquad \mathbf{u}_\beta=\gamma_2\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}+\varepsilon_2\frac{\mathbf{M}_\beta}{B}+\theta_2\mathbf{n} \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_1=u_\alpha+u\left(\Gamma_{11}^1-\frac{A_\alpha}{A}\right)+v\frac{A}{B}\Gamma_{12}^1+wa_1A$$

$$\gamma_1=v_\alpha+v\left(\Gamma_{12}^2-\frac{B_\alpha}{B}\right)+u\frac{B}{A}\Gamma_{11}^2+wb_2B$$

$$\theta_1 = w_\alpha + \frac{L}{A} u + \frac{M}{B} v$$

$$\varepsilon_2 = v_\beta + v\left(\Gamma_{22}^2 - \frac{B_\beta}{B}\right) + u\frac{B}{A}\Gamma_{12}^2 + w b_1 B$$

$$\gamma_2 = u_\beta + u\left(\Gamma_{12}^1 - \frac{A_\beta}{A}\right) + v\frac{A}{B}\Gamma_{22}^1 + w a_2 A$$

$$\theta_2 = w_\beta + \frac{M}{A} u + \frac{N}{B} v$$

Векторное уравнение равновесия оболочки в деформированном состоянии можно привести к виду [3, 4]:

$$\left(T_1^* \frac{B}{A}\mathbf{M}_\alpha^* + S\mathbf{M}_\beta^*\right)_\alpha + \left(T_2^* \frac{A}{B}\mathbf{M}_\beta^* + S\mathbf{M}_\alpha^*\right)_\beta = -\mathbf{P}\sqrt{a} \qquad (1.5)$$

$$T_1^* = T_1 \frac{1+e_2}{1+e_1}, \qquad T_2^* = T_2 \frac{1+e_1}{1+e_2}$$

$$\sqrt{a} = AB(1+e_1)(1+e_2)\sin\chi_1$$

где T_1^*, T_2^* — обобщенные усилия, $\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \mathbf{u}$ — радиус-вектор деформированной поверхности, T_1, T_2 — усилия вдоль координатных линий, S — касательное усилие, e_1, e_2 — удлинения линейных элементов, отнесенные к начальным размерам вдоль линий α и β, χ_1 — угол между координатными линиями в деформированном состоянии оболочки, $\mathbf{P}$ — вектор внешней нагрузки.

Выполним дифференцирование в уравнении (1.5). Используя формулы (1.1) — (1.4), получим векторное уравнение. Сведем его к трем скалярным, умножая обе части скалярно последовательно на векторы $\mathbf{M}_\alpha / A$, $\mathbf{M}_\beta / B$ и $\mathbf{n}$. Получим следующие три уравнения:

$$\left[\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{A}\right) + \frac{\gamma_1}{A}\cos\chi\right] R_1 + \left[\frac{\gamma_2}{B} + \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{B}\right)\cos\chi\right] R_2 +$$
$$+ T_1^* B\left[\left(\frac{\varepsilon_1}{A}\right)_\alpha + \left(\frac{\gamma_1}{A}\right)_\alpha \cos\chi - \gamma_1\lambda_1 \sin\chi - \frac{\theta_1 L}{A^2}\right] +$$
$$+ T_2^* A\left[\left(\frac{\gamma_2}{B}\right)_\beta + \left(\frac{\varepsilon_2}{B}\right)_\beta \cos\chi - \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{B}\right)\varkappa_2 B\sin\chi - \frac{\theta_2 M}{AB}\right] +$$
$$+ S\left[(2A + \varepsilon_1)_\beta + \gamma_{2\alpha}' + (\varepsilon_{2\alpha} + \gamma_{1\beta})\cos\chi -\right.$$
$$\left. - (\varepsilon_2\lambda_1 A + \gamma_1\varkappa_2 B)\sin\chi - \theta_2\frac{L}{A} - \theta_1\frac{M}{A}\right] = -P_1\sqrt{a}$$

$$\left[\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{A}\right)\cos\chi + \frac{\gamma_1}{A}\right] R_1 + \left[\frac{\gamma_2}{B}\cos\chi + \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{B}\right)\right] R_2 +$$
$$+ T_1^* B\left[\left(\frac{\varepsilon_1}{A}\right)_\alpha \cos\chi + \left(\frac{\gamma_1}{A}\right)_\alpha + \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{A}\right)A\varkappa_1 \sin\chi - \frac{\theta_1 M}{AB}\right] +$$
$$+ T_2^* A\left[\left(\frac{\gamma_2}{B}\right) \cos\chi + \left(\frac{\varepsilon_2}{B}\right) + \gamma_2\lambda_2 \sin\chi - \frac{\theta_2 N}{B^2}\right] +$$

