

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ИЗГИБА ПЛАСТИН С ТРЕЩИНАМИ
И ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

О. В. ОНИЩУК, Г. Я. ПОПОВ

(Одесса)

Рассматривается пластинка с тонкостенным дефектом, под которым понимается линия разрыва основных величин. Обобщенным методом интегральных преобразований [1] ряд задач изгиба пластин с тонкостенными дефектами сведен к интегральным уравнениям. Задачи, близкие к разбираемым здесь, исследованы в [2-7]. Отличительная особенность публикуемой работы — использование аппарата регуляризации расходящихся интегралов. Привлечение этого аппарата вызвано (ср. [8]) отсутствием интегрируемых решений у интегрального уравнения первого рода с гладким ядром, полученного в задаче об изгибе пластинки с тонким жестким включением. Решение этого уравнения разыскивается в классе функций с неинтегрируемыми особенностями. Выделение особенностей позволило построить быстро сходящееся приближенное решение.

1. Построение разрывных решений. Рассмотрим прямоугольную пластинку ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$), внутри которой на отрезке $y=l$, $c_1 < x < c_2$ имеется тонкостенный дефект общей природы, вызывающий разрыв непрерывности прогибов $w(x, y)$, углов поворота, изгибающих моментов и обобщенных поперечных сил

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= \omega(x), \quad \langle w_y' \rangle = \chi(x), \quad \langle M_y \rangle = \mu(x), \quad \langle V_y \rangle = \psi(x) \\ \langle f \rangle &= f(x, l-0) - f(x, l+0). \end{aligned} \quad (1.1)$$

При этом, если $0 < x < c_1$ или $c_2 < x < a$, то $\omega = \chi = \mu = \psi = 0$.

Выразим прогибы пластинки через введенные скачки (1.1). Для этого, приняв условия шарнирного опирания по краям, параллельным разрезу: $w = M_y = 0$ ($y=0, b$), применим конечное синус-преобразование Фурье [9] по переменной y (через разрез) к дифференциальному уравнению изгиба пластинки $D\Delta^2 w = q(x, y)$. Реализация схемы, предложенной в работе [1], приводит к уравнению

$$\begin{aligned} w_n^{IV} - 2\beta^2 w_n'' + \beta^4 w_n &= \{ [\psi - D(\nu\chi'' - \beta^2\chi)] \sin \beta l + \\ &+ [-\beta\mu + D(\beta(2-\nu)\omega'' - \beta^3\omega)] \cos \beta l + q_n \} D^{-1} = f(x) \end{aligned} \quad (1.2)$$

относительно трансформант

$$[w_n(x), q_n(x)] = \int_0^b [w(x, y), q(x, y)] \sin \beta y dy, \quad \beta = \beta_n = \frac{\pi n}{b}$$

Для упрощения последующих формул примем, что на сторонах пластинки $x=0$ и $x=a$ также имеет место шарнирное опирание. Тогда к уравнению (1.2) следует добавить граничные условия

$$w_n(0) = w_n(a) = w_n''(0) = w_n''(a) = 0 \quad (1.3)$$

Решение краевой задачи (1.2), (1.3) найдем по формуле

$$w_n(x) = \int_0^a G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (1.4)$$

Построение содержащейся здесь функции Грина $G(x, \xi)$ по схеме работы [1] дает

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4}\beta^{-3} [(\beta|x-\xi|+1) \exp(-\beta|x-\xi|) - (\beta(x+\xi)+1) \exp(-\beta(x+\xi))] + \frac{\beta x \operatorname{ch} \beta x \operatorname{sh} \beta \xi + \operatorname{sh} \beta x (\beta \xi \operatorname{ch} \beta \xi - \operatorname{sh} \beta \xi (1+\beta a + \beta a \operatorname{cth} \beta a))}{2\beta^3 \exp \beta a \operatorname{sh} \beta a}$$

