

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕРЕГУЛЯРНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК  
ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

В. В. КАБАНОВ, Г. И. КУРЦЕВИЧ

(Новосибирск)

В рамках теории конструктивно-анизотропных оболочек изложена методика расчета на устойчивость круговой цилиндрической оболочки переменной толщины, подкрепленной стрингерами и шпангоутами переменной вдоль оболочки жесткости. Исходное состояние оболочки моментное, нагрузки осесимметричные.

На основе конечно-разностного метода разработан численный алгоритм, позволяющий исследовать устойчивость оболочки при различных граничных условиях. В примере исследована устойчивость свободно опертой оболочки, подкрепленной шпангоутами переменной высоты, при равномерном внешнем боковом давлении, при совместном действии равномерного давления и осевого сжатия и переменного давления и сжатия. Анализируется эффективность неравномерности подкреплений.

**1. Основные уравнения.** Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку длины  $L$ , радиуса  $R$ , переменной толщины  $h(x) = h_0 f(x)$ , часто подкрепленную стрингерами и шпангоутами, нагруженную неоднородным внешним давлением  $P = -q\varphi_0(x)$  и неоднородными сжимающими погонными усилиями  $N_1 = Nf_0(x)$ . Функции  $\varphi_0(x)$  и  $f_0(x)$  характеризуют изменимость нагрузки вдоль оболочки,  $N$  и  $q$  — амплитуды нагрузок,  $f(x)$  — функция, характеризующая неравномерность толщины оболочки,  $h_0$  — средняя толщина оболочки. Подкрепления оболочки описываются параметрами

$$a_j = a_j^\circ \varphi_j(x), \quad b_j = b_j^\circ \psi_j(x), \quad d_j = d_j^\circ \omega_j(x) \quad (j=1, 2) \quad (1.1)$$

где  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $d_j$  — высота, ширина и шаг подкреплений;  $\varphi_j(x)$ ,  $\psi_j(x)$ ,  $\omega_j(x)$  — функции, характеризующие нерегулярность подкреплений;  $a_j^\circ$ ,  $b_j^\circ$ ,  $d_j^\circ$  — средняя высота, ширина и шаг подкреплений. Нижние индексы соответствуют стрингерам ( $j=1$ ) и шпангоутам ( $j=2$ ).

Для всей оболочки считаем справедливыми гипотезы Кирхгофа — Лява. Считая оболочку конструктивно анизотропной, запишем соотношения, связывающие усилия и моменты с компонентами деформации срединной поверхности

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & K_{11} & K_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & 0 \\ K_{11} & K_{12} & 0 & D_{11}' & D_{12}' & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & D_{21}' & D_{22}' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{33}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_1 = u_x - 1/2 w_x^2, \quad \varepsilon_2 = v_y - k_2 w + 1/2 w_y^2, \quad \varepsilon_3 = v_x + u_y + w_x w_y$$

$$\chi_1 = -w_{xx}, \quad \chi_2 = -w_{yy}, \quad \chi_3 = -2w_{xy}, \quad k_2 = 1/R, \quad B_{ij} = B_0 f \lambda_{ij}, \quad K_{ij} = B_0 h_0 f^2 S_{ij}$$

