**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1980**

УДК 539.376+532.135

КВАЗИКОНСТАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ СТАРЕЮЩИХ МАТЕРИАЛОВ

В. И. МАЛЫЙ

(Москва)

Среди задач линейной теории вязкоупругости особой сложностью отличаются задачи для стареющих материалов. В точной постановке решения удается довести до числа лишь в исключительных случаях. Поэтому были разработаны эффективные приближенные методы [1-5] для таких задач. Но даже при использовании этих приближений необходимые для стареющих материалов вычисления остаются весьма трудоемкими, поэтому необходимы некоторые упрощения из-за невозможности довести до числа задачу в более точной постановке, а не из-за уверенности в несущественном их влиянии на точность решения.

В [6] разработан применительно к нестареющим материалам весьма простой метод решения линейных задач, который за счет использования свойства квазиконстантности вязкоупругих операторов позволяет устранить необходимость в других обычно используемых приближениях.

В публикуемой работе метод квазиконстантных операторов обобщается на линейные задачи для тел из изотропных стареющих материалов.

1. Используемые в линейной теории вязкоупругости стареющих материалов интегральные операторы вида

$$\mathbf{A}\varepsilon(t)=\int_0^t A(t,\tau)\,\varepsilon'(\tau)\,d\tau,\quad \varepsilon'(t)=\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

вполне характеризуются откликом $A(t,t_0)$ на единичную ступенчатую функцию Хевисайда $A(t,t_0)=\mathbf{A}\theta(t-t_0)$.

Оператор $\mathbf{A}$, вообще говоря, комплексный, будем называть квазиконстантным с показателем квазиконстантности α (который легко определяется, когда известен отклик $A(t,\tau)$), если выполняются условия

$$\left|\frac{t_1-t_0}{A(t_1,t_0)}\frac{\partial}{\partial t_i}A(t_1,t_0)\right|\leqslant\alpha\ll 1\quad (i=0,1)\tag{1.1}$$

Из определения (1.1) нетрудно получить основные для дальнейших оценок неравенства

$$\left(\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}\right)^\alpha\leqslant\left|\frac{A(t_1,t_0)}{A(t_2,t_0)}\right|\leqslant\left(\frac{t_2-t_0}{t_1-t_0}\right)^\alpha\quad (t_0<t_1<t_2)\tag{1.2}$$

$$\left(\frac{t-\tau}{t-t_0}\right)^\alpha\leqslant\left|\frac{A(t,\tau)}{A(t,t_0)}\right|\leqslant\left(\frac{t-t_0}{t-\tau}\right)^\alpha\quad (t_0<\tau<t)$$

А так как при $t_0\leqslant\tau\leqslant t$ имеем

$$|A(t,\tau)-A(t,t_0)|=\left|\int_{t_0}^{\tau}\frac{\partial A(t,\xi)}{\partial\xi}\,d\xi\right|\leqslant\int_{t_0}^{\tau}\alpha\frac{|A(t,\xi)|}{t-\xi}\,d\xi=$$

$$=|A(t,t_0)|\int_{t_0}^{\tau}\left|\frac{A(t,\xi)}{A(t,t_0)}\right|\frac{\alpha d\xi}{t-\xi}\leqslant|A(t,t_0)|\left[\left(\frac{t-t_0}{t-\tau}\right)^{\alpha}-1\right]$$

то справедливо также неравенство

$$\left|\frac{A(t,\tau)}{A(t,t_0)}-1\right|\leqslant\left(\frac{t-t_0}{t-\tau}\right)^{\alpha}-1\quad(t_0\leqslant\tau\leqslant t)\tag{1.3}$$

При отсутствии старения $A(t,t_0)=A(t-t_0)$, и каждое из двух условий (1.1) становится эквивалентным условию квазиконстантности [6] операторов при отсутствии старения. А так как показатели квазиконстантности вязкоупругих операторов широкого класса нестареющих твердых вязкоупругих материалов оказались весьма малыми величинами [6], следует ожидать также, что будут малы и показатели квазиконстантности аналогичных стареющих материалов, по крайней мере в диапазоне времен t_1 и t_0, в котором старение не является весьма существенным.

2. Далее будем считать показатели квазиконстантности рассматриваемых операторов вязкоупругости малыми и, исходя из этого, проведем асимптотический анализ решений задач вязкоупругости для стареющих материалов.