Следует иметь в виду, что содержащаяся в (1.2) функция $\psi(x)$, как будет показано ниже, может иметь неинтегрируемые особенности вида $(x-c_1)^{-1/2}(c_2-x)^{-1/2}h(x)$. Такие же особенности может иметь и $\chi''(x)$. Формула (1.4) имеет смысл и дает решение задачи (1.2), (1.3) и в этом случае, если привлечь понятие регуляризованного значения расходящегося интеграла [10]. Это значение можно вычислить следующим образом. Интеграл

$$I(\lambda) = \int_a^b (x-a)^\lambda f(x) dx \quad (1.5)$$

является аналитической функцией комплексного переменного λ при $\operatorname{Re} \lambda > -1$. Тогда регуляризованным значением интеграла (1.5) при $\operatorname{Re} \lambda \leq -1$ будет аналитическое продолжение функции $I(\lambda)$. Привлечение понятия регуляризованных интегралов позволяет, в частности, пользоваться формулой

$$\int_a^b \left[\frac{h(x)}{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta} \right]' g(x) dx = - \int_a^b \frac{h(x) g'(x)}{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta} dx \quad (1.6)$$

и при $0 < \operatorname{Re}(\alpha, \beta) < 1$. При этом значение сходящегося интеграла справа будет являться регуляризованным значением для расходящегося интеграла слева.

Подставляя $f(x)$ из (1.2) в (1.4), выполняя интегрирование по частям с учетом (1.6) и применяя формулу обращения для конечного синус-преобразования Фурье, получаем выражение прогибов пластинки через скачки (1.1) и нагрузку $q(x, y)$:

$$w(x, y) = w_\psi(x, y) + w_\mu(x, y) + w_\chi(x, y) + w_\omega(x, y) + w_q(x, y) \quad (1.7)$$

$$\begin{pmatrix} w_\psi \\ w_\chi \end{pmatrix} = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \beta y \sin \beta l \int_{c_1}^{c_2} \begin{pmatrix} D^{-1} G(x, \xi) \psi(\xi) \\ [(1-\nu)\beta^2 G(x, \xi) - \nu G_1(x, \xi)] \chi(\xi) \end{pmatrix} d\xi$$

$$\begin{pmatrix} w_\mu \\ w_\omega \end{pmatrix} = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \beta y \cos \beta l \int_{c_1}^{c_2} \begin{pmatrix} -D^{-1} \beta G(x, \xi) \mu(\xi) \\ [(1-\nu)\beta^3 G(x, \xi) + (2-\nu)\beta G_1(x, \xi)] \omega(\xi) \end{pmatrix} d\xi$$

$$w_q = \frac{2}{Db} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \beta y \int_0^a G(x, \xi) q_n(\xi) d\xi, \quad G_1 = G_{;\xi\xi}'' - \beta^2 G$$

Суммируя медленно сходящиеся части рядов с помощью формул 1.148,

1.164, 2.733, 2.822, из [11], вместо (1.7) получаем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_\psi \\ w_x \end{pmatrix} &= \int_{c_1}^{c_2} \begin{pmatrix} [\Psi(x-\xi, y-l) + K_\psi] \psi(\xi) \\ [X(x-\xi, y-l) + K_x] \chi(\xi) \end{pmatrix} d\xi, \\ \begin{pmatrix} w_\mu \\ w_\omega \end{pmatrix} &= \int_{c_1}^{c_2} \begin{pmatrix} [M(x-\xi, y-l) + K_\mu] \mu(\xi) \\ [\Omega(x-\xi, y-l) + K_\omega] \omega(\xi) \end{pmatrix} d\xi \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\Psi(x, y) = (8\pi D)^{-1} r^2 \ln r, \quad r^2 = x^2 + y^2; \quad M(x, y) = (8\pi D)^{-1} y (\ln r^2 + 1)$$

$$X(x, y) = (4\pi)^{-1} [(1-\nu)(x(\ln r)_x' + \ln r) - \ln r^2]$$

$$\Omega(x, y) = (4\pi)^{-1} [-2yr^{-2} - (1-\nu)(x(yr^{-2})_r' + yr^{-2})]$$

Здесь Ψ, M, X, Ω — сингулярные части ядер, $[K_\psi, K_\mu, K_x, K_\omega](x, y, \xi)$ — бесконечно дифференцируемые при $c_1 \neq 0, c_2 \neq a$ функции.

Используя полученные формулы (1.7), (1.8), можно свести задачу об изгибе пластинки с тонкостенным дефектом общей природы к системе из четырех интегральных уравнений. В частных случаях дефектов, рассмотренных ниже, эта система вырождается в одно уравнение.

2. Задача об изгибе пластинки с жестким тонким включением. Будем считать, что на отрезке $y=l=1/2b, c_1 < x < c_2$ имеется тонкое жесткое включение, перемещающееся вертикально под действием приложенной к нему нагрузки P . При этом должны выполняться условия

$$w(x, l \pm 0) = \gamma x + \delta, \quad w_y'(x, l \pm 0) = 0 \quad (c_1 < x < c_2) \quad (2.1)$$

Требуется выяснить зависимость между величиной нагрузки P и смещением включения, а также найти напряжения, возникающие в пластинке.