$$\begin{aligned}
 D_{ij}' &= D_0 f^2 \mu_{ij}, \quad B_{33} = \nu_3 B_0, \quad D_{33}' = \nu_3 D_0 \mu_{33}, \quad \lambda_{ii} = 1 + h_{in}, \quad S_{ii} = k_3 S_{in} \\
 S_{in} &= \frac{F_{inz_i} E_i}{d_i h_0^2 f_2 E_0}, \quad h_{in} = k_3 \frac{F_i}{d_i h_0 f} \frac{E_i}{E_0}, \quad F_i = a_i b_i, \quad z_i = \frac{a_i + h}{2}, \quad \mu_{ii} = 1 + I_{in} \\
 I_{in} &= k_3 \frac{I_i}{d_i l} \frac{E_i}{E_0}, \quad k_3 = \frac{1 - \nu^2}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad \nu_i = \delta_i \nu, \quad \lambda_{ij} = \nu(1 + \delta_j h_{in}) \\
 \lambda_{ij} &= \lambda_{ji}, \quad \nu_3 = \frac{1 - \nu}{2}, \quad I_i = \frac{1}{12} F_i h_0^2 f^2 \left[ 3 + 6 \frac{a_i}{h} + 4 \left( \frac{a_i}{h} \right)^2 \right] \\
 \mu_{12} &= \mu_{21} = \nu(1 + \delta_1 I_{2n}), \quad \mu_{33} = 1 + \frac{1}{2} I_{h_3}, \quad I_h = \frac{1}{2} (I_{h_{1n}} + I_{h_{2n}}) \\
 I_{h_{in}} &= I_{ki} \frac{E_i}{I E_0 d_i} = 12 k_{21} \frac{F_i}{h_0 f d_i} \left( \frac{b_i}{h_0 f} \right), \quad S_{12} = \nu_2 S_{11}, \quad S_{21} = \nu_1 S_{22} \\
 I_{ki} &= k_{21} d_i b_i^3 h, \quad I = \frac{h_0^3 f^3}{12}, \quad B_0 = \frac{E h_0}{1 - \nu^2}, \quad D_0 = \frac{E h_0^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad \delta_i = \frac{b_i}{d_i} \quad (i, j = 1, 2)
 \end{aligned}$$

Здесь  $E_0, E_i$  — модули упругости обшивки и подкреплений;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $I_{ki}$  — момент инерции подкреплений при кручении;  $k_{21}$  — коэффициент при  $I_{ki}$ , зависящий от  $a_i/b_i$  (берется согласно таблицы [1]);  $x, y$  в индексах означают дифференцирование;  $u, v, w$  — перемещения относительно осей  $x, y, z$ .

Разрешая (1.2) относительно деформаций, получаем

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Из (1.2) и (1.3) находим

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$$A_{ii} = \frac{\nu_0}{B_{ii}}, \quad A_{12} = -\nu_{12} A_{22}, \quad A_{21} = -\nu_{21} A_{11}, \quad A_{33} = \frac{1}{B_{33}}, \quad D_{ii} = D_{ii}' \mu_{ii}^*, \quad D_{33} = \nu_3 D_{33}'$$

$$\begin{aligned}
 D_{12} &= D_{21} = D_{12}' - K_{11} L_{12} - K_{12} L_{22}, \quad L_{11} = f h_0 l_{11} (1 - \nu_2 \nu_{21}) \nu_0 \\
 L_{12} &= -f h_0 l_{22} (\nu_{21} - \nu_1) \frac{\nu_{12} \nu_0}{\nu_{21}}, \quad L_{21} = -f h_0 l_{11} (\nu_{12} - \nu_2) \frac{\nu_{21} \nu_0}{\nu_{12}}
 \end{aligned}$$

$$L_{22} = f h_0 l_{22} (1 - \nu_1 \nu_{12}) \nu_0, \quad \mu_{11}^* = \mu_{11} \mu_{12}', \quad \mu_{22}^* = \mu_{22} \mu_{21}', \quad \nu_{12} = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}}, \quad \nu_{21} = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}}$$

$$\mu_{12}' = 1 - 12 l_{11}^2 \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} \left[ 1 + \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{22}} \nu_0 (\nu_{12} - \nu_2)^2 \right],$$

$$\mu_{21}' = 1 - 12 l_{22}^2 \frac{\lambda_{22}}{\mu_{22}} \left[ 1 + \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{11}} \nu_0 ((\nu_{21} - \nu_1)^2) \right]$$

$$l_{ii} = S_{ii} / \lambda_{ii}, \quad l_{12} = l_{21} = l_{11} \nu_2 / \nu_{12}, \quad \nu_0 = (1 - \nu_{12} \nu_{21})^{-1}$$

Исходное напряженно-деформированное состояние оболочки определяется решением уравнения нелинейного краевого эффекта

$$\left[ \left( D_{11} + \frac{L_{21}^2}{A_{22}} \right) w_{xx}^\circ \right]_{xx} + \left( \frac{L_{21} k_2}{A_{22}} - T_1^\circ \right) w_{xx}^\circ + \left( \frac{L_{21} k_2}{A_{22}} w^\circ \right)_{xx} +$$

$$+ \frac{k_2^2}{A_{22}} w^\circ = -p + k_2 T_1^\circ \frac{B_{21}}{B_{11}} + \left[ \left( \frac{B_{21}}{B_{11}} L_{21} \right) T_1^\circ \right]_{xx}, \quad T_1^\circ = -N_1 \quad (1.5)$$

Здесь и ниже величины, отмеченные градусом, относятся к исходному состоянию.