Рассмотрим произведение квазиконстантных операторов **А** и **В**, характеризуемых откликами $A(t,t_0)$ и $B(t,t_0)$ и показателями квазиконстантности α и β. Покажем, что отклик произведения **ВА** таких операторов равен

$$\mathbf{BA}\theta(t-t_0)=B(t,t_0)A(t,t_0)+O(\alpha\beta)\tag{2.1}$$

Действительно, погрешность этого соотношения

$$\Delta(t,t_0)=\frac{\mathbf{BA}\theta(t-t_0)}{B(t,t_0)A(t,t_0)}-1=\int_{t_0}^{t}\left[\frac{B(t,\tau)}{B(t,t_0)}-1\right]\frac{\partial}{\partial\tau}A(\tau,t_0)\frac{d\tau}{A(t,t_0)}$$

легко оценивается с помощью неравенств (1.1) — (1.3):

$$|\Delta(t,t_0)|\leqslant\int_{t_0}^{t}\left|\frac{B(t,\tau)}{B(t,t_0)}-1\right|\left|\frac{A(\tau,t_0)}{A(t,t_0)}\right|\left|\frac{\frac{\partial}{\partial\tau}A(\tau,t_0)}{A(\tau,t_0)}\right|d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t}\frac{\alpha(t-t_0)^{\alpha}}{(\tau-t_0)^{1+\alpha}}\left[\left(\frac{t-t_0}{t-\tau}\right)^{\beta}-1\right]d\tau=\alpha\int_0^1(1-y)^{-1-\alpha}(y^{-\beta}-1)\,dy$$

Последний интеграл оценен при доказательстве аналогичного соотношения в [6]. Таким образом, убеждаемся в справедливости асимптотической оценки $|\Delta(t,t_0)|=O(\alpha\beta)$ и соотношения (2.1). Поэтому погрешность построения произведения операторов **ВА** согласно соотношению

$$\mathbf{BA}\varphi(t)=\int_0^t B(t,\tau)A(t,\tau)\varphi'(\tau)d\tau+O(\alpha\beta)=(\mathbf{BA})_k\varphi(t)+O(\alpha\beta)\tag{2.2}$$

является величиной второго порядка малости по показателям квазиконстантности сомножителей.

С полученным в результате оператором $(\mathbf{BA})_k$ далее можно обращаться как с квазиконстантным, так как для его показателя квазиконстантности справедливы неравенства

$$\left|\frac{t_1-t_0}{B(t_1,t_0)A(t_1,t_0)}\frac{\partial}{\partial t_i}[B(t_1,t_0)A(t_1,t_0)]\right| \leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{t_1-t_0}{B(t_1,t_0)}\frac{\partial}{\partial t_i}B(t_1,t_0)\right|+\left|\frac{t_1-t_0}{A(t_1,t_0)}\frac{\partial}{\partial t_i}A(t_1,t_0)\right|\leqslant\alpha+\beta$$

Из соотношения (2.2) вытекает важное для теории вязкоупругости стареющих материалов следствие: все квазиконстантные операторы коммутативны с точностью до величин второго порядка малости

$$(\mathbf{BA}-\mathbf{AB})\varphi(t)=O(\alpha\beta) \tag{2.3}$$

Для квазиконстантного оператора $\mathbf{A}$ справедливы также следующие результаты.

Отклик обратного оператора $\mathbf{A}^{-1}$ определяется соотношением

$$\mathbf{A}^{-1}\theta(t-t_0)=\frac{1}{A(t,t_0)}+O(\alpha^2),\quad A(t,t_0)=\mathbf{A}\theta(t-t_0)\quad(t>t_0) \tag{2.4}$$

Построенный с помощью отклика (2.4) обратный оператор

$$\mathbf{A}^{-1}\varphi(t)=\int_0^t\frac{\varphi'(\tau)\,d\tau}{A(t,\tau)}+O(\alpha^2) \tag{2.5}$$

сам квазиконстантен, и его показатель квазиконстантности равен α.

Пусть параметр z принадлежит некоторому замкнутому контуру Γ в комплексной плоскости, а также выполняются условия

$$|A(t,\tau)|\leqslant M_A,\qquad |z-A(t,\tau)|\geqslant M_\Gamma\quad(z\in\Gamma) \tag{2.6}$$

Тогда оператор $(z-\mathbf{A})^{-1}$ — квазиконстантный вместе с $\mathbf{A}$ и определяется следующим образом:

$$\frac{1}{z-\mathbf{A}}\varphi(t)=\int_0^t\frac{\varphi'(\tau)}{z-A(t,\tau)}d\tau+O(\alpha^2) \tag{2.7}$$

Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области D, ограниченной контуром Γ. Тогда оператор $f(\mathbf{A})$ — квазиконстантный и определяется соотношением

$$f(\mathbf{A})\varphi(t)=\int_0^t f(A(t,\tau))\varphi'(\tau)\,d\tau+O(\alpha^2) \tag{2.8}$$

Доказательство соотношений (2.4), (2.5), (2.7), (2.8) совпадает с доказательством аналогичных утверждений [6].