Из симметрии задачи относительно прямой $y=l$ и второго из условий (2.1) следует, что в (1.7) следует положить $\omega(x) = \mu(x) = \chi(x) = 0$. Реализуя первое из условий (2.1), получим интегральное уравнение

$$\frac{2}{Db} \int_{c_1}^{c_2} \left(\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} G(x, \xi) \right) \psi(\xi) d\xi = \gamma x + \delta \quad (c_1 < x < c_2) \quad (2.2)$$

Выделение сингулярной части ядра с учетом (1.8) позволяет записать его в виде

$$\frac{1}{8\pi D} \int_{c_1}^{c_2} [(x-\xi)^2 \ln|x-\xi| + K(x, \xi)] \psi(\xi) d\xi = \gamma x + \delta, \quad (c_1 < x < c_2) \quad (2.3)$$

Заметим, что к уравнениям (2.2), (2.3) сводятся также задачи о давлении на пластинку остролинейного штампа [8] и об изгибе пластинки, имеющей жесткую опору на отрезке $y=l, c_1 < x < c_2$.

Полученное уравнение является интегральным уравнением первого рода с непрерывным ядром, и отыскание его решения представляет собой некорректную задачу [12]. Более того, при данной правой части это уравнение вообще не имеет интегрируемых решений.

Для доказательства преобразуем выражение для $G(x, \xi)$. Полагая $\alpha_n = \pi a^{-1}k$, имеем

$$\int_0^a G(x, \xi) \sin \alpha_n \xi d\xi = \frac{\sin \alpha_n x}{(\alpha_n^2 + \beta_n^2)^2}, \quad G(x, \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x \sin \alpha_n \xi}{(\alpha_n^2 + \beta_n^2)^2} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.2), меняя порядок суммирования по k и n и суммируя по n с помощью продифференцированной по x формулы 1.421 (2) из [11], получаем

$$\frac{a^2}{2\pi^3 D} \int_{c_1}^{c_2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k x \sin \alpha_k \xi}{k^3} \kappa_k \right) \psi(\xi) d\xi = \gamma x + \delta \quad (2.5)$$

$$c_1 < x < c_2, \quad \kappa_k = \operatorname{th} \rho_k - \rho_k \operatorname{sech}^2 \rho_k, \quad \rho_k = {}^{1/2} \pi b a^{-1} k.$$

Пусть $\psi(\xi)$ — интегрируемая на промежутке $(0, a)$ функция, равная нулю при $0 < x < c_1$ и $c_2 < x < a$. Тогда с уравнением (2.5) можно проделать следующие операции: изменить порядок суммирования и интегрирования, продифференцировать обе части дважды по x (при этом правая часть уравнения обратится в нуль) и, наконец, провести интегрирование обеих частей уравнения с весом $\psi(x)$ на промежутке $(0, a)$. В результате приходим к равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2 k^{-1} \kappa_k = 0, \quad \psi_k = \int_0^a \psi(\xi) \sin \alpha_k \xi d\xi \quad (2.6)$$

Полученный ряд сходится (см. [13], § 731), и в силу положительности κ_k получаем $\psi_k = 0$ ($k=1, 2, \dots$), откуда $\psi(\xi) \equiv 0$. Эта функция удовлетворяет (2.5) только при $\gamma = \delta = 0$, что и доказывает отсутствие интегрируемых решений.

3. Переход к неинтегрируемым решениям. Механическая интерпретация одного расходящегося интеграла. Рассуждения, приводящие к формуле (2.6), теряют силу, если искать решение уравнения (2.2) в виде функции с неинтегрируемыми особенностями

$$\psi(\xi) = (\xi - c_1)^{-1/2} (c_2 - \xi)^{-1/2} \psi_0(\xi) \quad (3.1)$$

а соответствующие интегралы понимать в регуляризованном смысле (1.5). При этом ряд в формуле (2.6) получается расходящимся. Такой путь решения уравнения (2.2), по-видимому, впервые был сформулирован в [8]. Полученные ниже результаты показывают его высокую эффективность¹.