Решение уравнения (1.5) дает прогибы исходного состояния, по которым можно найти окружные усилия

$$T_2^\circ = \frac{B_{21}}{B_{11}} T_1^\circ - \frac{k_2}{A_{22}} w^\circ - \frac{L_{21}}{A_{22}} w_{xx}^\circ \quad (1.6)$$

На краях оболочки в общем случае при консервативных по направлению нагрузках должны выполняться условия

$$(T_1^\circ w_x^\circ + M_{1x}^\circ - Q) w^\circ = 0, \quad (M_1^\circ - M_1^*) w_x^\circ = 0 \quad (1.7)$$

Здесь звездочкой отмечены контурные усилия и моменты. Считая, что усилия  $T_1^\circ$  приложены к контуру поверхности, отстоящей от срединной поверхности обшивки на расстоянии, равном эксцентриситету подкрепления  $hl_{11} = K_{11}/B_{11}$ , контурный момент можно представить в виде  $M_1^* = M_1' + hl_{11} T_{11}^\circ$ , где  $M_1'$  — приложенный к контуру момент.

Устойчивость исходного состояния оболочки исследуем, используя уравнения устойчивости пологих оболочек

$$(D_{11} w_{xx})_{xx} + D_{22} w_{yy} + D_{12} w_{yy} + (D_3 w_{xy})_x - (L_{21} F_{xx})_{xx} - L_3 F_{xxyy} - L_{12} F_{yyyy} - L_{11} F_{yy} - 2(L_{11} - L_{33})_x F_{xy} - k_2 F_{xx} - T_1^\circ w_{xx} - T_2^\circ w_{yy} - w_{xx}^\circ F_{yy} = 0 \quad (1.8)$$

$$(A_{22} F_{xx})_{xx} + (A_3 F_{xy})_x + A_{11} F_{yy} + A_{21} F_{yy} + (L_{21} w_{xx})_{xx} + L_3 w_{xxyy} + L_{12} w_{yyyy} + L_{22} w_{yy} + 2(L_{22} - L_{33})_x w_{xy} + k_2 w_{xx} + w_{xx}^\circ w_{yy} = 0$$

$$F_{yy} = T_1, \quad F_{xx} = T_2, \quad F_{xy} = -T_3, \quad A_3 = A_{33} + 2A_{12}$$

$$L_3 = L_{11} + L_{22} - 2L_{33}, \quad D_3 = 2(2D_{33} + D_{12})$$

Уравнения (1.8) следует дополнить граничными условиями, которые в общем случае имеют вид

$$w_x M_1 = 0, \quad u T_1 = 0, \quad v T_3 = 0 \quad (1.9)$$

$$w(Q_1 + M_{sy} + T_1^\circ w_x + w_x^\circ T_1) = 0$$

Вводя обозначения

$$\eta = \frac{x}{\theta}, \quad W^\circ = \frac{w^\circ}{\theta}, \quad q_0 = \frac{5,52}{q_b \eta_m} q = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)} R^2}{E h_0^2} q, \quad \eta_m = \frac{L}{\theta}, \quad N_1^* = \frac{N_1}{T_b}$$

$$\theta^2 = \frac{h_0 R}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad T_b = \frac{E h_0^2}{R \sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad q_b = \frac{0,855 R}{(1-\nu^2)^{3/4} L} \left( \frac{h_0}{R} \right)^{5/2}$$