Полученных результатов достаточно для построения решений вязкоупругих задач для стареющих материалов, если зависимость воздействия от времени может быть приведена к однопараметрическому виду. В общем же случае, как показано в [6], необходимо использовать математические объекты более сложной структуры, определяемые, например, выражением

$$f(\mathbf{A},t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-\mathbf{A}}f(z,t) \tag{2.9}$$

где контур Γ должен находиться в области аналитичности функции $f(z,t)$ по параметру z и охватывать множество точек $z=A(t_0+0,t_0)$.

В случае квазиконстантности оператора **A** выражение (2.9) расшифровывается без труда. Необходимо только, чтобы контур Г удовлетворял и условиям (2.6), что дает возможность воспользоваться правилом (2.7) построения оператора $(z-\mathbf{A})^{-1}$. Тогда

$$f(\mathrm{A},t)=\oint\limits_{\Gamma}\frac{dz}{2\pi i}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{z-A(t,\tau)}f'(z,\tau)+O(\alpha^2)=$$

$$=\int\limits_0^t f'(A(t,\tau),\tau)\,d\tau+O(\alpha^2),\quad f'(z,t)=\frac{\partial}{\partial t}f(z,t) \tag{2.10}$$

Если же α — наибольший из показателей квазиконстантности операторов **B** и **A**, то аналогично получим

$$\mathbf{B}f(\mathbf{A},t)=\oint\limits_{\Gamma}\frac{dz}{2\pi i}\int\limits_0^t\frac{B(t,\tau)f'(z,\tau)}{z-A(t,\tau)}d\tau+O(\alpha^2)=$$

$$=\int\limits_0^t B(t,\tau)f'(A(t,\tau),\tau)\,d\tau+O(\alpha^2) \tag{2.11}$$

3. Вязкоупругие свойства стареющих линейных изотропных материалов будем описывать интегральными операторами модуля Юнга и коэффициента Пуассона

$$\mathbf{E}\varphi(t)=\int\limits_0^t E(t,\tau)\varphi'(\tau)\,d\tau,\quad \boldsymbol{\nu}_l\varphi(t)=\int\limits_0^t \nu_l(t,\tau)\varphi'(\tau)\,d\tau \tag{3.1}$$

которые можно определить из связи продольных деформаций $\varepsilon_{11}(t)$ с напряжениями $\sigma_{11}(t)$ и поперечными деформациями ε_{22}

$$\sigma_{11}(t)=\mathbf{E}\varepsilon_{11}(t),\quad \varepsilon_{22}(t)=-\boldsymbol{\nu}_l\varepsilon_{11}(t)$$

при одноосном растяжении материала вдоль первой координатной оси. Таким образом, ядра $E(t,\tau)$ и $\nu_l(t,\tau)$ совпадают с кривыми релаксации напряжений и поперечной деформации в экспериментах на релаксацию при $\varepsilon_{11}(t)=\theta(t-\tau)$.

Удобно [5, 7] определить также оператор $\boldsymbol{\nu}_r=\mathbf{E}\boldsymbol{\nu}_l\mathbf{E}^{-1}$, так, что при отсутствии старения $\boldsymbol{\nu}_r=\boldsymbol{\nu}_l=\boldsymbol{\nu}$. Тогда уравнения и граничные условия основных квазистатических задач о деформировании стареющего вязкоупругого тела можно представить в виде

