МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1980

УДК 539.4

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОЙ МИКРОНЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. В. ЧИГАРЕВ

(Минск)

Рассматривается распространение гармонических волн в стохастически неоднородной упругой среде. Методом замены переменных проводится учет рассеяния волн на неоднородностях всех кратностей и осуществляется суммирование рядов для одно- и двухточечных моментов всех порядков. Вычислены собственные значения упругого и поляризационного операторов с использованием точного тензора Грина, получены дисперсионные соотношения и выражения для коэффициентов затухания и скоростей в среднем плоских волн. Рассматривается получение асимптотических формул для слабо неоднородных сред и для случаев длинных и коротких волн.

Некоторые вопросы статики и динамики неоднородных упругих сред освещены в [1–3], стохастически неоднородным средам посвящены работы [4–9]. В [6, 10, 11] в приближении однократного рассеяния рассмотрено вычисление коэффициентов затухания и скоростей волн в поликристаллах, в [12–15] в том же приближении найдены коэффициенты рассеяния волн на случайно неоднородном объеме. Учет многократного рассеяния требует суммирования всех членов ряда возмущений. В статике суммирование всех одноточечных членов ряда впервые было осуществлено в [16]. Динамические эффекты рассеяния обусловлены учетом моментов в двух и более точках среды, причем суммирование последовательности членов определенного типа в ряде возмущений соответствует рассмотрению сильно неоднородных сред.

В [17] развит метод замены переменных для упругой среды, позволяющий суммировать одно-, двух- и более точечные последовательности.

1. Вектор перемещений гармонической волны в среде удовлетворяет уравнению

$$\nabla_j\lambda_{ijkl}(x)\,\nabla_l u_k+\rho_0\omega^2u_i=0 \tag{1.1}$$

где λ_{ijkl} зависит от x случайным образом.

Уравнения движений для среднего поля представим в виде

$$\nabla_j\overset{*}{L}_{ijkl}\nabla_l\langle u_k\rangle+\rho_0\omega^2\langle u_i\rangle=0 \tag{1.2}$$

Здесь $\overset{*}{L}_{ijkl}$ — упругий оператор — вводится соотношением

$$\langle\sigma_{ij}\rangle=\langle\lambda_{ijkl}\nabla_l u_k\rangle=\overset{*}{L}_{ijkl}\nabla_l\langle u_k\rangle \tag{1.3}$$

Для статистически изотропной однородной среды оператор запишем следующим образом [17]:

$$\begin{gathered}\overset{*}{L}_{ijkl}=\int\overset{*}{\Lambda}_{ijkl}(x-x_1)\,dx_1,\quad \overset{*}{\Lambda}_{ijkl}(x-x_1)=\Lambda_1^*(\rho)\,\delta_{ij}\delta_{kl}+\Lambda_2^*(\rho)\,(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+\\ +\Lambda_3^*(\rho)\,\delta_{ij}n_kn_l+\Lambda_4^*(\rho)\,\delta_{kl}n_in_j+\\ +\Lambda_5^*(\rho)\,(\delta_{ik}n_jn_l+\delta_{ij}n_kn_l+\delta_{jk}n_in_l+\delta_{jl}n_in_k)+\Lambda_6^*(\rho)\,n_in_jn_kn_l \\ \rho=|x-x_1|,\quad n_i=\rho_i/\rho,\quad \rho_i=(x-x_1)_i\end{gathered} \tag{1.4}$$

Рассмотрим случай сильно изотропной среды $\Lambda_i^*(\rho)=0$ $(i=3,4,5,6)$.

Представим $\langle u_i\rangle=\langle u_i^t\rangle+\langle u_i^l\rangle$, где $\langle u_i^t\rangle$ — поперечная, $\langle u_i^l\rangle$ — продольная составляющие вектора средних перемещений.