и заменяя вторую производную новой переменной, запишем уравнение (1.5) в виде системы двух уравнений

$$W_{\eta\eta}^\circ - \chi^\circ = 0, \quad (d_0 \chi^\circ)_{\eta\eta} + 2 \left( \varepsilon \frac{b_{21}}{a_{22}} + N_1^* \right) \chi^\circ + 2 \left( \varepsilon \frac{b_{21}}{a_{22}} + N_1^* \right)_\eta W_{\eta\eta}^\circ + \left[ 2 \left( \varepsilon \frac{b_{21}}{a_{22}} + N_1^* \right)_{\eta\eta} + \frac{1}{a_{22}} \right] W^\circ = \alpha_0 [q_0 \varphi_0 - 2\varepsilon (b_0 N_1^*)_{\eta\eta} - 2\nu_{12} N_1^*] \quad (1.10)$$

$$d_0 = d_{11} + \varepsilon^2 \frac{b_{21}^2}{a_{22}}, \quad b_{21} = \frac{L_{21}}{h_0}, \quad a_{22} = A_{22}(1 - \nu^2)B_0, \quad b_{11} = \frac{L_{11}}{h_0}$$

$$d_{11} = \frac{D_{11}}{D_0}, \quad \varepsilon = \sqrt{3(1 - \nu^2)}, \quad \alpha_0 = k_2\theta, \quad b_0 = b_{11} + \nu_{12}b_{21}$$

**2. Метод решения.** Разбивая относительную длину оболочки  $\eta_m$  на  $m$  частей с шагом  $c = \eta_m/m$  и заменяя производные через центральные разности, представляем систему (1.10) в конечно-разностной векторно-матричной форме

$$C_i \Phi_{i-1}^\circ + B_i \Phi_i^\circ + A_i \Phi_{i+1}^\circ = E_i \quad (i=0, 1, \dots, m) \quad (2.1)$$

$$\Phi_i^\circ = \begin{pmatrix} W_i^\circ \\ \chi_i^\circ \end{pmatrix}, \quad A_i, C_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm c\gamma_2 & d_0 \pm cd_{0\eta} \end{pmatrix}, \quad E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix},$$

$$B_i = \begin{pmatrix} -2 & -c^2 \\ c^2\gamma_3 & -2d_0 + \gamma_4 c^2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 = \alpha_0 [\Phi_0 q_0 - (2\varepsilon b_0 N_1^*)_{\eta\eta} + 2\nu_{12} N_1^*], \quad \gamma_2 = \varepsilon \left( \frac{b_{21}}{a_{22}} \right)_\eta + N_{1\eta}^*$$

$$\gamma_3 = \varepsilon \left( \frac{b_{21}}{a_{22}} \right)_{\eta\eta} + \frac{1}{a_{22}}, \quad \gamma_4 = d_{0\eta\eta} + 2\varepsilon \frac{b_{21}}{a_{22}} + 2N_{1\eta}^*$$

Условия на контуре также запишем в конечно-разностном виде

$$G_i (\Phi_{i+1}^\circ - \Phi_{i-1}^\circ) + D_i \Phi_i^\circ = F_i \quad (i=0, m) \quad (2.2)$$

Вид матриц  $G_i, D_i, F_i$  зависит от конкретных граничных условий. Например, в случае заземления ( $w^\circ = w_x^\circ = 0$ ):

$$G_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

В случае нагружения контурным моментом ( $w=0, M_1^\circ = M_1^*$ ):

$$G_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_0 [-m_1' - 2(b_0 - l_{11}) N_1^* \varepsilon] \end{pmatrix}$$

Систему уравнений (2.1), (2.2) решаем методом матричной прогонки. Алгоритм решения такой же, как в [2].

