МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1980

УДК 531.383

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

В. В. РУМЯНЦЕВ

(Москва)

Задачи об устойчивости равновесия гироскопа Жерва и вращения тяжелого гиростата, опирающегося сферической поверхностью на горизонтальную плоскость, рассмотрены в работе [1]. Некоторые последовавшие работы других авторов были посвящены задачам устойчивости движения тяжелого осесимметричного гиростата по плоскости. В данной работе рассматривается более общая задача устойчивости вращения и, в частности, равновесия тяжелого гиростата, опирающегося на горизонтальную плоскость произвольной выпуклой поверхностью (обобщение задачи об устойчивости вращения так называемого «кельтского камня», первоначально исследованной в линейной постановке [2]). Найдены условия, необходимые и достаточные для устойчивости равновесия и вращения вокруг вертикали тяжелого гиростата, а также рассмотрена задача о движении по гладкой горизонтальной плоскости тяжелого симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом.

1. Рассмотрим движение гиростата под действием силы тяжести по горизонтальной плоскости. Пусть гиростат — некоторое твердое тело (корпус), опирающееся выпуклой поверхностью на горизонтальную плоскость; с корпусом жестко связана ось вращения осесимметричного твердого тела (ротора), свободно, без трения вращающегося вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью Ω. Предполагается, что в каждый момент времени опорная поверхность корпуса соприкасается с горизонтальной плоскостью только одной своей точкой, в которой поверхность имеет определенную касательную плоскость.

Движение гиростата будем изучать по отношению к неподвижной системе осей координат $\xi\eta\zeta$ с началом в некоторой точке горизонтальной плоскости и осью ζ, направленной вертикально вверх. Единичный вектор этой оси обозначим через $\boldsymbol{\gamma}$. С корпусом гиростата жестко свяжем подвижную систему осей координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре масс O гиростата, ось Ox_3 которой направим по одной из главных центральных осей инерции гиростата. Будем предполагать, что в точке P пересечения отрицательной полуоси Ox_3 с опорной поверхностью касательная плоскость к последней ортогональна этой оси. Расстояние от точки O до точки P обозначим через l. Оси x_1 и x_2 проведем коллинеарно направлениям главных кривизн опорной поверхности для точки P; в общем случае эти оси не будут главными осями инерции для центра масс.

Радиус-вектор относительно O точки соприкосновения тела с плоскостью обозначим через $\mathbf{r}$ и запишем уравнение опорной поверхности в системе координат $Ox_1x_2x_3$ в виде

$$f(x_1, x_2, x_3)=0 \tag{1.1}$$

Так как единичный вектор внутренней нормали к поверхности (1.1) в точке ее соприкосновения с горизонтальной плоскостью равен $\boldsymbol{\gamma}$, то справедливо равенство

$$\gamma = -\operatorname{grad} f / |\operatorname{grad} f| \tag{1.2}$$

позволяющее выразить радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки соприкосновения через γ.

Уравнения движения гиростата по плоскости запишем в виде уравнений

$$\mathbf{v}^{\cdot} + \omega \times \mathbf{v} = -g\gamma + \mathbf{R}, \qquad \mathbf{G}^{\cdot} + \omega \times \mathbf{G} = \mathbf{r} \times M\mathbf{R} \tag{1.3}$$

выражающих теоремы о количестве движения и о моменте количеств движения гиростата соответственно, записанные в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Здесь $\mathbf{v}$ — вектор скорости центра масс, ω — вектор мгновенной угловой скорости корпуса гиростата, $\mathbf{R}$ — сила реакции опорной плоскости, поделенная на массу M гиростата, g — величина ускорения силы тяжести, $\mathbf{G}$ — вектор момента количеств движения гиростата относительно точки O, причем

$$\mathbf{G} = \theta \cdot \omega + \mathbf{k} \tag{1.4}$$

где θ — центральный тензор инерции преобразованного тела, $\mathbf{k}$ — вектор гиростатического момента ротора, направленный по его оси и численно равный $k = I\Omega$ (I — осевой момент инерции ротора). Согласно Жуковскому [3], преобразованное твердое тело получается присоединением к корпусу гиростата материальной бесконечно тонкой палочки, направленной по оси ротора, имеющей массу ротора и такой же момент инерции относительно перпендикулярной оси, проходящей через ее центр масс, совпадающий с центром масс ротора, что и ротор. Точкой справа обозначается производная по времени в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Для вектора γ справедливо уравнение Пуассона