Действие операторов L^* и ∇ перестановочно, поэтому из уравнения (1.2) можем получить уравнения для $\langle u_i^t\rangle$ и $\langle u_i^l\rangle$ в виде

$$L_2^*\Delta\langle u_i^t\rangle+\rho_0\omega^2\langle u_i^t\rangle=0 \tag{1.5}$$

$$(L_1^*+2L_2^*)\,\Delta\langle u_i^l\rangle+\rho_0\omega^2\langle u_i^l\rangle=0$$

Следовательно, в сильно изотропной случайно неоднородной упругой среде существуют продольные и поперечные средние поля, а уравнения движения (1.2) расщепляются на уравнения (1.5).

Рассмотрим решение уравнений (1.2) или (1.5) в виде плоских волн

$$\langle u_i^\alpha\rangle=A_i^\alpha(k_\alpha)\,e^{-i(k_\alpha x)}\qquad(\alpha=l,\ t) \tag{1.6}$$

Подставляя выражение (1.6) в уравнения (1.5), получим соответственно

$$k_t^2=\frac{\rho_0\omega^2}{\lambda_2^*(\omega,k_t)},\qquad k_l^2=\frac{\rho_0\omega^2}{\lambda_1^*(\omega,k_l)+2\lambda_2^*(\omega,k_l)} \tag{1.7}$$

Здесь $\lambda_i^*(\omega,k)$ — образы Фурье ядер Λ_i^*, оператора L_i^*:

$$\lambda_i^*(\omega,k)=\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda_i^*(\rho)\,e^{i(k\rho)}\,d\rho\qquad(i=1,2) \tag{1.8}$$

Для сильно изотропной среды $\lambda_i^*(\omega,k)=0$ ($i=3,4,5,6$), а $\lambda_1^*(\omega,k)$, $\lambda_2^*(\omega,k)$ выражаются через собственные значения $\gamma_1^*(\omega,k)$, $\gamma_2^*(\omega,k)$ поляризационного оператора [17]:

$$\Pi_{ijkl}=\int \overset{*}{\Gamma}_{ijkl}(x-x_1)\,dx_1$$

Имеем

$$\lambda_2^*=\mu_0+\frac{\gamma_2^*}{1-N^{(t)}\gamma_2^*},\qquad N^{(t)}=\frac{2(3\lambda_0+8\mu_0)}{15\mu_0(\lambda_0+2\mu_0)}$$

$$K^*=K_0+\frac{\gamma^*}{1-N\gamma^*},\qquad N=(\lambda_0+2\mu_0)^{-1} \tag{1.9}$$

$$\overset{*}{\lambda}_1=K^*-\frac{2}{3}\lambda_2^*,\qquad \gamma_1^*=\gamma^*-\frac{2}{3}\gamma_2^*,\qquad \lambda_0=K_0-\frac{2}{3}\mu_0$$

Здесь K_0, μ_0 — упругие макроскопические коэффициенты.

Выражения

$$\gamma_i^*(\omega,k)=\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_i^*(\rho)\,e^{i(k\rho)}\,d\rho$$

зависят от функции Грина и моментов тензора поляризации среды $\gamma_{ijkl}(x)$, связанного с упругими коэффициентами $\lambda_{ijkl}(x)$ зависимостью [17]:

$$\gamma_{nmst}=\lambda'_{nmql}\overset{-1}{B}_{qlst},\qquad B_{iqjl}=\delta_{iq}\delta_{jl}+\lambda'_{nmql}G^{(s)}_{in,mj} \tag{1.10}$$

$$\lambda'_{nmql}=\lambda_{nmql}-\overset{\circ}{\lambda}_{nmql},\qquad G^{(s)}_{in,mj}=G_1^{(s)}\delta_{in}\delta_{mj}+G_2^{(s)}\delta_{im}\delta_{nj}$$

В двухточечном по γ_{ijkl} приближении для изотропной среды имеем

$$\Gamma_{nmst}(\rho)=-R_{nmpq}^{\beta\gamma st}(x_2-x_1)\,G_{p\beta,q\gamma}^{(R)}(x_2-x_1),\quad R_{nmpq}^{\beta\gamma st}(x_2-x_1)= \\ =\langle\gamma_{nmpq}(x_1)\gamma_{\beta\gamma st}(x_2)\rangle=R(\rho)R_{nmpq}^{\beta\gamma st},\quad \langle\gamma_{nmpq}\rangle=0 \tag{1.11}$$

где $G_{p\beta,q\gamma}^{(R)}$ — вторая производная регулярной составляющей динамического тензора. Отметим, что вследствие формул (1.10) двухточечное приближение по γ_{ijkl} соответствует суммированию в ряде возмущений всех членов с двухточечными моментами λ_{ijkl} всех порядков. Тем самым учитывается рассеяние волн всех кратностей.