$$
\begin{gathered}
+S\left[(2B+\varepsilon_2)_\alpha+\gamma_{1\beta}+(\varepsilon_{1\beta}+\gamma_{2\alpha})\cos\chi+\right.\\
\left.+(\varepsilon_1\lambda_2B+\gamma_2\varkappa_1A)\sin\chi-\theta_1\frac{N}{B}-\theta_2\frac{M}{B}\right]=-P_2\sqrt{a}
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\theta_1}{A}R_1+\frac{\theta_2}{B}R_2+T_1{}^*B\left[\left(\frac{\theta_1}{A}\right)_\alpha+\left(1+\frac{\varepsilon_1}{A}\right)\frac{L}{A}+\frac{\gamma_1M}{AB}\right]+\\
+T_2{}^*A\left[\left(\frac{\theta_2}{B}\right)_\beta+\frac{M\gamma_2}{AB}+\left(1+\frac{\varepsilon_2}{B}\right)\frac{N}{B}\right]+\\
+S\left[\theta_{1\beta}+\theta_{2\alpha}+\left(2+\frac{\varepsilon_1}{A}+\frac{\varepsilon_2}{B}\right)M+\frac{\gamma_1N}{B}+\frac{\gamma_2L}{A}\right]=-P_3\sqrt{a}\\
P_1=\mathbf{PM}_\alpha/A,\ P_2=\mathbf{PM}_\beta/B,\ P_3=\mathbf{Pn}\\
R_1=(T_1{}^*B)_\alpha+AS_\beta,\quad R_2=(T_2{}^*A)_\beta+BS_\alpha
\end{gathered}
$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — геодезические кривизны координатных линий, λ_1 и λ_2 — чебышевские кривизны [5].

Уравнения (1.6) справедливы при любых значениях относительных деформаций и при любых перемещениях. В частном случае, когда координаты α, β являются линиями кривизны ($\chi=\pi/2$, $M=0$), эти уравнения полностью совпадают с уравнениями (2.7) – (2.9) из [1], которые были получены другим путем на основе вариационного подхода.

2. Имеют место следующие формулы, связывающие относительные деформации с вектором перемещения [6]:

$$
\begin{gathered}
(1+e_1)^2=1+\frac{1}{A^2}(2\mathbf{M}_\alpha\mathbf{u}_\alpha+\mathbf{u}_\alpha{}^2),\quad (1+e_2)^2=1+\frac{1}{B^2}(2\mathbf{M}_\beta\mathbf{u}_\beta+\mathbf{u}_\beta)^2\\
(1+e_1)(1+e_2)\cos\chi_1=\cos\chi+\frac{1}{AB}(\mathbf{u}_\alpha\mathbf{M}_\beta+\mathbf{u}_\beta\mathbf{M}_\alpha+\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\beta)
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Используя выражения (1.4), получим

$$
\begin{gathered}
(1+e_{1,2})^2=\left(1+\frac{\varepsilon_{1,2}}{A_{1,2}}\right)^2+2E_{1,2}\\
(1+e_1)(1+e_2)\cos\chi_1=\cos\chi+\frac{E_3}{A_1A_2}
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

$$
\begin{gathered}
E_{1,2}=\frac{\gamma_{1,2}}{A_{1,2}}\left(1+\frac{\varepsilon_{1,2}}{A_{1,2}}\right)\cos\chi+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_{1,2}}{A_{1,2}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_{1,2}}{A_{1,2}}\right)^2\\
E_3=\gamma_1A_2+\gamma_2A_1+(\varepsilon_1A_2+\varepsilon_2A_1)\cos\chi+\varepsilon_1\gamma_2+\\
+\varepsilon_2\gamma_1+\theta_1\theta_2+(\gamma_1\gamma_2+\varepsilon_1\varepsilon_2)\cos\chi,\ A_1=A,\ A_2=B
\end{gathered}
$$

При $\chi=\pi/2$ и $M=0$ из формул (2.2) получим соотношения В. В. Новожилова, приведенные в [1].