Для решения уравнений (1.8) вводим подстановку

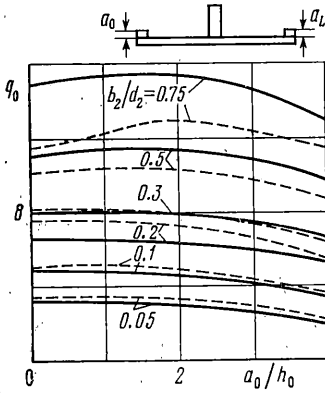
$$\eta = \frac{x}{\theta}, \quad s = \frac{y}{\theta}, \quad W = \frac{w}{\theta \cos(n\alpha_0 s)}, \quad \Phi = \frac{F}{Eh_0 k_2 \theta^3 \cos(n\alpha_0 s)}$$

где  $n$  — число волн по окружности. Заменяем уравнение (1.8) системой четырех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, введя вместо производных от неизвестных новые неизвестные и заменив производные конечно-разностными соотношениями, сводим их к однородной системе векторно-матричных алгебраических уравнений

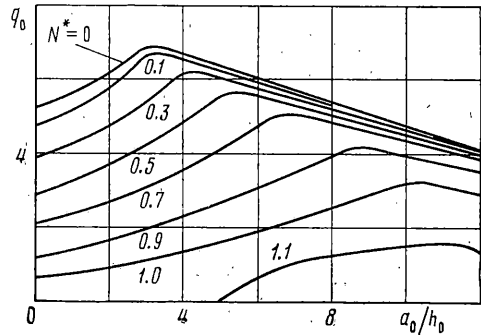
$$C_i \Phi_{i-1} + B_i \Phi_i + A_i \Phi_{i+1} = 0 \quad (i=0, 1, \dots, m) \quad (2.3)$$

Здесь  $C_i, B_i, A_i$  — матрицы четвертого порядка. Граничные условия в общем случае можно записать в виде

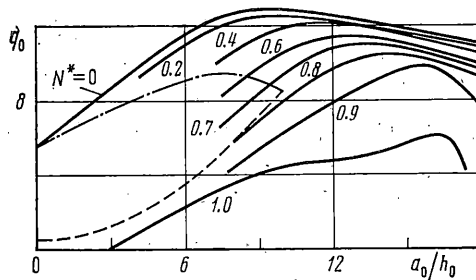
$$G_i (\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}) + D_i \Phi_i = 0 \quad (i=0, m) \quad (2.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Содержание матриц четвертого порядка  $G_i$  и  $D_i$  определяется видом граничных условий. Нетривиальному решению системы (2.3), (2.4) соответствует равенство нулю ее определителя ( $\Delta=0$ ). Уравнение  $\Delta=0$  позволяет определить критическую нагрузку, которая находится [3, 4], как наименьший корень этого уравнения.

**3. Результаты расчетов.** Рассмотрим оболочку постоянной толщины ( $f(x)=1$ ), подкрепленную шпангоутами переменной высоты. Положим в формулах (1.1)  $a_1(x)=b_1(x)=0$ ,  $a_2(x)=a_2^\circ \Phi_2(x)$ ,  $\Phi_2(x)=(a_1'+a_2'x+a_3'x^2)$ ,  $b_2=\text{const}$ ,  $d_2=\text{const}$ . Выберем коэффициенты  $a_1'$ ,  $a_2'$ ,  $a_3'$  таким образом, чтобы вес подкреплений зависел только от средней высоты  $a_2^\circ$  шпангоутов и не зависел от  $\Phi_2$ . Это условие будет выполнено, если

$$\int_0^L a_2(x) dx = a_2^\circ L \quad (3.1)$$

Пусть на краях оболочки высота шпангоутов  $a_2(0)=a_0$  и  $a_2(L)=a_L$ ; тогда из (3.1) получаем

$$a_1' = \frac{a_0}{a_2^\circ}, \quad a_2' = -\frac{2(2a_0+a_L-3a_2^\circ)}{a_2^\circ L}, \quad a_3' = \frac{3(a_0+a_L-2a_2^\circ)}{a_2^\circ L^2}$$

В этом случае для любых значений  $a_0$  и  $a_L$  и при постоянном  $a_2^\circ$  вес шпангоутов остается постоянным. Рассмотрим случай, когда на краях оболочки выполняются условия шарнирного опирания ( $w=M_1=T_1=v=0$ ). На фиг. 1 приведены результаты расчета оболочки, имеющей десять шпангоутов, а параметры  $\eta_m=15$ ,  $R/h_0=100$ ,  $\nu=0.3$ ,  $a_2^\circ=4h_0$ ,  $a_0=a_L$  при равномерном давлении в зависимости от  $a_0/h_0$  для различных значений  $b_2/d_2$ .