2. Рассмотрим среду, статистические свойства которой характеризуются корреляционной функцией

$$R(\rho)=\langle\gamma_i(x_2)\gamma_j(x_1)\rangle=R(0)\,e^{-\rho/a}\quad (i,\,j=1,\,2) \tag{2.1}$$

где a — радиус корреляции. Функция (2.1) характеризует среды с полностью разупорядоченной структурой [18]. Собственные значения оператора поляризации имеют вид

$$\gamma_1^*(\omega,k)=\frac{2A}{15}\Big\{2Q_l^{(1)}+2Q_t^{(2)}+Q_\alpha^{(3)}+Q_\alpha^{(4)}+ \\ +Q_\alpha^{(5)}+\frac{9}{2}Q_\alpha^{(6)}+Q_\alpha^{(7)}+2Q_t^{(8)}+Q_l^{(9)}\Big\}_t^l \tag{2.2}$$

$$\gamma_2^*(\omega,k)=\frac{2A}{15}\{Q_t^{(1)}+Q_t^{(2)}+Q_\alpha^{(3)}+Q_\alpha^{(4)}+Q_\alpha^{(5)}+Q_\alpha^{(6)}+Q_\alpha^{(7)}+Q_t^{(8)}+Q_\alpha^{(10)}\}_t^l$$

$$Q_\alpha^{(1)}=-\frac{ik_{\alpha0}k^2}{c_{\alpha0}{}^2\alpha^3}F\left(2,\,\frac{3}{2},\,\frac{7}{2};\,z_\alpha\right),\qquad Q_\alpha^{(2)}=\frac{k^2}{c_{\alpha0}\alpha^2}F\left(\frac{3}{2},\,1,\,\frac{7}{2};\,z_\alpha\right)$$

$$Q_\alpha^{(3)}=-\frac{2k^4}{21\omega^2\alpha^2}F\left(\frac{3}{2},\,1,\,\frac{11}{2};\,z_\alpha\right),\qquad Q_\alpha^{(4)}=-\frac{2k_\alpha{}^4}{\omega^2\alpha^2}F\left(\frac{3}{2},\,1,\,\frac{7}{2};\,z_\alpha\right)$$

$$Q_\alpha^{(5)}=\frac{2ik_\alpha k^4}{7\omega^2\alpha^3}F\left(\frac{3}{2},\,1,\,\frac{11}{2};\,z_\alpha\right),\qquad Q_\alpha^{(6)}=\frac{4k_\alpha{}^2k^2}{7\omega^2\alpha^2}F\left(\frac{3}{2},\,1,\,\frac{9}{2};\,z_\alpha\right)$$

$$Q_\alpha^{(7)}=-\frac{12ik_\alpha{}^3k^2}{7\omega^2\alpha^3}F\left(2,\,\frac{3}{2},\,\frac{9}{2};\,z_\alpha\right),\qquad Q_\alpha^{(8)}=-\frac{5k_\alpha{}^2}{c_\alpha{}^2\alpha^2}F\left(\frac{3}{2},\,1,\,\frac{5}{2};\,z_\alpha\right)$$

$$Q_\alpha^{(9)}=-\frac{15k_\alpha{}^2}{2c_\alpha{}^2\alpha^2}F\left(1,\,\frac{3}{2},\,\frac{3}{2};\,z_\alpha\right),\qquad Q_\alpha^{(10)}=\frac{4k_\alpha{}^2k^4}{21\omega^2\alpha^4}F\left(\frac{5}{2},\,2,\,\frac{11}{2};\,z_\alpha\right)$$

$$\alpha_\beta=a^{-1}(1-iak_{\beta0})\quad(\beta=l,\,t),\quad A=-\pi R(0)\,(2\rho_0)^{-1},\quad \{f_\alpha\}_t^l=f_l-f_t$$

$$Z_\beta=-k^2\alpha^{-2},\quad a|\delta_\alpha|<1,\quad \delta_\alpha=-\operatorname{Im}k_\alpha\quad(\alpha=l,\,t)$$