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{r},t)+f_i(\mathbf{r},t)=0,\quad \mathbf{r}\in V \tag{3.2}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)n_j(\mathbf{r})=F_i(\mathbf{r},t),\quad \mathbf{r}\in S_\sigma;\quad u_i(\mathbf{r},t)=V_i(\mathbf{r},t),\quad \mathbf{r}\in S_u$$

$$2\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t)=u_{i,j}(\mathbf{r},t)+u_{j,i}(\mathbf{r},t) \tag{3.3}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)=(1+\boldsymbol{\nu}_r)^{-1}\mathbf{E}\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t)+\frac{\delta_{ij}\boldsymbol{\nu}_r}{(1+\boldsymbol{\nu}_r)(1-2\boldsymbol{\nu}_r)}\mathbf{E}\varepsilon_{kk}(\mathbf{r},t)=$$

$$=\mathbf{E}(1+\boldsymbol{\nu}_l)^{-1}\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t)+\mathbf{E}\frac{\boldsymbol{\nu}_l\delta_{ij}}{(1+\boldsymbol{\nu}_l)(1-2\boldsymbol{\nu}_l)}\varepsilon_{kk}(\mathbf{r},t)$$

Здесь V — занятая телом область пространства, в которой действуют (объемные) силы f_i, u_i — компоненты смещения точек тела, n_i — компоненты нормали к поверхности тела S, S_σ и S_u — части поверхности $S=S_\sigma US_u$, на которых заданы поверхностные усилия F_i и перемещения V_i соответственно.

Упругая задача, соответствующая вязкоупругой задаче (3.2), (3.3), получается при замене вязкоупругого закона (3.3) законом Гука

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)=\frac{E\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t)}{1+\nu}+\delta_{ij}\frac{\nu E\varepsilon_{kk}(\mathbf{r},t)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{3.4}$$

Решение упругой задачи (3.2), (3.4) удобно представлять в виде

$$u_i(\mathbf{r},t)=E^{-1}u_i^\circ(\mathbf{r},\nu,t),\qquad \sigma_{ij}(\mathbf{r},t)=\sigma_{ij}^\circ(\mathbf{r},\nu,t) \tag{3.5}$$

в случае первой краевой задачи при $S_\sigma=S$ и в виде

$$u_i(\mathbf{r},t)=u_i^*(\mathbf{r},\nu,t),\qquad \sigma_{ij}(\mathbf{r},t)=E\sigma_{ij}^*(\mathbf{r},\nu,t) \tag{3.6}$$

в случае второй краевой задачи при $S_u=S$.

Решения (3.5) и (3.6) являются аналитическими по коэффициенту Пуассона ν, по крайней мере в области $-1<\mathrm{Re}\,\nu<0.5$ [8], и могут быть представлены соответственно, в форме

$$u_j(\mathbf{r},t)=\oint_\Gamma\frac{dz}{2\pi iE}\frac{u_j^\circ(\mathbf{r},z,t)}{z-\nu},\quad \sigma_{jk}(\mathbf{r},t)=\oint_\Gamma\frac{dz}{2\pi i}\frac{\sigma_{jk}^\circ(\mathbf{r},z,t)}{z-\nu} \tag{3.7}$$

$$u_j(\mathbf{r},t)=\oint_\Gamma\frac{dz}{2\pi i}\frac{u_j^*(\mathbf{r},z,t)}{z-\nu},\quad \sigma_{ij}(\mathbf{r},t)=\oint_\Gamma\frac{Edz}{2\pi i}\frac{\sigma_{jk}^*(\mathbf{r},z,t)}{z-\nu} \tag{3.8}$$

При этом контур Г должен располагаться в области аналитичности решения и охватывать точку $z=\nu$. Функции параметра z в (3.7) и (3.8) — аналитические продолжения по ν упругих решений (3.5) и (3.6). Поэтому они удовлетворяют при всех z соотношениям (3.2) и (3.4), в которых ν заменено на z.

Соотношения для случая смешанной краевой задачи получаются как суперпозиция соотношений, полученных при рассмотрении первой и второй задач.

4. Представление упругих решений в виде интегралов Коши (3.7) и (3.8) дает возможность следующим образом реализовывать принцип Вольтерра при построении решения вязкоупругой задачи со старением (3.2), (3.3):

$$u_j(\mathbf{r},t)=\frac{\mathbf{E}^{-1}}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-\mathbf{v}_r}u_j^\circ(\mathbf{r},z,t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-\mathbf{v}_l}\mathbf{E}^{-1}u_j^\circ(\mathbf{r},z,t) \tag{4.1}$$

$$\sigma_{jk}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-\mathbf{v}}\sigma_{jk}^\circ(\mathbf{r},z,t)$$

в случае первой краевой задачи при $S_\sigma=S$ и

$$u_j(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-\mathbf{v}_l}u_j^*(\mathbf{r},z,t) \tag{4.2}$$

$$\sigma_{jk}(\mathbf{r},t)=\frac{\mathbf{E}}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-\mathbf{v}_l}\sigma_{jk}^*(\mathbf{r},z,t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-\mathbf{v}}\mathbf{E}\sigma_{jk}^*(\mathbf{r},z,t)$$

в случае второй краевой задачи при $S_u=S$.