Заметим, что получение поперечных сил, имеющих неинтегрируемые особенности, следует рассматривать не как физический парадокс, а как математическое следствие принятых гипотез: гипотезы прямых нормалей и гипотезы об отсутствии у включения толщины. Такая же особенность поперечных сил вблизи концов трещины в пластинке отмечалась в [14]. Использование неинтегрируемых функций позволяет эффективно решать задачу в такой упрощенной постановке без перехода к более сложным моделям. Как и в любой задаче о концентрации напряжений, полученное решение будет описывать напряженное состояние пластинки на достаточном удалении от концов включения.

Очень важным является тот факт, что неинтегрируемая составляющая решения в формуле (3.1) имеет равнодействующую, равную нулю, что является следствием равенства

$$\int_{-1}^1 (1 - \tau^2)^{-1/2} d\tau = 0$$

где интеграл понимается в регуляризованном смысле (1.5).

¹ См. также *Онищук О. В., Попов Г. Я.* О некоторых бигармонических проблемах с неинтегрируемыми решениями. Тезисы докл. II Респ. симпози. по дифференциальным и интегральным уравнениям. Изд-во Одесск. ун-та, 1978.

Однако равенство равнодействующей нулю можно доказать, не проводя регуляризации интегралов, а пользуясь лишь обычными механическими соображениями.

Для доказательства рассмотрим распределение поперечных сил в пластинке по закону

$$Q_n(x, y) = \operatorname{Re}[o^{i\alpha} i(1-z^2)^{-3/2}] \quad (z=x+iy), \quad (3.2)$$

где α — угол между нормалью n к сечению, в котором действует сила Q_n , и осью x . При этом Q_n будет производной по направлению нормали n от функции, гармонической вне отрезка $y=0$, $-1 < x < 1$, а на самом отрезке будут выполняться условия

$$Q_n(x, \pm 0) = \mp Q_y(x, \pm 0) = (1-x^2)^{-3/2}$$

Заметим, что при $y=+0$ и $y=-0$ поперечные силы направлены в одну и ту же сторону. Равнодействующую P приложенных к отрезку сил вычислим по формуле

$$P = \int_L Q_n(x, y) dl$$

где L — любой замкнутый контур, охватывающий отрезок. По теореме о нормальной производной гармонической функции [15] величина интеграла не зависит от выбора контура. Механически это объясняется тем, что на пластинку не действует распределенная нагрузка. Принимая в качестве L окружность $|z|=R$, при больших R получаем оценку $|P| < CR^{-2}$ (C — константа, не зависящая от R). Поскольку P не зависит от R , то $P=0$, что и требовалось доказать. Обращение P в нуль объясняется тем, что на окружностях достаточно малого радиуса ε с центрами в точках $x=\pm 1$, $y=0$ и на отрезках $y=\pm 0$, $|x| \leq 1-\varepsilon$ поперечные силы Q_n направлены в противоположные стороны.

4. Реализация метода ортогональных многочленов в случае неинтегрируемого веса. Выделение особенностей в формуле (3.1) позволяет записать решение в виде

$$\psi(\xi(\tau)) = (1-\tau^2)^{-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n P_n(\tau), \quad \xi(\tau) = 1/2(c_1(1-\tau) + c_2(1+\tau)) \quad (4.1)$$

где $P_n(\tau)$ — ортогональные с весом $(1-\tau^2)^{-3/2}$ на промежутке $(-1, 1)$ многочлены

$$P_n(\tau) = P_n^{-3/2, -3/2}(\tau) = \frac{(-1)^n (1-\tau^2)^{3/2}}{2^n n!} \frac{d^n}{d\tau^n} [(1-\tau^2)^{n-3/2}] \quad (n \neq 0, n \neq 2) \quad (4.2)$$

$$P_{2h}(\tau) = 1 + b_{2h}\tau^2, \quad b_{2h} = (-3 + (-1)^h \sqrt{29 - 24 \ln 2}) (6 \ln 2 - 5)^{-1} \quad (h=0, 1)$$

для которых имеет место спектральное соотношение

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln|t-\tau|}{2\pi(t-\tau)^{-2}} \frac{P_n(\tau) d\tau}{(1-\tau^2)^{3/2}} = \sigma_n P_n(t) \quad (|t| < 1), \quad \sigma_1 = \frac{3}{2} - \ln 2 \quad (4.3)$$

$$\sigma_{2h} = 1/8(4 \ln 2 - 7 + (-1)^h \sqrt{29 - 24 \ln 2}) \quad (h=0, 1), \quad \sigma_n = [n(n-1)(n-2)]^{-1} \quad (n \geq 3)$$