Здесь $F(\alpha,\,\beta,\,\gamma;\,z)$ — гипергеометрическая функция.

Из формул (1.9), (1.10), (2.2) следует, что собственные значения γ_i^* (поляризационного) и λ_i^* (упругого) операторов представляют собой ряды по степеням k^2 в комплексной плоскости k:

$$\gamma_j^*=A\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n^{(j)}k^{2n},\qquad \lambda_2^*=\mu_0+Aa_0^{(2)-1}\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(2)}k^{2n} \\ K^*=K_0+Aa_0^{(0)-1}\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(0)}k^{2n},\qquad a_0^{(j)}=1-AN^{(j)}\gamma_0^{(j)} \tag{2.3}$$

$$a_n^{(j)}=-AN^{(j)}\gamma_n^{(j)},\quad c_n^{(j)}=\gamma_n^{(j)}-a_0^{(j)-1}\sum_{k=1}^{n}c_{n-k}^{(j)}a_k^{(j)}\qquad (j=0,2)$$

В формулах (2.2) все функции $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ сходятся в единичном круге $|z|\leqslant 1$, кроме $Q_\alpha^{(1)}$, $Q_\alpha^{(8)}$, которые расходятся при $z=1$; последний член в $\gamma_1^*(\omega, k)$ расходится в точках $z=\pm 1$. В этих точках в силу формул (1.9) λ_2^*, K^* будут отрицательными (пропадает колебательный характер средних полей). Функции могут быть аналитически продолжены через границу круга.

Подставляя соотношения (2.3) в уравнения (1.7), получим

$$k_\alpha^2=\rho_0\omega^2\left(\lambda_0^{(\alpha)}+Aa_0^{(\alpha)-1}\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(\alpha)}k_\alpha^{2n}\right)^{-1}\qquad (\alpha=l,t) \tag{2.4}$$

$$a_0^{(l)}=3a_0^{(0)}a_0^{(t)},\quad c_n^{(l)}=3c_n^{(0)}a_0^{(t)}+4c_n^{(t)}a_0^{(0)},\quad c_n^{(2)}=c_n^{(t)},\quad a^{(2)}=a_0^{(t)}$$

Если решение $k_\alpha=k_\alpha(\omega)$ уравнения (2.4) действительное, то в среде существуют в среднем плоские незатухающие волны. Комплексному k_α соответствуют неоднородные волны, причем для неограниченной среды плоскости равных фаз и амплитуд совпадают $k_\alpha=\varkappa_\alpha-i\delta_\alpha$. Тогда из формул (2.4) следуют уравнения для вычисления $\varkappa_\alpha, \delta_\alpha$ $(\alpha=l, t)$:

$$\varkappa_\alpha=\omega\rho_0^{1/2}p\left[\frac{\lambda^*_{\alpha(1)}}{\lambda^{*2}_{\alpha(1)}+\lambda^{*2}_{\alpha(2)}}\right]^{1/2},\quad \lambda_t^*=\lambda_2^*,\quad \lambda_l^*=\lambda_1^*+2\lambda_2^* \tag{2.5}$$

$$\delta_\alpha=\frac{\omega\rho_0^{1/2}}{2p}\left[\frac{\lambda^{*2}_{\alpha(2)}}{\lambda^*_{\alpha(1)}(\lambda^{*2}_{\alpha(1)}+\lambda^{*2}_{\alpha(2)})}\right]^{1/2},\quad p=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^{1/2}$$

$$\lambda_\alpha^*(\omega, k)=\lambda^*_{\alpha(1)}(\omega, k)+i\lambda^*_{\alpha(2)}(\omega, k)$$