Сплошные кривые соответствуют внутренним шпангоутам, пунктирные — наружным.

По оси ординат отложена величина  $q_0 = q^* R^2 \sqrt{12(1-\nu^2)} / (E h_0^2)$ , где  $q^*$  — критическое давление. На графике фиг. 1 видно, что неравномерность распределения высоты шпангоутов по длине оболочки значительно изменяет величину критического давления. Особенно при шпангоутах малой жесткости. Так, для оболочки с  $b_2/d_2 = 0.05$ , имеющей по краям нулевую высоту шпангоутов ( $a_0/h_0 = 0$ ), критическое давление на 45% выше, чем у оболочки того же веса, но с постоянной по длине высотой шпангоутов ( $a_0/h_0 = 4$ ). При малой относительной жесткости шпангоутов для данной оболочки выгодно наружное расположение шпангоутов. При  $b_2/d_2 = 0.3$  наблюдается инверсия влияния знака эксцентриситета шпангоутов.

На фиг. 2 приведены результаты расчетов параметра критического давления  $q_0$  при совместном действии равномерного давления и осевого сжатия. Шпангоуты расположены снаружи. При этом:  $a_0 = a_L$ ,  $a_2 = 10h_0$ ,  $b_2/d_2 = 0.025$ ,  $\eta_m = 30$ ,  $R/h_0 = 1000$ ,  $N^* = NR [3(1-\nu^2)]^{1/2} / (E h_0^2)$ . Число шпангоутов равно десяти.

При  $N^* = 0$  наиболее выгодны оболочки, имеющие по краям высоту шпангоутов  $a_2(0) = a_2(L) = 3h$ . В случае действия осевого сжатия высота шпангоутов на краях оболочки увеличивается по мере роста сжимающего усилия. И при  $N^* \approx 1$  наиболее выгодными становятся оболочки, имеющие постоянную высоту шпангоутов. Число окружных волн при потере устойчивости уменьшается по мере увеличения  $a_0$  с 23 при  $a_0 = 0$  до 11 при  $a_0$ , соответствующему максимальному значению  $q_0$ . При дальнейшем увеличении  $a_0$  число окружных волн остается равным 11.

На фиг. 3 приведена зависимость  $q_0$  от  $a_0/h_0$  при совместном действии линейно-изменяющихся давления и осевого сжатия ( $f_0(x) = \varphi_0(x) = 1 - x/L$ ) для случая наружных шпангоутов. Пунктирной кривой показана зависимость  $q_0$  от  $a_0 = a_L = a_2^\circ$  при  $N^* = 0$ . Штрихпунктирной — зависимость  $q_0$  от  $a_0 = a_L$  при  $a_2^\circ = 10h_0$  и  $N^* = 0$ . Сплошные кривые соответствуют зависимости  $q_0$  от  $a_0$  при  $a_L = 0$  для различных значений  $N^*$ . При этом  $b_2/d_2 = 0.025$ ,  $\eta_m = 30$ ,  $R/h_0 = 1000$ . Все кривые имеют максимумы, которые с увеличением  $N^*$  сдвигаются вправо. Высота шпангоутов на левом крае увеличивается. Число окружных волн, как и в случае равномерного нагружения, вначале уменьшается с увеличением  $a_0$  и для значений  $a_0$ , соответствующих максимуму кривых, равно 11. При дальнейшем увеличении  $a_0$  число волн потери устойчивости начинает увеличиваться.

Несущая способность оболочки при неравномерном нагружении так же, как и при равномерном, может быть существенно повышена соответствующим перераспределением высоты шпангоутов по длине оболочки.

Поступила 22 II 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Теория упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1934.
2. Кабанов В. В., Курцевич Г. И. Исследование устойчивости цилиндрической оболочки при неоднородном по длине осевом сжатии. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2.
3. Кабанов В. В. Исследование устойчивости оболочек методом конечных разностей. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 1.
4. Липовцев Ю. В. К устойчивости вязкоупругих и упругих оболочек при наличии локальных напряжений. Инж. ж. МТТ, 1968, № 5.