При $n \geq 3$ формула (4.3) доказывается следующим образом:

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln|t-\tau|}{2\pi(t-\tau)^{-2}} \frac{P_n^{-3/2, -3/2}(\tau) d\tau}{(1-\tau^2)^{3/2}} = \int_{-1}^1 \frac{(2 \ln|t-\tau| + 3) P_{n-2}^{1/2, 1/2}(\tau) d\tau}{8\pi n(n-1) (1-\tau^2)^{-1/2}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi n(n-1)(n-2)} \left(\frac{1}{2} \right)_{n-1} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t-\tau|} \frac{T_n(\tau) - T_{n-2}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau =$$

$$= \frac{1}{4n(n-1)(n-2)} \left(\frac{2n-4}{2n-1} P_n^{-1/2, -1/2}(t) - \frac{2n-3}{2n-2} P_{n-2}^{-1/2, -1/2}(t) \right) = \frac{P_n^{-1/2, -1/2}(t)}{n(n-1)(n-2)}$$

Первое равенство получается интегрированием по частям с учетом (1.6), (4.2), далее используются формулы 10.11(5), (6), (35), 10.8(35) из [16] и спектральное соотношение для $T_n(\tau)$ из [17].

Доказательство при $n < 3$ проводится аналогично. Специальный вид $P_0(\tau)$ и $P_2(\tau)$ вызван неполнотой системы многочленов Якоби $P_n^{-1/2, -1/2}(\tau)$, поскольку $P_0^{-1/2, -1/2}(\tau) \equiv 1$, $P_2^{-1/2, -1/2}(\tau) \equiv -1/3$, а функция $f(\tau) = \tau^2$ ортогональна ко всем многочленам с номерами $n \neq 0$ и $n \neq 2$. Коэффициенты b_0 и b_2 выбраны так, чтобы выполнялось соотношение (4.3). При этом $P_0(\tau)$ и $P_2(\tau)$ получаются ортогональными друг к другу (это является следствием самосопряженности интегрального оператора в (4.3)).

Спектральное соотношение (4.3) позволяет получить явные выражения для ψ_n в (4.1) при произвольной правой части уравнения (2.3) в случае $K(x, \xi) \equiv 0$. Это соотношение можно также использовать для приближенного нахождения ψ_n методом ортогональных многочленов [18] в случае, если $K(x, \xi) \neq 0$, но легко вычисляются интегралы

$$c_{mn} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(x(t), \xi(\tau)) (1-t^2)^{-1/2} P_m(t) (1-\tau^2)^{-1/2} P_n(\tau) dt d\tau$$

Для рассмотренной в п. 2 задачи более удобным оказывается путь, основанный на записи уравнения (2.2) в виде (2.5).

5. Численная реализация решения задачи о жестком включении. Будем считать, что включение расположено симметрично относительно прямой $x = 1/2 a$, а его смещение постоянно, т. е. $c_1 = 1/2(a-c)$, $c_2 = 1/2(a+c)$, $\gamma = 0$. Вводя обозначения $\tau = (2\xi - a)c^{-1}$, $t = (2x - a)c^{-1}$, $\varphi(\tau) = 1/2 \pi \varepsilon \psi(\xi)$, $\varepsilon = ca^{-1}$ и учитывая четность функции $\varphi(\tau)$, приходим к уравнению

$$\frac{a^2}{2\pi^4 D} \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos \gamma_k t \cos \gamma_k \tau}{k^3} \kappa_k \right) \varphi(\tau) d\tau = \delta \quad \left(|t| < 1, \gamma_k = \frac{1}{2} \pi \varepsilon k \right) \quad (5.1)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \pi_n(\tau), \quad \pi_0(\tau) = (1-\tau^2)^{-1/2} \quad (5.2)$$

$$\pi_n(\tau) = 2\sqrt{\pi} (2n)! [\Gamma(2n - 5/2)]^{-1} (1-\tau^2)^{-1/2} P_{2n}^{-1/2, -1/2}(\tau) \quad (n \geq 1)$$