Для решения конкретных задач необходимо знать зависимости между усилиями и деформациями. В [7] дан анализ различных форм таких зависимостей. В частности, для неогуковского материала в [1] получены формулы вида

$$
T_{1,2}=f_{1,2}(e_1',\ e_2',\ e_{12}'),\quad S=f_3(e_1',\ e_2',\ e_{12}')
\tag{2.3}
$$

где e_1', e_2', $e_{12}'=(\pi/2-\chi_1)$ — относительные деформации, выражающиеся через перемещения в предположении, что криволинейные координаты на недеформированной поверхности оболочки ортогональны.

Чтобы воспользоваться соотношениями (2.3), необходимо получить формулы преобразования деформаций. Это можно сделать по методу [3]. Поскольку неогуковский материал является изотропным, то угол $\lambda=0$ (см. [3]). Получим формулы

$$e_1'=e_1, \quad (1+e_2')\sin e_{12}'\sin\chi=-(1+e_1)\cos\chi+(1+e_2)\cos(\chi-e_{12})$$
$$(1+e_2')\cos e_{12}'\sin\chi=(1+e_2)\sin(\chi-e_{12}), \quad e_{12}=\chi-\chi_1 \tag{2.4}$$

Для случая малых деформаций формулы (2.4) переходят в соответствующие формулы из [2]. Выразив из (2.4) e_1', e_2' и e_{12}' через e_1, e_2 и e_{12} и подставив в (2.3), получим искомые зависимости.

3. Краевые условия, соответствующие уравнениям (1.6), могут быть весьма различны и зависят от конкретной задачи. Здесь сформулируем два типа краевых условий. Первый тип соответствует случаю закрепления оболочки на неподвижном контуре Г. При этом

$$u|_\Gamma=v|_\Gamma=w|_\Gamma=0 \tag{3.1}$$

Второй тип краевых условий определяется тем, что вдоль края оболочки, совпадающие с одной из координатных линий поверхности ($\alpha=$ $=\mathrm{const}$), приложены усилия $T_1°$, $S°$ и $Q_1°$. Эти усилия направлены вдоль единичных векторов $\mathbf{M}_\alpha/A$, $\mathbf{M}_\beta/B$ и $\mathbf{n}$ и сохраняют при деформировании свое направление. Составим условия равновесия внутренних и краевых сил. В частности, проектируя все силы на направление вектора $\mathbf{M}_\alpha/A$, получим

$$T_1\cos\varphi_1+S\cos\varphi_2=T_1°+S°\cos\chi$$

где φ_1 — угол между $\dfrac{\mathbf{M}_\alpha}{A}$ и единичным вектором $(\mathbf{M}_\alpha+\mathbf{u}_\alpha)/A(1+e_1)$, направленным по касательной к линии α в деформированном состоянии оболочки. Находим

$$\cos\varphi_1=\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}\frac{\mathbf{M}_\alpha+\mathbf{u}_\alpha}{A(1+e_1)}, \quad \cos\varphi_2=\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}\frac{\mathbf{M}_\beta+\mathbf{u}_\beta}{B(1+e_2)}$$

Нетрудно выписать и два других условия равновесия. Учитывая формулы (1.4), после преобразований получим уравнения

$$\frac{T_1}{1+e_1}\left(1+\frac{\varepsilon_1+\gamma_1\cos\chi}{A}\right)+\frac{S}{1+e_2}\left(\cos\chi+\frac{\gamma_2+\varepsilon_2\cos\chi}{B}\right)=T_1°+S°\cos\chi$$
$$\frac{T_1}{1+e_1}\left(\cos\chi+\frac{\gamma_1+\varepsilon_1\cos\chi}{A}\right)+\frac{S}{1+e_2}\left(1+\frac{\varepsilon_2+\gamma_2\cos\chi}{B}\right)=S°+T_1°\cos\chi \tag{3.2}$$
$$T_1\theta_1/A(1+e_1)+T_2\theta_2/B(1+e_2)=Q_1°$$

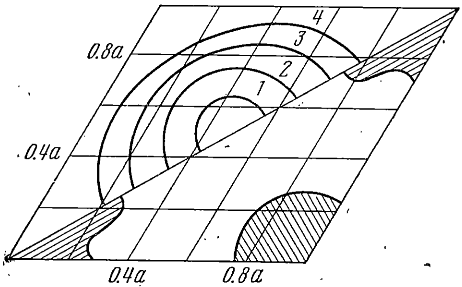
В частном случае, когда $\chi=\pi/2$, $M=0$, из уравнений (3.2) следуют результаты, полученные другим путем в [1].