$$\gamma^{\cdot} + \omega \times \gamma = 0 \tag{1.5}$$

Далее ограничимся рассмотрением случая идеальной плоскости, когда она является или абсолютно гладкой или абсолютно шероховатой. В первом случае сила реакции ортогональна плоскости

$$\mathbf{R} = R\gamma \tag{1.6}$$

Из первого уравнения (1.3) при этом следует, что горизонтальная проекция центра масс O движется прямолинейно и равномерно или покоится; далее без уменьшения общности примем, что она покоится, тогда центр масс O может перемещаться лишь по вертикали. В случае абсолютно шероховатой плоскости скорость точки корпуса, соприкасающейся в данный момент времени с плоскостью, равна нулю, т. е.

$$\mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r} = 0 \tag{1.7}$$

Уравнения (1.3), (1.5) с учетом (1.2), (1.6) или (1.7) представляют собой полную систему уравнений движения тяжелого гиростата по горизонтальной плоскости.

В рассматриваемых случаях гиростат на горизонтальной плоскости — консервативная система, механическая энергия которой остается постоянной во все время движения

$$M\mathbf{v}^2 + \omega \cdot \theta \cdot \omega + 2Mg\zeta_0 = \text{const} \tag{1.8}$$

Здесь $\zeta = -\mathbf{r} \cdot \gamma$ — вертикальная координата центра масс. В существовании интеграла (1.8) уравнений (1.3), (1.5) нетрудно убедиться непосредственно с учетом (1.6) или (1.7).

Уравнения (1.5) имеют интеграл

$$\gamma^2 = 1 \tag{1.9}$$

В случае абсолютно гладкой плоскости уравнения движения допускают также интеграл площадей

$$(\theta\cdot\omega+\mathbf{k})\cdot\gamma=\text{const} \tag{1.10}$$

и, кроме того, если гиростат обладает динамической и геометрической симметрией вокруг оси x_3 и гиростатический момент $\mathbf{k}$ коллинеарен этой оси ($k_1=k_2=0$, $k_3=k$), интеграл

$$\omega_3=\text{const} \tag{1.11}$$

Здесь a_i обозначает проекцию на оси x_i некоторого вектора $\mathbf{a}$.

2. Рассмотрим устойчивость равномерного вращения корпуса гиростата вокруг оси x_3, расположенной вертикально, описываемого решением уравнений движения (1.3), (1.5)

$$\mathbf{v}=0, \quad \omega_1=\omega_2=\gamma_1=\gamma_2=0, \quad \omega_3=\omega, \quad \gamma_3=1 \tag{2.1}$$

Решение (2.1) с произвольной постоянной величиной ω имеет место в случае, когда гиростатический момент k направлен по оси x_3, т. е. $k_1=k_2=0$, $k_3=k$.

Для гиростата с гиростатическим моментом, неколлинеарном оси x_3, движение вида (2.1) возможно лишь при $\omega=0$ т. е. при равновесии корпуса

$$\mathbf{v}=0, \quad \omega_1=\omega_2=\omega_3=\gamma_1=\gamma_2=0, \quad \gamma_3=1 \tag{2.2}$$

В движениях (2.1) и (2.2), имеющих место как для гладкой, так и для шероховатой плоскостей, гиростат опирается на плоскость точкой P ($x_1=x_2=0$, $x_3=-l$), причем реакция $R=g\gamma$.

Движения (2.1) и (2.2) примем за невозмущенные и исследуем далее их устойчивость, полагая в возмущенном движении

$$\omega_3=\omega+\xi, \quad \gamma_3=1-\eta \tag{2.3}$$

и сохраняя прежние обозначения для остальных переменных. Если подставить (2.3) в уравнения (1.3), (1.5), то получим уравнения возмущенного движения, допускающие интегралы вида (1.8), (1.9), а также, в случае гладкой плоскости, интегралы (1.10) и (1.11) — последний в случае осесимметричного гиростата; во всех этих интегралах надо учесть обозначения (2.3). Этими интегралами воспользуемся для построения функций Ляпунова по методу Четаева, причем условия их определенной положительности будем получать из критерия Сильвестра для квадратичных членов. С учетом этого обстоятельства можно ограничиться рассмотрением уравнения опорной поверхности (1.1) в окрестности точки P лишь с точностью до малых второго порядка включительно

$$f(x_1,x_2,x_3)=-x_3-l+\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{l_1}+\frac{x_2^2}{l_2}\right)+\ldots=0 \tag{2.4}$$

Здесь и далее многоточие обозначает члены выше второго порядка малости, $l_i>0$ ($i=1,2$) — главные радиусы кривизны поверхности в точке P.