Уравнения (2.5) с учетом формул (2.3) запишем в виде

$$\begin{gathered}\varkappa_\alpha=\omega\rho_0^{1/2}p\left[\lambda_0^{(\alpha)}+\frac{A}{2}\sum_{n=0}^{\infty}s_n^{(\alpha)}(\varkappa_\alpha-i\delta_\alpha)^{2n}+\right.\\ \left.+\bar{s}_n^{(\alpha)}(\varkappa_\alpha+i\delta_\alpha)^{2n}\right]^{1/2}\left[\lambda_0^{(\alpha)2}+A\lambda_0^{(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}s_n^{(\alpha)}(\varkappa_\alpha-i\delta_\alpha)^{2n}+\right.\\ \left.+\bar{s}_n^{(\alpha)}(\varkappa_\alpha+i\delta_\alpha)^{2n}+A^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}s_n^{(\alpha)}\bar{s}_{n-l}^{(\alpha)}(\varkappa_\alpha-i\delta_\alpha)^{2l}(\varkappa_\alpha+i\delta_\alpha)^{2(n-l)}\right]^{-1/2}\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\delta_\alpha=\frac{\omega\rho_0^{1/2}}{2p}\left[\frac{A}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}s_n^{(\alpha)}(\varkappa_\alpha-i\delta_\alpha)^{2n}-\bar{s}_n^{(\alpha)}(\varkappa_\alpha+i\delta_\alpha)^{2n}\right]\times$$

$$\times\left\{\lambda_0^{(\alpha)3}+\frac{3A\lambda_0^{(\alpha)2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}s_n^{(\alpha)}(\varkappa_\alpha-i\delta_\alpha)^{2n}+\bar{s}_n^{(\alpha)}(\varkappa_\alpha+i\delta_\alpha)^{2n}+\right.$$

$$+\frac{A^2\lambda_0^{(\alpha)}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}[s_l^{(\alpha)}s_{n-l}^{(\alpha)}(\varkappa_\alpha-i\delta_\alpha)^{2n}+$$

$$+4s_l^{(\alpha)}s_{n-l}^{(\alpha)}(\varkappa_\alpha+i\delta_\alpha)^{2(n-l)}(\varkappa_\alpha-i\delta_\alpha)^{2l}+\bar{s}_l^{(\alpha)}\bar{s}_{n-l}^{(\alpha)}(\varkappa_\alpha+i\delta_\alpha)^{2n}]+$$

$$+\frac{A}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-m}[s_m^{(\alpha)}s_l^{(\alpha)}\bar{s}_{n-m}^{(\alpha)}(\varkappa_\alpha-i\delta_\alpha)^{2(m+l)}(\varkappa_\alpha+i\delta_\alpha)^{2(n-m-l)}+$$

$$+\bar{s}_m^{(\alpha)}s_{n-m}^{(\alpha)}\bar{s}_{n-m-l}^{(\alpha)}(\varkappa_\alpha-i\delta_\alpha)^{2l}(\varkappa_\alpha+i\delta_\alpha)^{2(n-l)}]\Big\}^{-1/2},\qquad s_m^{(\alpha)}=c_m^{(\alpha)}a_0^{(\alpha)-1}$$

Систему связанных уравнений (2.6) решаем методом последовательных приближений. Будем считать $R(0)$ — дисперсию $\gamma_{ijkl}(x)$ — малой (отсюда не следует малость дисперсии упругих коэффициентов) $\lambda_{ijkl}(x)$. Обозначим через $\varkappa_\alpha^{(n)}$, $\delta_\alpha^{(n)}$ приближения $\varkappa_\alpha$, δ_α порядка n по $R(0)$. Тогда из системы (2.6) получим

$$\delta_\alpha^{(0)}=0,\qquad \varkappa_\alpha^{(0)}=k_{\alpha 0}p,\qquad k_{\alpha 0}=\omega c_{\alpha 0}^{-1},\qquad c_{\alpha 0}^{2}=\lambda_0^{(\alpha)}\rho_0^{-1}$$