Контур Г интегрирования в (4.1) и (4.2) должен охватывать множество точек $z=\nu_0(t)$ (где $\nu_0(t)=\nu_r(t,t)=\nu_l(t,t)$ — мгновенное значение коэффициента Пуассона), а также находиться в области аналитичности упругого решения по ν, например в области $-1<\mathrm{Re}\, z<0.5$ при решении первой и второй краевых задач.

Доказательство соотношений (4.1) и (4.2) отличается от аналогичных рассуждений в [6] лишь необходимостью соблюдать порядок в произведениях операторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}^{-1}$, $\boldsymbol{\nu}_r$ и $\boldsymbol{\nu}_l$.

5. Установленные в п. 2 свойства квазиконстантных операторов позволяют просто строить вязкоупругое решение, исходя из принципа Вольтерра в форме (4.1) и (4.2).

Пусть α — наибольший из показателей квазиконстантности операторов $\mathbf{E}$, $\boldsymbol{\nu}_r$ и $\boldsymbol{\nu}_l$.

Как следует из (2.3), в квазиконстантном приближении вязкоупругие операторы $\mathbf{E}$, $\boldsymbol{\nu}_r$ и $\boldsymbol{\nu}_l$ стареющих материалов коммутативны и, в частности, операторы $\boldsymbol{\nu}_r$ и $\boldsymbol{\nu}_l$ не различаются между собой, поэтому

$$\boldsymbol{\nu}_r=\mathbf{E}\boldsymbol{\nu}_l\mathbf{E}^{-1}=\boldsymbol{\nu}_l+O(\alpha^2)=\boldsymbol{\nu}$$

$$\boldsymbol{\nu}_r\theta(t-\tau)=\boldsymbol{\nu}_l\theta(t-\tau)+O(\alpha^2)=\nu(t,\tau)$$

Это существенно упрощает структуру теории вязкоупругости стареющих материалов.

Будем считать, что отклик $\nu(t,\tau)$ операторов коэффициента Пуассона и контур Г удовлетворяют сформулированным в п. 2 условиям, при которых и оператор $z-\boldsymbol{\nu}$ $(z\in\Gamma)$ является квазиконстантным, а именно: существуют константы M_ν и M_Γ, такие, при которых

$$|\boldsymbol{\nu}(t,\tau)|\leqslant M_\nu, \quad |z-\nu(t,\tau)|\geqslant M_\Gamma \qquad (z\in\Gamma) \tag{5.1}$$

Тогда решение (4.1) первой задачи для стареющих вязкоупругих материалов с помощью полученных соотношений (2.10) и (2.11) приводится к виду

$$u_j(\mathbf{r},t)=\int\limits_0^t \frac{d\tau}{E(t,\tau)}u_j^{\circ\prime}(\mathbf{r},\nu(t,\tau),\tau)+O(\alpha^2) \tag{5.2}$$

$$\sigma_{jk}(\mathbf{r},t)=\int\limits_0^t d\tau\,\sigma_{jk}^{\circ\prime}(\mathbf{r},\nu(t,\tau),\tau)+O(\alpha^2)$$

$$u_j^{\circ\prime}(\mathbf{r},z,t)=\frac{\partial}{\partial t}u_j^{\circ}(\mathbf{r},z,t), \quad \sigma_{jk}^{\circ\prime}(\mathbf{r},z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{jk}^{\circ}(\mathbf{r},z,t)$$

Аналогично по правилам теории квазиконстантных операторов преобразуем решение (4.2) второй краевой задачи для стареющих вязкоупругих материалов

$$u_j(\mathbf{r},t)=\int\limits_0^t d\tau\,u_j^{*\prime}(\mathbf{r},\nu(t,\tau),\tau)+O(\alpha^2) \tag{5.3}$$

$$\sigma_{jk}(\mathbf{r},t)=\int\limits_0^t d\tau\,E(t,\tau)\sigma_{jk}^{*\prime}(\mathbf{r},\nu(t,\tau),\tau)+O(\alpha^2)$$

$$u_j^{*\prime}(\mathbf{r},z,t)=\frac{\partial}{\partial t}u_j^{*}(\mathbf{r},z,t), \quad \sigma_{jk}^{*\prime}(\mathbf{r},z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{jk}^{*}(\mathbf{r},z,t)$$

Таким образом, использование свойства квазиконстантности вязкоупругих операторов позволяет свести построение решения вязкоупругой задачи для стареющих материалов к аналитическому или численному построению зависимости решения соответствующей упругой задачи от упругих констант.