Согласно (1.2), имеем

$$\gamma_i=-x_i/l_i \quad {\scriptstyle(i=1,\,2)}, \quad \gamma_3=1-{}^1/_2(\gamma_1^2+\gamma_2^2) \tag{2.5}$$

откуда и из (2.4) выразим через γ_i координаты точки соприкосновения в возмущенном движении

$$x_i=-l_i\gamma_i \quad {\scriptstyle(i=1,\,2)}, \quad x_3=-l+{}^1/_2(l_1\gamma_1^2+l_2\gamma_2^2) \tag{2.6}$$

Сравнивая (2.3) и (2.5), видим, что возмущение переменной γ_3 равно $\eta={}^1/_2(\gamma_1^2+\gamma_2^2)$, т. е. представляет собою величину второго порядка малости, если γ_i ($i=1,2$) — малые первого порядка.

В силу (2.6) координата по оси ζ центра масс O гиростата с точностью до малых второго порядка включительно равна

$$\zeta_0=-\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\gamma}=l+{}^1/{}_2[(l_1-l)\gamma_1^2+(l_2-l)\gamma_2^2] \tag{2.7}$$

С учетом формулы (2.7) из интеграла энергии (1.8) на основании теоремы Ляпунова об устойчивости сразу получаем достаточные условия устойчивости

$$l_i>l \quad (i=1,\ 2) \tag{2.8}$$

положения равновесия (2.2) тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости по отношению к переменным $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$. Эти условия означают, что если центр масс гиростата находится ниже центров кривизны поверхности (1.1) для точки соприкосновения, то положение равновесия гиростата устойчиво. Физический смысл этих условий очевиден [4]. При изменении знака неравенства (2.8) или одного из них на противоположный положение равновесия одного твердого тела (при $k=0$) на плоскости будет неустойчиво согласно теореме Ляпунова об обращении теоремы Лагранжа.

Далее рассмотрим случай абсолютно гладкой плоскости, когда справедливо равенство (1.6).

Для гиростата с гиростатическим моментом $\mathbf{k}$, коллинеарном оси x_3, проекции вектора (1.4) на оси x_i равны

$$G_1=A_1\omega_1-F\omega_2,\quad G_2=A_2\omega_2-F\omega_1,\quad G_3=A_3\omega_3+k$$

где A_i — моменты инерции гиростата относительно осей x_i ($i=1, 2$), F — центробежный момент инерции для этих осей, A_3 — момент инерции корпуса относительно оси x_3.

Если составить уравнения возмущенного движения для (2.1), то характеристическое уравнение для уравнений первого приближения будет иметь вид

$$\lambda^3(\lambda^2+\omega^2)(a_0\lambda^4+a_1\lambda^2+a_2)=0 \tag{2.9}$$

$$a_0=A_1A_2-F^2,\qquad a_1=2(A_1A_2-F^2)\omega^2+(A_3\omega+k)^2-$$
$$-(A_1+A_2)(A_3\omega+k)\omega-Mg[A_1(l-l_1)+A_2(l-l_2)] \tag{2.10}$$
$$a_2=[(A_3-A_1)\omega^2+\omega k-Mg(l-l_1)][(A_3-A_2)\omega^2+\omega k-Mg(l-l_2)]-F^2\omega^4$$

Следовательно, устойчивость движения (2.1) возможна лишь в критическом по Ляпунову случае трех нулевых и трех пар чисто мнимых корней (в случае $\omega\neq0$) или пяти нулевых и двух пар чисто мнимых корней (в случае $\omega=0$) при условиях

$$a_1>0,\quad a_2>0,\quad a_1^2-4a_0a_2>0 \tag{2.11}$$

Неравенства (2.11) являются необходимыми условиями устойчивости движения (2.1).