Уравнения (1.6) и формулы (2.2) являются наиболее общими. Применительно к конкретному виду оболочки в них следует внести соответствующие изменения. Например, для мягкой оболочки эти уравнения описывают двухосное напряженное состояние. Поэтому они должны решаться с одновременным использованием условия существования двухосного напряженного состояния [3, 4]:

$$T_1T_2-S^2\geqslant0, \quad T_1+T_2+2S\cos\chi_1>0 \tag{3.3}$$

Если условия (3.3) не выполняются, то оболочка имеет одноосные зоны и задача ставится иначе [3, 4]. Для сетчатой оболочки (вантовой системы), образованной двумя семействами взаимно перекрещивающихся нитей, направленных вдоль координатных линий, следует положить $S=0$, $T_1^*B=T_1'(1+e_1)^{-1}$, $T_2^*A=T_2'(1+e_2)^{-1}$, где T_1', T_2' — натяжения нитей. Если принять допущения из [8], то из уравнений (1.6) получим уравнения (4.22) из этой работы.

4. В качестве примера рассмотрим задачу расчета первоначально плоской мембраны, имеющей форму ромба с острым углом 60°, под действием внутреннего избыточного давления p. По краям мембрана закреплена неподвижно. Для данного примера $\mathrm{M}=\mathrm{i}\alpha+\mathrm{j}\beta$, $\chi=\pi/3$. Получим систему трех квазилинейных уравнений второго порядка. Ниже приводится одно из них, соответствующее третьему уравнению в (1.6):



$$T_1^* w_{\alpha\alpha}+2S w_{\alpha\beta}+T_2^* w_{\beta\beta}+(T_{1\alpha}^*+S_\beta) w_\alpha+ (T_{2\beta}^*+S_\alpha) w_\beta+ \frac{\sqrt{3}}{2} P(1+u_\alpha+v_\beta+u_\alpha v_\beta-v_\alpha u_\beta)=0 \qquad (4.1)$$

Введем два безразмерных параметра: $f_0=z_0/a$ — прогиб и $\varkappa_0=pa/(Gh_0)$ — параметр внутреннего давления. Здесь G — константа упругости неогуковского материала, h_0 — первоначальная толщина мембраны, a — сторона ромба.

Расчет производился на ЭВМ БЭСМ-6 методом конечных разностей [6]. Число шагов вдоль координат было принято $n=10$ и $n=12$. Результаты расчетов практически совпали. Методика расчета была следующей. Параметр $\varkappa_0$ был выбран таким, что максимальное значение относительных деформаций было порядка 0.5 (это в 50 раз больше того порядка деформаций, который принят в [3, 4]). Такое ограничение позволило представить $T_{1,2}^*$ и S в виде рядов по степеням e_1, e_2 и e_{12} и упростить алгоритм расчета. Кроме того, использовался факт симметрии данной задачи.

В результате конечно-разностной аппроксимации уравнений (4.1) получена система нелинейных алгебраических уравнений, имеющая единственное решение. Указанная система решалась методом Ньютона. Результаты расчетов для случая $\varkappa_0=0.42$ представлены на фигуре. На нижней половине штриховкой показаны краевые угловые зоны, внутри которых не выполняются условия существования двухосного напряженного состояния (3.3), и, следовательно, в этих зонах имеются одноосные области. На верхней половине с помощью линий уровня изображена деформированная поверхность оболочки. Безразмерный прогиб в центре $f_0=0.232$, кривая *1* соответствует $f_0=0.192$, кривая *2* — $f_0=0.129$, кривая *3* — $f_0=0.091$, кривая *4* — $f_0=0.056$.

Поступила 29 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Усюкин В. И.* Об уравнениях теории больших деформаций мягких оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. Изд. 2. М., «Наука», 1976.
3. *Алексеев С. А.* Основы общей теории мягких оболочек. В сб.: Расчет пространственных конструкций. Вып. 11. М., Стройиздат, 1967.
4. *Алексеев С. А.* Задачи статики и динамики мягких оболочек. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1966.
5. *Шуликовский В. И.* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., Физматгиз, 1963.
6. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. М., «Наука», 1976.
7. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., «Мир», 1965.
8. *Кузнецов Э. Н.* Введение в теорию вантовых систем. М., Стройиздат, 1969.