Как и в случае нестареющих материалов [6], дополнительные упрощения возникают, когда решения (3.5) и (3.6) соответствующих упругих задач квазиконстантны по времени, т. е. для них справедливы оценки

$$\left|\frac{t}{u_i{}^\circ(\mathbf{r},z,t)}\frac{\partial}{\partial t}u_i{}^\circ(\mathbf{r},z,t)\right|\leqslant\alpha\ll 1$$

и т. д. Тогда вместо (5.2) и (5.3) для первой задачи вязкоупругости получаем

$$u_j(\mathbf{r},t)=\frac{u_j{}^\circ(\mathbf{r},\nu(t,0),t)}{E(t,0)}+O(\alpha^2),\qquad \sigma_{jk}(\mathbf{r},t)=\sigma_{jk}{}^\circ(\mathbf{r},\nu(t,0),t)+O(\alpha^2)$$

а для второй задачи вязкоупругости

$$u_j(\mathbf{r},t)=u_j{}^*(\mathbf{r},\nu(t,0),t)+O(\alpha^2)$$

$$\sigma_{jk}(\mathbf{r},t)=E(t,0)\sigma_{jk}{}^*(\mathbf{r},\nu(t,0),t)+O(\alpha^2)$$

6. В качестве примера использования теории квазиконстантных операторов рассмотрим смешанную задачу о жестком плоском штампе, лежащем со сцеплением на участке $|x|\leqslant l$ границы полуплоскости из стареющего вязкоупругого материала.

Если действующая на штамп сила равна $P(t)$, то используя известное решение соответствующей упругой задачи [9], получим выражение для контактного давления

$$q(x,t)=\frac{1}{\pi\sqrt{l^2-x^2}}\frac{1+\varkappa}{\sqrt{\varkappa}}\cos\left[\frac{\ln\varkappa}{2\pi}\ln\frac{l+x}{l-x}\right]P(t)\qquad \varkappa=3\mathrm{I}-4\boldsymbol{\nu}_r$$

Данная задача интересна тем, что вязкоупругий оператор $\boldsymbol{\nu}_r$ коэффициента Пуассона стареющего материала входит в решение трансцендентным образом.

Выполняя расшифровку выражения для $q(x,t)$ по правилам теории квазиконстантных операторов, получаем

$$q(x,t)=\int_0^t q_0(x,t,\tau)\frac{d}{d\tau}P(\tau)\,d\tau$$

$$q_0(x,t,\tau)=\frac{1}{\pi\sqrt{l^2-x^2}}\frac{1+\varkappa(t,\tau)}{\sqrt{\varkappa(t,\tau)}}\cos\left[\frac{\ln\varkappa(t,\tau)}{2\pi}\ln\frac{l+x}{l-x}\right]+O(\alpha^2)$$

$$\varkappa(t,\tau)=3-4\nu_r(t,\tau)=3-4\boldsymbol{\nu}_r\theta(t-\tau)$$

Здесь $q_0(x,t,\tau)$ — контактное давление в случае, когда $P(t)=\theta(t-\tau)$. Условия применимости теории квазиконстантных операторов легко проверяются, если известна функция $\nu(t,\tau)$ для стареющего материала вязкоупругой полуплоскости.

Приведенные результаты показывают простоту и эффективность использования теории квазиконстантных операторов при решении сложных задач линейной теории вязкоупругости стареющих материалов.

Поступила 7 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
2. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
3. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
4. *Колтунов М. А.* Ползучесть и релаксация. М., «Высшая школа», 1976.
5. *Ефимов А. Б., Малый В. И.* Метод аналитического продолжения в линейной вязкоупругости стареющих материалов. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1.
6. *Малый В. И.* Квазиконстантные операторы в теории вязкоупругости нестареющих материалов. Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 1.
7. *Харлаб В. Д.* Распространение принципа Вольтерра на случай некоммутативных операторов. В сб.: Прочность и пластичность, М., «Наука», 1971.
8. *Михлин С. Г.* Спектр пучка операторов теории упругости. Успехи матем. наук, 1973, т. 28, вып. 3.
9. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.