Полагая в (2.11) $\omega=0$, получаем необходимые условия устойчивости равновесия (2.2) рассматриваемого гиростата

$$k^2-Mg[A_1(l-l_1)+A_2(l-l_2)]>0,\quad (l-l_1)(l-l_2)>0$$
$$k^2\{k^2-2Mg[A_1(l-l_1)+A_2(l-l_2)]\}+(Mg)^2\{[A_1(l-l_1)-A_2(l-l_2)]^2+$$
$$+4F^2(l-l_1)(l-l_2)\}>0 \tag{2.12}$$

При выполнении второго из этих условий и $k\neq0$ первое и третье будут также выполнены, если

$$k^2-2Mg[A_1(l-l_1)+A_2(l-l_2)]>0 \tag{2.13}$$

В случае $k=0$ неравенства (2.12) выполняются лишь при условиях (2.8). Отметим также, что неустойчивое в случае $l_1>l$, $l_2<l$ или $l_1<l$, $l_2>l$ положение равновесия не может быть стабилизировано вращением ротора с осью, коллинеарной оси x_3.

Перейдем к выводу достаточных условий устойчивости движения (2.1). С учетом (2.3), (2.5), (2.7) интегралы (1.8) и (1.10) для возмущенного по отношению к (2.1) движения имеют с точностью до малых второго порядка включительно вид

$$\begin{gathered}V_1=M\left(\frac{d\zeta_0}{dt}\right)^2+A_1\omega_1^2+A_2\omega_2^2-2F\omega_1\omega_2+A_3(\xi^2+2\omega\xi)+\\+Mg[(l_1-l)\gamma_1^2+(l_2-l)\gamma_2^2]+\ldots=\text{const}\\V_2=(A_1\omega_1-F\omega_2)\gamma_1+(A_2\omega_2-F\omega_1)\gamma_2+A_3\xi-{}^1/_2(A_3\omega+k)(\gamma_1^2+\gamma_2^2)+\ldots=\text{const}\end{gathered} \tag{2.14}$$

Рассмотрим линейную связку интегралов (2.14):

$$\begin{gathered}V=V_1-2\omega V_2=A_1\omega_1^2+A_2\omega_2^2-2F\omega_1\omega_2-2\omega[(A_1\omega_1-F\omega_2)\gamma_1+(A_2\omega_2-F\omega_1)\gamma_2]+\\+[Mg(l_1-l)+\omega(A_3\omega+k)]\gamma_1^2+[Mg(l_2-l)+\omega(A_3\omega+k)]\gamma_2^2+\\+M\left(\frac{d\zeta_0}{dt}\right)^2+A_3\xi^2+\ldots\end{gathered} \tag{2.15}$$

Условия определенной положительности функции (2.15) приводятся к неравенствам

$$\begin{gathered}(A_3-A_1)\omega^2+\omega k-Mg(l-l_1)>0\\[(A_3-A_1)\omega^2+\omega k-Mg(l-l_1)][(A_3-A_2)\omega^2+\omega k-Mg(l-l_2)]-F^2\omega^4>0\end{gathered} \tag{2.16}$$

Согласно теореме Ляпунова об устойчивости, неравенства (2.16) представляют собой достаточные условия устойчивости движения (2.1) гиростата по отношению к переменным $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $d\zeta_0/dt$. Отметим, что второе из достаточных условий (2.16) совпадает со вторым из необходимых условий (2.11), а остальные из неравенств (2.11) и (2.16) не совпадают.

В случае $F=0$ условия (2.16) приводятся к неравенствам

$$\begin{gathered}(A_3-A_1)\omega^2+\omega k-Mg(l-l_1)>0\\(A_3-A_2)\omega^2+\omega k-Mg(l-l_2)>0\end{gathered} \tag{2.17}$$

Допустим теперь, что рассматриваемый гиростат обладает динамической и геометрической симметрией относительно оси x_3, тогда $A_1=A_2$, $F=0$, $l_1=l_2$. Помимо интегралов (2.14) уравнения возмущенного движения допускают в этом случае также интеграл $V_3=\xi=\text{const}$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{gathered}V=V_1+2\lambda V_2-2A_3(\omega+\lambda)V_3=A_1(\omega_1^2+\omega_2^2)+2A_1\lambda(\omega_1\gamma_1+\omega_2\gamma_2)+\\+[Mg(l_1-l)-\lambda(A_3\omega+k)](\gamma_1^2+\gamma_2^2)+A_3\xi^2+M\left(\frac{d\xi_0}{dt}\right)^2+\ldots\end{gathered} \tag{2.18}$$

где λ — некоторая постоянная. Для определенной положительности квадратичной части функции (2.18) необходимо и достаточно выполнение условия $A_1\lambda^2+\lambda(A_3\omega+k)-Mg(l_1-l)<0$.