Подставляя (5.2) в (5.1), умножая (5.1) на $\pi_m(t)$ ($m=0, 1, 2, \dots$) и интегрируя по t от -1 до $+1$, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно φ_n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}(\varepsilon) \varphi_n = b_m \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (5.3)$$

$$a_{n0} = a_{0n} = \frac{1}{2} (-1)^n \pi^3 \varepsilon \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} k^{-2} \kappa_k J_0(\gamma_k) J_{2n-1}(\gamma_k) \quad (n \geq 1),$$

$$a_{mn} = \frac{1}{4} (-1)^{m+n} \pi^4 \varepsilon^2 \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} k^{-4} \kappa_k J_{2m-1}(\gamma_k) J_{2n-1}(\gamma_k) \quad (m \geq 1, n \geq 1).$$

$$a_{00} = \pi^2 \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} k^{-3} \kappa_k [J_0(\gamma_k)]^2, \quad b_0 = 2\pi^5 D a^{-2} \delta, \quad b_m = 0 \quad (m \geq 1)$$

При этом используются формулы

$$\int_{-1}^1 \cos b\tau \pi_0(\tau) d\tau = \pi J_0(b), \quad \int_{-1}^1 \cos b\tau \pi_n(\tau) d\tau = (-1)^n \pi b J_{2n-1}(b) \quad (n \geq 1).$$

Первая следует из формулы 7.355(2) из [11], вторая — из формулы 7.393(2) [11] при $\nu = -3/2$ (регуляризация интеграла проводится по формуле (1.5)).

Докажем, что система (5.3) является квазирегулярной [19] для любого $\varepsilon \in [0, 1)$, т. е. когда длина включения строго меньше длины пластинки. Используя тождество [20]

$$\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} k^{-4} J_{2m-1}(\gamma_k) J_{2n-1}(\gamma_k) = \frac{\delta_{mn}}{4m-2} + (-1)^{m+n} \int_0^{\infty} \frac{I_{2m-1}(\varepsilon s) I_{2n-1}(\varepsilon s)}{s \exp s \operatorname{ch} s} ds.$$

уравнения (5.3) при $m \geq 1$ перепишем в виде

$$\varphi_m + 8(2m-1)\pi^{-4}\varepsilon^{-2}a_{m0}(\varepsilon)\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}(\varepsilon)\varphi_n = 0$$

где имеют место следующие оценки (M не зависит от ε, m, n):

$$|8(2m-1)\pi^{-4}\varepsilon^{-2}a_{m0}(\varepsilon)| \leq m\varepsilon^{2(m-1)}M, \quad |c_{mn}(\varepsilon)| \leq m\varepsilon^{2(m+n-1)}M$$

$$\sigma_m = |8(2m-1)\pi^{-4}\varepsilon^{-2}a_{m0}(\varepsilon)| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_{mn}(\varepsilon)| \leq m\varepsilon^{2(m-1)}M(1-\varepsilon^2)^{-1}$$

При достаточно больших m и $\varepsilon \in [0, 1)$ получаем $\sigma_m < 1$. Следовательно, система является квазирегулярной и ее приближенное решение может быть получено методом редукции [19].

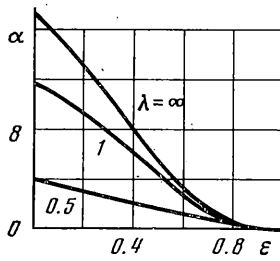
Величину приложенной к включению нагрузки P найдем по формуле

$$P = \int_{c_1}^{c_2} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \pi_n(\tau) d\tau = \varphi_0$$

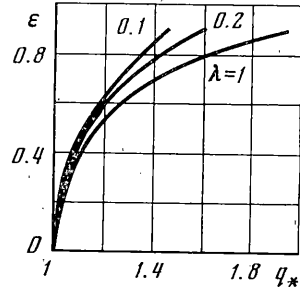
Учитывая поведение $a_{mn}(\varepsilon)$ при малых ε и устремляя ε к нулю, получаем величину, совпадающую с прогибом в центре шарнирно-опертой прямоугольной пластинки от приближенной в центре пластинки сосредоточенной силы P [21]:

$$\delta = 1/2 \pi^{-3} P a^2 D^{-1} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} k^{-3} \kappa_k$$

При $\varepsilon > 0$ расчеты проводились на ЭЦВМ. Смещение включения представлялось в виде $\delta = 10^{-3} \alpha P a^2 D^{-1}$, где α — коэффициент, зависящий от



Фиг. 1



Фиг. 2

относительной длины включения $\epsilon = ca^{-1}$ и входящего в (2.5) отношения длин сторон пластинки $\lambda = ba^{-1}$. Вычисленные значения α показаны на графиках (фиг. 1). Выделение степенных особенностей обеспечило быструю сходимость ряда (5.2). Достаточная точность получалась при сохранении в нем трех-четырех слагаемых.