$$\delta_\alpha^{(1)}=\frac{\omega\rho_0^{1/2}A}{4pi}\sum_{n=0}^{\infty}(s_n^{(\alpha)}-\bar{s}_n^{(\alpha)})\varkappa_\alpha^{(0)2}\tag{2.7}$$

$$\varkappa_\alpha^{(1)}=\varkappa_\alpha^{(0)}\left[1-\frac{A}{4\lambda_0^{(\alpha)}}\sum_{n=0}^{\infty}(s_n^{(\alpha)}+\bar{s}_n^{(\alpha)})\varkappa_\alpha^{(0)\,2n}\right]$$

Первое приближение по $R(0)$ соответствует учету в среде пространственной дисперсии. Скорости c_α средних волн вычисляются по формуле $c_\alpha=(d\varkappa/d\omega)^{-1}$.

Соотношения (2.7) содержат параметр $ak_{\alpha 0}$, характеризующий масштаб отношений между длиной падающей волны $k_{\alpha 0}^{-1}$ и средним размером неоднородности a. В зависимости от величины $ak_{\alpha 0}$ получим асимптотические формулы, следующие из (2.7).

1. Длинные волны $ak_{\alpha 0}\ll 1$:

$$\begin{aligned}\delta_l^{(1)}&=\frac{\pi R(0)a^3\omega^4}{210p\rho_0^{1/2}}\left(\frac{329-20p^2-8p^4}{c_l^5}+\frac{56}{c_t^5}-\frac{36p^2}{c_l^2c_t^3}+\frac{8p^4}{c_l^4c_t}\right)\\ \delta_t^{(1)}&=\frac{\pi R(0)a^3\omega^4}{730p\rho_0^{1/2}}\left(\frac{127-33p^2+2p^4}{c_t^5}+\frac{82}{c_l^5}+\frac{12p^2}{c_t^2c_l^3}-\frac{2p^4}{c_t^4c_l}\right)\end{aligned}\tag{2.8}$$

Выражения для скоростей имеют в этом случае вид

$$\begin{aligned}c_l&=c_{l0}\left[1-\frac{\pi R(0)a^2\omega^2}{140(\lambda_0+2\mu_0)\rho_0}\left(\frac{51p^2-329}{c_l^4}-\frac{56}{c_t^4}+\frac{4p^2}{c_l^2c_t^2}\right)\right]\\ c_t&=c_{t0}\left[1-\frac{\pi R(0)a^2\omega^2}{70\mu_0\rho_0}\left(\frac{3p^2-21}{c_t^4}-\frac{14}{c_l^4}+\frac{4p^2}{c_l^2c_t^2}\right)\right]\end{aligned}\tag{2.9}$$

Зависимости δ_α, c_α от ω качественно имеют такой же характер, как и в [10–15, 18].

2. Короткие волны $ak_{\alpha 0} \gg 1$:

$$\delta_l^{(1)} = \frac{\pi R(0) \rho_0^{1/2}}{945ap} \left[\frac{2961+2448p^2+207p^4}{c_l} + \frac{504}{c_t} + \frac{1206p^2 c_t (c_l^2+c_t^2)}{c_l^4} \right]$$

$$\delta_t^{(1)} = \frac{\pi R(0) \rho_0^{1/2}}{315ap} \left[\frac{126-207p^2-182p^4}{c_t} + \frac{84}{c_l} + \frac{2c_l p^2 (30c_t^2+19c_l^2)}{c_t^4} \right]$$

$$c_l = \frac{c_{l0}}{p} \left[1 - \frac{\pi R(0) \left[(2961+1449p^2+1087p^4) c_t^2 c_l^2 \right.}{1890(\lambda_0+2\mu_0)\rho_0 c_l^4 c_t^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{504c_l^4+228p^4c_t^4}{1890(\lambda_0+2\mu_0)\rho_0 c_l^4 c_t^2} \right] \tag{2.10}$$

$$c_t = \frac{c_{t0}}{p} \left[1 - \frac{2\pi R(0) \left[(63+21p^2+24p^4) c_t^2 c_l^2 \right.}{365\mu_0\rho_0 c_t^4 c_l^2} + \frac{42c_t^4-2p^4c_l^4}{365\mu_0\rho_0 c_t^4 c_l^2} \right]$$

Из формул (2.9) следует, что для коротких волн дисперсия в среде отсутствует. Отсутствие частотной дисперсии соответствует лучевому приближению в асимптотических методах коротких волн [3, 9, 14].