Этому условию возможно удовлетворить, если

$$(A_3\omega+k)^2+4A_1Mg(l_1-l)>0 \tag{2.19}$$

Таким образом, достаточным условием устойчивости движения (2.1) симметричного гиростата является неравенство (2.19). Легко видеть, что оно и необходимо. В самом деле, в данном случае необходимые условия устойчивости (2.11) принимают вид

$$\begin{gathered} A_1\omega^2+[(A_1-A_3)\omega-k]^2+2MgA_1(l_1-l)>0 \\ [(A_3-A_1)\omega^2+\omega k+Mg(l_1-l)]^2>0 \\ [(A_3-2A_1)\omega+k]^2[(A_3\omega+k)^2+4MgA_1(l_1-l)]>0 \end{gathered} \tag{2.20}$$

Третье из условий (2.20) сводится к неравенству (2.19), два первых условия (2.20) будут при этом удовлетворены.

В случае $k=0$ условие (2.19) принимает вид неравенства

$$A_3^2\omega^2+4A_1Mg(l_1-l)>0$$

аналогичного условию Майевского [5]. В частности, для твердого тела вращения, опирающегося острием ($l_1=0$) на горизонтальную плоскость (волчок), оно принимает вид $A_3\omega^2>4A_1Mgl$.

Так как для центра масс $A_1=A-Ml^2$, где A — момент инерции волчка для точки опоры, то для устойчивости вертикального вращения волчка требуется меньшая угловая скорость, чем для гироскопа, неподвижно закрепленного в точке P [4].

В случае $\omega=0$ условие (2.19) принимает вид

$$k^2+4MgA_1(l_1-l)>0 \tag{2.21}$$

Следовательно, неустойчивое при $l>l_1$ положение равновесия симметричного твердого тела стабилизируется вращением ротора с достаточно большой угловой скоростью вокруг оси x_3. Отметим, что условие (2.13) принимает вид (2.21) при $A_1=A_2$, $l_1=l_2$.

Исследуем теперь устойчивость равновесия (2.2) гиростата с гиростатическим моментом, коллинеарном оси x_1 ($k_1=k$, $k_2=k_3=0$). Характеристическое уравнение для него имеет вид

$$\begin{gathered} \lambda^5\{A_3(A_1A_2-F^2)\lambda^4+(A_1k^2+MgA_3[A_1(l_1-l)+ \\ +A_2(l_2-l)])\lambda^2+Mg(l_2-l)[k^2+MgA_3(l_1-l)]\}=0 \end{gathered} \tag{2.22}$$

Следовательно, устойчивость равновесия (2.2) рассматриваемого гиростата возможна лишь в критическом случае пяти нулевых и двух пар чисто мнимых корней, когда выполняются условия

$$\begin{gathered} A_1k^2+MgA_3[A_1(l_1-l)+A_2(l_2-l)]>0 \\ (l_2-l)[k^2+MgA_3(l_1-l)]>0 \\ \{A_1k^2+MgA_3[A_1(l_1-l)+A_2(l_2-l)]\}^2- \\ -4(A_1A_2-F^2)A_3Mg(l_2-l)[k^2+MgA_3(l_1-l)]>0 \end{gathered} \tag{2.23}$$

При изменении знака на противоположный хотя бы в одном из этих неравенств положение равновесия (2.2) будет неустойчиво.

Найдем достаточные условия устойчивости. Для возмущенного по отношению к (2.2) движения рассматриваемого гиростата первый из интегралов (2.14) сохраняет свой вид (при $\omega=0$), а второй принимает вид

$$V_2=(A_1\omega_1-F\omega_2+k)\gamma_1+(A_2\omega_2-F\omega_1)\gamma_2+A_3\xi+\ldots=\text{const}$$

Рассмотрим функцию

$$V=V_1+\lambda V_2^2=M\left(\frac{d\zeta_0}{dt}\right)^2+A_1\omega_1^2+A_2\omega_2^2-2F\omega_1\omega_2+A_3(1+\lambda A_3)\xi^2+$$
$$+2A_3\lambda k\xi\gamma_1+[Mg(l_1-l)+\lambda k^2]\gamma_1^2+Mg(l_2-l)\gamma_2^2+\ldots \qquad (2.24)$$