6. Задача о развитии линейного пластического шарнира. Имеется в виду следующая задача. Пусть на пластинку действует нагрузка $q_1(x, y) = q \sin \pi a^{-1} x \sin \pi b^{-1} y$ ($q = \text{const}$). При достижении q величины q_r напряжение σ_y в центре пластинки станет равным пределу текучести σ_r и при этом $M_y = M_r$. Если полагать $a > b$ и пренебречь упрочнением материала, то дальнейшее увеличение q может привести к возникновению линейного пластического шарнира на отрезке $y = l = 1/2 b$, $c_1 < x < c_2$, $c_1 = 1/2(a - c)$, $c_2 = 1/2(a + c)$, на котором выполняются условия

$$M_y(x, l \pm 0) = M_r, V_y(x, l \pm 0) = 0 \tag{6.1}$$

Требуется выяснить зависимость длины шарнира c от величины $q > q_r$ и перераспределение напряжений в пластинке, вызванное появлением шарнира.

Из симметричности загрузения и второго из условий (6.1) следует, что в формуле (1.7) нужно взять $\psi(\xi) = \mu(\xi) = \omega(\xi) = 0$. Функция $w_q(x, y)$ является решением задачи при отсутствии шарнира и, согласно [21], имеет вид

$$w_q(x, y) = q \sin \pi a^{-1} x \sin \pi b^{-1} y (\pi^{-1} ab)^4 (a^2 + b^2)^{-2} D^{-1}$$

Реализация первого из условий (6.1) приводит к интегральному уравнению относительно неизвестного скачка $\chi(\xi)$:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \int_{c_1}^{c_2} \frac{\ln|x-\xi| \chi(\xi) d\xi}{4\pi D^{-1} (1-\nu)^{-1} (3+\nu)^{-1}} + \int_{c_1}^{c_2} K(x, \xi) \chi(\xi) d\xi = f(x) \quad (c_1 < x < c_2) \tag{6.2}$$

$$f(x) = M_r (1 - q_* \sin \pi a^{-1} x), \quad q_* = q q_r^{-1} = q M_r^{-1} (\nu a^{-2} + b^{-2}) (a^{-2} + b^{-2})^{-2} \pi^{-2}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона. В случае $\nu = 0$ уравнение (6.2) было получено ранее в [1]. К уравнению (6.2) сводится также задача об изгибе пластинки с симметрично-загруженной трещиной. Выполняя те же действия, что и при преобразовании (2.2), (2.3) в (2.5), (5.1) и вводя новую неизвестную функцию $\varphi(\tau) = 2D\chi(\xi) (cM_r)^{-1}$, получаем уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos \gamma_k t \cos \gamma_k \tau}{k} \right) \varphi(\tau) d\tau = \pi (1 - q_* \cos \gamma_1 t) \quad (|t| < 1) \tag{6.3}$$

$$\kappa_k = 1/2(1-\nu) [(3+\nu) \text{th } \rho_k + (1-\nu) \rho_k \text{sech}^2 \rho_k], \quad \rho_k = 1/2 \pi b a^{-1} k$$

Зависимость между нагрузкой q_* и длиной шарнира ε определим из условия непрерывности изгибающего момента M_y на всей линии $y=l$, $0 < x < a$. Решение уравнения (6.3), основываясь на сингулярной части ядра в (6.2), будем искать в виде разложения по многочленам Чебышева второго рода $U_p(\tau)$:

$$\varphi(\tau) = \varphi^{(1)}(\tau) - q_* \varphi^{(2)}(\tau) = \sqrt{1-\tau^2} \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n^{(1)} - q_* \varphi_n^{(2)}) U_{2n}(\tau)$$

Учитывая соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t-\tau|} \sqrt{1-\tau^2} U_n(\tau) d\tau = \\ & = \frac{|t| U_n(t)}{\sqrt{t^2-1}} + \operatorname{sgnt} \sqrt{t^2-1} U_n'(t) - (n+1) U_n(t) \quad (|t| > 1) \end{aligned}$$

вытекающее из формул 10.8 (19), (20) из [16], получаем следующее представление для левой части уравнения (6.3) при $|t| > 1$:

$$1/2 (t^2-1)^{-1/2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \varphi_n^{(1)} - q_* \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \varphi_n^{(2)} \right] + m(t)$$

где $m(t)$ — непрерывная при всех t функция. Следовательно, изгибающий момент M_y при $y=l$, $x \rightarrow c_2+0$ либо $x \rightarrow c_1-0$ обращается, вообще говоря, в бесконечность и только при

$$q_* = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \varphi_n^{(1)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \varphi_n^{(2)} \right]^{-1} \quad (6.4)$$

будет непрерывным при любом x .