Соотношения (1.5) имеют операторный характер и содержат масштабный параметр a. Вследствие пространственной дисперсии в пространстве волновых чисел k_α имеем, что $k_\alpha \in B_\alpha$, где B_α — конечная область, содержащая нуль [19]. Стохастически неоднородная среда ведет себя в среднем как фильтр низких частот. Для достаточно высоких частот необходимо применять лучевые методы. Исследование вопроса об ограничениях на величину частоты в коэффициентах затухания проведено в [18].

3. Рассмотрим на примере эталонной задачи [3] некоторые вопросы корректности решений, получаемых с корреляционной функцией (2.1). Дисперсионное уравнение (1.7) в этом случае имеет вид

$$k^2 = k_0^2 \mu^*(\omega, k) \qquad \mu^* = \frac{\mu_0^2 k_0^2}{\mu_0 k_0^2 - \gamma^*(\omega, k)}, \qquad A = -\frac{\pi R(0) k_0^4 \mu_0^2}{2}$$

$$\gamma^* = -A\alpha^{-2} F\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}; z\right) = A \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n k^{2n}, \qquad z = -k^2 \alpha^{-2} \tag{3.1}$$

где $\mu^*(\omega, k)$ — образ Фурье ядра оператора μ^*, $\mu^{1/2}(x) = n(x)$ — показатель преломления.

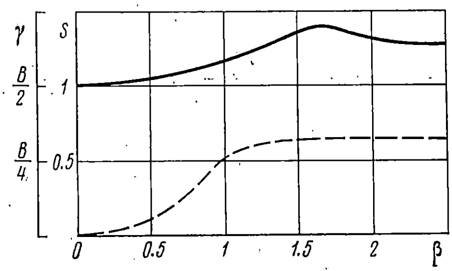
Отметим, что $\gamma^*(\omega, k)$ (3.1) содержится в $\gamma_1^*(\omega, k)$ формулы (2.2) (последний член). Именно им обусловлена расходимость $\gamma_1^*(\omega, k)$ в точках $z_l = \pm 1$. Будем этот член называть акустической частью собственного значения $\gamma_1^*(\omega, k)$, а соответствующее приближение акустическим.

Ряд $F(3/2, 1, 3/2; z)$ в плоскости z сходится в круге $|z| \leq 1$, исключая точку $z=1$; в плоскости k это соответствует сходимости ряда в круге $a|k| \leq (1+a^2k_0^2\mu_0)^{1/2}$, исключая точки $(ik)^2\alpha^{-2} = \pm 1$. Радиус сходимости в плоскости ak зависит от параметра $ak_0\mu_0^{1/2}$. В круге сходимости ряд $F(3/2, 1, 3/2; z)$ сходится к функции

$$\alpha^2(\alpha^2+q^2)^{-1}, \qquad \gamma^* = \pi R(0) k_0^4 \mu_0^{-2} 2^{-1} (\alpha^2+q^2)^{-1}$$

а уравнение (3.1) преобразуется к виду

$$k^4 + k^2(\alpha^2 - k_0^2\mu_0 - 2^{-1}\pi R(0) k_0^2 \mu_0) - \alpha^2 k_0^2 \mu_0 = 0 \tag{3.2}$$