Условия определенной положительности функции (2.24) имеют вид неравенств $1+\lambda A_3>0$, $l_2>l$, $\lambda[k^2+MgA_3(l_1-l)]+Mg(l_1-l)>0$. Очевидно, эти условия могут быть удовлетворены надлежащим выбором постоянного $\lambda>0$, если

$$l_2>l,\ k^2+MgA_3(l_1-l)>0 \qquad (2.25)$$

Неравенства (2.25) представляют собой достаточные условия устойчивости равновесия (2.2) гиростата с ротором, ось которого параллельна оси x_1, по отношению к переменным ω_i, γ_i ($i=1, 2, 3$) и $d\zeta_0/dt$. Сравнивая их с необходимыми условиями устойчивости (2.23), видим, что при изменении знака на противоположный в одном из неравенств (2.25) равновесие будет неустойчивым. Условия (2.25) обобщают условия устойчивости гироскопа Жерва [1]. При выполнении условий (2.25) неустойчивое в случае $l_1<l$, $l_2>l$ положение равновесия твердого тела стабилизируется вращением ротора, ось которого коллинеарна направлению той главной кривизны, которая обусловливает неустойчивость. Напомним, что вращение ротора с осью, коллинеарной оси x_3, не может стабилизировать такое неустойчивое положение равновесия. Наконец, сопоставляя условия (2.25) и (2.19), заключаем, что для стабилизации равновесия рассматриваемого гиростата требуется, при прочих равных условиях, вдвое меньшая величина гиростатического момента k, чем для симметричного гиростата [1].

3. Перейдем к рассмотрению движения тяжелого гиростата с гиростатическим моментом, коллинеарном оси x_3, по абсолютно шероховатой плоскости, когда выполняется условие (1.7). Из первого уравнения (1.3) с учетом условия (1.7) найдем выражение для реакции $\mathbf{R}$ плоскости и подставим во второе уравнение (1.3). Проектируя полученное уравнение на оси x_i, получаем следующие уравнения:

$$A_1\omega_1^{\cdot}-F\omega_2^{\cdot}+\omega_2(A_3\omega_3+k)-\omega_3(A_2\omega_2-F\omega_1)=M[(x_1^{\cdot}+\omega_2x_3-\omega_3x_2)(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})-$$
$$-\omega_1^{\cdot}\mathbf{r}^2-\omega_1(\mathbf{r}^{\cdot}\cdot\mathbf{r})+x_1(\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\cdot\mathbf{r})+g(x_2\gamma_3-x_3\gamma_2)]$$
$$(3.1)$$
$$A_2\omega_2^{\cdot}-F\omega_1^{\cdot}+\omega_3(A_1\omega_1-F\omega_2)-\omega_1(A_3\omega_3+k)=M[(x_2^{\cdot}+\omega_3x_1-\omega_1x_3)(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})-$$
$$-\omega_2^{\cdot}\mathbf{r}^2-\omega_2(\mathbf{r}^{\cdot}\cdot\mathbf{r})+x_2(\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\cdot\mathbf{r})+g(x_3\gamma_1-x_1\gamma_3)]$$
$$A_3\omega_3^{\cdot}+\omega_1(A_2\omega_2-F\omega_1)-\omega_2(A_1\omega_1-F\omega_2)=M[(x_3^{\cdot}+\omega_1x_2-\omega_2x_1)(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})-$$
$$-\omega_3^{\cdot}\mathbf{r}^2-\omega_3(\mathbf{r}^{\cdot}\cdot\mathbf{r})+x_3(\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\cdot\mathbf{r})+g(x_1\gamma_2-x_2\gamma_1)]$$

которые вместе с тремя скалярными уравнениями, эквивалентными векторному уравнению (1.5), образуют с учетом уравнения (1.2) полную систему уравнений движения тяжелого гиростата по абсолютно шероховатой плоскости.

Уравнения (3.1), (1.5) допускают решение (2.1) при произвольной по величине и направлению постоянной угловой скорости ω. Это решение примем за невозмущенное и исследуем его устойчивость. Уравнения возмущенного движения получаются из уравнений (3.1) и (1.5) подстановкой

(2.3). Из уравнений возмущенного движения нетрудно видеть, что их можно разрешить относительно производных от неизвестных и представить в нормальной форме, причем нелинейные члены уравнений возмущенного движения уничтожаются при $\omega_1=\omega_2=\gamma_1=\gamma_2=0$.