Сведение уравнения (6.3) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно $\varphi_n^{(k)}$, доказательство ее квазирегулярности при $\varepsilon \in [0,1)$ и решение методом редукции проводилось точно так же, как для уравнения (5.1).

При численной реализации задавалось $\varepsilon \in [0,1)$, а q_* вычислялось по формуле (6.4). По полученным числовым результатам построены графики зависимости между q_* , ε , и $\lambda = ba^{-1}$, показанные на фиг. 2. Кроме того, методом малого параметра доказано, что при $\varepsilon \rightarrow 1$ величина q_* стремится к бесконечности, как $\ln(1-\varepsilon)$, т. е. при любой нагрузке шарнир находится внутри пластинки и не выходит на границу.

7. Некоторые другие задачи. В заключение приведем еще две задачи, которые с помощью представления (1.7) сводятся к интегральным уравнениям относительно одного из скачков (1.1). Выпишем только условия на берегах разреза и полученные интегральные уравнения.

Задача об изгибе пластинки с поворачивающимся включением (7.1)

$$w(x, l \pm 0) = 0, \quad w_y'(x, l \pm 0) = \gamma, \quad \int_{c_1} \left[\frac{\ln|x-\xi|}{4\pi D} + K(x, \xi) \right] \mu(\xi) d\xi = \gamma$$

Задача об изгибе пластинки с раскрывающейся трещиной

$$M_y(x, l \pm 0) = 0, V_y(x, l \pm 0) = \psi_1(x)$$

$$D \frac{(1-\nu)(3+\nu)}{4\pi} \frac{d^4}{dx^4} \int_{c_1}^{c_2} \ln \frac{1}{|x-\xi|} \omega(\xi) d\xi + \int_{c_1}^{c_2} K(x, \xi) \omega(\xi) d\xi = \psi_1(x) \quad (7.2)$$

Оба уравнения можно решить методом ортогональных многочленов с использованием спектральных соотношений, полученных в [17]. Заметим, что и в этих задачах, а также в задаче о развитии линейного пластического шарнира поперечные силы вблизи концов разреза имеют неинтегрируемые особенности порядка $-3/2$.

Поступила 22 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. Об одном способе решения задач механики для областей с разрезами или тонкими включениями. ПММ, 1978, т. 42, вып. 1.
2. Толкачев В. М. Действие острых штампов на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
3. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактная задача для полубесконечной цилиндрической оболочки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
4. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. К решению контактной задачи для тонкой цилиндрической оболочки. В кн.: Теория оболочек и пластин. М., «Наука», 1973.
5. Максименко В. Н., Фильштинский Л. А. Контакт анизотропной оболочки вращения с жесткими линейными штампами. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 2.
6. Белубекян Э. В. Изгиб свободно опертой по контуру прямоугольной пластинки с симметричным разрезом. Изв. АН АрмССР. Механика, 1968, т. 21, № 2.
7. Линьков А. М., Меркулов В. А. Задачи об изгибе пластин с разрезами. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 1.
8. Попов Г. Я., Толкачев В. М. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами. Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4.
9. Снеддон И. Преобразование Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
10. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Гостехиздат, 1958.
11. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. М., Физматгиз, 1962.
12. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974.
13. Фихтенгольц Т. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. М., «Наука», 1970.
14. Бережницкий Л. Т., Садивский В. М., Онышко Л. И. Изгиб анизотропной пластинки с трещиной. Прикл. механ., 1978, т. 14, № 11.
15. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2. М., «Наука», 1974.
17. Попов Г. Я. Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби. Укр. матем. ж., 1968, т. 20, № 4.
18. Попов Г. Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
19. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л., Гостехиздат, 1949.
20. Sneddon I., Srivastava R. Dual relations involving Fourier - Bessel series. Proc. Roy. Soc. Edinburgh A, 1962-1963, vol. 66, pt 3.
21. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., «Наука», 1966.