В зависимости от вида аналитического выражения $\gamma^*(\omega, k)$ будем получать различные выражения для $\varkappa$ и δ. Для выражения в виде ряда (3.1) в первом приближении по $R(0)$ получим

$$\varkappa^{(1)}=\frac{A_1k_0^3\mu_0^{1/2}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c_n}{a_0}+\frac{\bar{c}_n}{\bar{a}_0}\right)k_0^{2n}\mu_0^n,\quad A_1=-\frac{\pi R(0)}{2} \tag{3.3}$$

$$\delta^{(1)}=-\frac{A_1k_0^3\mu_0^{1/2}}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c_n}{a_0}-\frac{\bar{c}_n}{\bar{a}_0}\right)k_0^{2n}$$

Рассмотрим асимптотику длинных волн, причем учтем все приближения для коэффициентов c_n; тогда ряды (3.3) суммируются и будем иметь

$$\varkappa^{(1)}=\frac{A_1k_0^3a^2\mu_0^{1/2}}{2(1+a^2k_0^2\mu_0)},\quad \delta^{(1)}=-\frac{A_1a^3k_0^4\mu_0^{1/2}}{(1+a^2k_0^2\mu_0)^2} \tag{3.4}$$

Переходя в (3.4) к коротким волнам $ak_0\mu_0^{1/2}\gg 1$, получим тот же результат, что и исходя из (3.3); причем, как и в общем случае, имеет место отсутствие дисперсии. Зависимость $\gamma=a\delta$ от $\beta=ak_0\mu_0^{1/2}$, $B=\pi R_1(2\mu_0)^{-2/3}$ представлена на фигуре пунктирной линией, а зависимость $cc_0^{-1}=S$ от β представлена сплошной линией. Если же исходить из аналитического выражения для $\gamma^*(\omega, k)$ в виде $\pi R(0)k_0^4\mu_0^2 2^{-1}(\alpha^2+\varrho^2)^{-1}$, то в первом приближении по $R(0)$ получим

$$\varkappa^{(1)}=-\frac{\pi R(0)a^2\mu_0^{7/2}k_0^3}{4(1+a\mu_0k_0^2)}\quad \delta^{(1)}=\frac{\pi R(0)a^3\mu_0^2k_0^4}{2(1+4\mu_0a^2k_0^2)} \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует, что дисперсии нет, но коэффициент δ зависит для коротких волн от ω^2, что совпадает с результатами [10–15, 18].

Поступила 11 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976.
2. *Olschak W., Urbanowski W.* Anisotropie im elastisch-plastische Bezeich. In: Mech. Anisotropie. Wien — New York, 1974.
3. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.
4. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М., «Наука», 1970.
5. *Болотин В. В., Гольденблат И. И., Смирнов А. Ф.* Строительная механика. М., Стройиздат, 1972.
6. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М., «Наука», 1977.
7. *Хорошун Л. П.* Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред. Прикл. механ., 1978, т. 14, № 2.
8. *Волков С. Д., Ставров В. П.* Статистическая механика композитных материалов. Минск, Изд-во Белорусск. ун-та, 1978.

9. *Блиштейн Ю. М., Мешков С. И., Чебан В. Г., Чигарев А. В.* Распространение волн в вязкоупругих средах. Кишинев, «Штинца», 1977.
10. *Лифшиц И. М., Пархомовский Г. Д.* К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах. ЖЭТФ, 1950, т. 20, вып. 2.
11. *Усов А. А., Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.* К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах. ПМТФ, 1972, № 2.
12. *Шуман Б. Л.* Распространение упругих волн в среде со случайными неоднородностями. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 10.
13. *Чернов Л. А.* Волны в случайно неоднородных средах. М., «Наука», 1975.
14. *Keller I. B.* Wave propagation in random media. Proc. Symp. Appl. Math., 1962, vol. 13.
15. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
16. *Болотин В. В., Москаленко В. Н.* Задача об определении упругих постоянных микронеоднородной среды. ПМТФ, 1968, № 1.
17. *Чигарев А. В.* К расчету макроскопических коэффициентов стохастически неоднородных упругих сред. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
18. *Усов А. А., Шермергор Т. Д.* Дисперсия скорости и рассеяние продольных ультразвуковых волн в композиционных материалах, ПМТФ, 1978, № 3.
19. *Кунин И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой. М., «Наука», 1975.