Рассмотрим уравнения первого приближения для уравнений возмущенного движения

$$A\omega_1^{\cdot}-F\omega_2^{\cdot}+\omega_2[(A_3-B)\omega+k]+F\omega\omega_1-M\omega ll_1\gamma_1^{\cdot}+M[\omega^2ll_2-g(l-l_2)]\gamma_2=0$$

$$B\omega_2^{\cdot}-F\omega_1^{\cdot}+\omega_1[(A-A_3)\omega-k]-F\omega\omega_2-M\omega ll_2\gamma_2^{\cdot}-M[\omega^2ll_1-g(l-l_1)]\gamma_1=0 \qquad (3.2)$$

$$\gamma_1^{\cdot}=\omega\gamma_2-\omega_2,\qquad \gamma_2^{\cdot}=\omega_1-\omega\gamma_1,\qquad \xi^{\cdot}=0,\qquad \eta^{\cdot}=0$$

где введены обозначения

$$A=A_1+Ml^2,\qquad B=A_2+Ml^2$$

Составим характеристическое уравнение для уравнений (3.2)

$$\lambda^2(a_0\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4)=0 \qquad (3.3)$$

$$a_0=AB-F^2,\qquad a_1=F\omega l(l_1-l_2)M,\qquad a_3=a_1\omega^2$$

$$a_2=[A(A_3-A)+B(A_3-B)+Ml(Al_1+Bl_2)-2F^2]\omega^2+\omega k(A+B)-$$
$$-Mg[A(l-l_1)+B(l-l_2)]+[(A+B-A_3)\omega-k]^2-$$
$$-M\omega l(l_1+l_2)[(A+B-A_3)\omega-k]+M^2\omega^2l^2l_1l_2 \qquad (3.4)$$

$$a_4=[(A_3-A)\omega^2+\omega k+Mll_1\omega^2-Mg(l-l_1)][(A_3-B)\omega^2+\omega k+$$
$$+Mll_2\omega^2-Mg(l-l_2)]-F^2\omega^4$$

Отметим, что в отличие от характеристического уравнения (2.9) для тяжелого гиростата на абсолютно гладкой плоскости уравнение (3.3) содержит в общем случае как четные, так и нечетные степени λ, так что кроме нулевых корней уравнение (3.3) может иметь только корни с $\operatorname{Re}\lambda<0$. Если же

$$F=0\quad\text{или}\quad l_1=l_2 \qquad (3.5)$$

то $a_1=a_3=0$ и полином (3.3) имеет лишь четные степени λ; в этом случае, как и в случае абсолютно гладкой плоскости, устойчивость движения (2.1) возможна лишь в критическом случае нулевых и чисто мнимых корней.

Предположим, что равенства (3.5) места не имеют. Тогда при условиях

$$a_1>0,\quad a_4>0,\quad a_1a_2a_3-a_1^2a_4-a_0a_3^2>0 \qquad (3.6)$$

кроме двух нулевых корней остальные корни полинома (3.3) будут иметь отрицательные вещественные части. В этом случае выполняются все условия теоремы Ляпунова — Малкина [6], согласно которой невозмущенное движение (2.1) устойчиво по всем переменным ω_i, γ_i ($i=1, 2, 3$) и асимптотически устойчиво по отношению к переменным ω_s, γ_s ($s=1, 2$). Из асимптотической устойчивости по γ_s следует асимптотическая устойчивость и по γ_3 в силу интеграла (1.9). При изменении знака хотя бы одного из неравенств (3.6) на противоположный движение (2.1) будет неустойчиво согласно теореме Ляпунова о неустойчивости по первому приближению [5].

Подчеркнем, что при условиях (3.6) имеет место асимптотическая устойчивость по части переменных для консервативной системы, на которую не действуют внешние диссипативные силы. Асимптотическая устойчивость по части переменных здесь обусловлена неголономностью связи, причем такой «диссипативный эффект» связи для данного гиростата зависит от направления вращения корпуса гиростата. В самом деле, первое из неравенств (3.6) с учетом (3.4) не зависит от гиростатического момента и выполняется лишь при условии

$$\operatorname{sign}\omega = \operatorname{sign}[F(l_1 - l_2)] \tag{3.7}$$

т. е. направление устойчивого вращения обусловливается формой поверхности корпуса гиростата в точке контакта и распределением его масс. Вращение в противоположном направлении, когда условие (3.7) не выполняется, будет неустойчиво.

Отметим, что так как $F = (A_{11} - A_{22})\sin\alpha\cos\alpha$ (где $0 < \alpha < \pi/2$ — угол между осью x_1 и главной осью инерции x, A_{ii} — моменты инерции относительно главных осей инерции x $(i=1)$ и y $(i=2)$), то условие (3.7) можно переписать в виде

$$\operatorname{sign}\omega = \operatorname{sign}[(A_{11} - A_{22})(l_1 - l_2)\sin\alpha\cos\alpha] \tag{3.8}$$

Из (3.8) видно, что в случае устойчивости главная ось инерции (меньшая или большая) оказывается впереди соответствующей (меньшей или большей) оси главных кривизн [7].

Два других условия (3.6) накладывают ограничения на величины ω и k в устойчивом движении. При $k=0$ условия (3.6) с учетом (3.4) принимают вид неравенств, впервые установленных Герглотцем [2] как необходимые условия устойчивости вращения «кельтского камня»; согласно теореме Ляпунова — Малкина, они являются и достаточными для устойчивости «кельтского камня».

Если выполнены условия (3.5) или одно из них, то необходимые условия устойчивости движения (2.1) принимают вид

$$a_2 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_2^2 - 4a_0 a_4 > 0 \tag{3.9}$$

Для случая равновесия (2.2), когда $\omega=0$, коэффициенты a_1, a_3 также уничтожаются и необходимые условия устойчивости (3.9), как нетрудно видеть, принимают вид неравенств (2.12) с заменой в последних A_1 и A_2 на A и B соответственно. В случае $k=0$ эти неравенства выполняются лишь при условиях (2.8), которые, стало быть, и в случае абсолютно шероховатой плоскости необходимы и достаточны для устойчивости равновесия тяжелого твердого тела.

4. Исследуем движение по гладкой горизонтальной плоскости тяжелого гиростата, обладающего геометрической и динамической симметрией вокруг оси x_3, ротор которого вращается вокруг этой оси с заданной относительной угловой скоростью $\dot\alpha = \dot\alpha(t)$, где α — угол поворота ротора относительно корпуса.

Принимая за лагранжевы координаты q_i гиростата углы Эйлера θ, ψ и φ его корпуса и угол α поворота ротора, запишем уравнения движения в виде уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad {\scriptstyle (i=1,2,3,4)} \tag{4.1}$$

где функция Лагранжа

$$L = {}^1\!/_2\{(A_1 + Mf'^2(\theta))\dot\theta^2 + A_1\dot\psi^2\sin^2\theta +$$
$$+ A_3(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)^2 + 2I\dot\alpha(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) + I\dot\alpha^2\} - Mgf(\theta)$$

Здесь A_1 и A_3 — экваториальный и осевой моменты инерции гиростата, I — осевой момент инерции ротора, $\zeta = f(\theta)$ — высота центра масс гиростата над горизонтальной плоскостью, причем $f(\theta)$ — известная функция, определяемая формой поверхности вращения вокруг оси x_3, ограничивающей корпус, $f'(\theta)=df/d\theta$.

Горизонтальные координаты центра масс без уменьшения общности приняты постоянными $\xi=\text{const}$, $\eta=\text{const}$. Непотенциальные обобщенные силы $Q_s=0$ $(s=1, 2, 3)$, Q_4 — заданная интегрируемая функция времени, такая, что гиростатический момент $k=I\alpha^\cdot(t)$ будет заданной непрерывной функцией времени и величины $\omega_3=\varphi^\cdot+\psi^\cdot\cos\theta$:

$$k=\int\limits_{t_0}^{t} Q_4(t)\,dt-I\omega_3 \tag{4.2}$$

Координаты ψ и φ являются циклическими. Первой из них отвечает интеграл площадей (1.10), имеющий в рассматриваемых переменных вид

$$\partial L/\partial\psi^\cdot=A_1\psi^\cdot\sin^2\theta+A_3(\varphi^\cdot+\psi^\cdot\cos\theta)\cos\theta+I\alpha^\cdot\cos\theta=G_\zeta=\text{const} \tag{4.3}$$

а второй — интеграл постоянства проекции момента количеств движения на ось симметрии

$$\partial L/\partial\varphi^\cdot=A_3(\varphi^\cdot+\psi^\cdot\cos\theta)+I\alpha^\cdot=H=\text{const} \tag{4.4}$$

Если умножить уравнения (4.1) на $q_i^\cdot$ и просуммировать по $i=1,\ldots,4$, то получим уравнение энергии

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial L}{\partial q_i^\cdot}q_i^\cdot-L\right)=Q_4\alpha^\cdot$$

из которого с учетом уравнений (4.2) и (4.4) получаем интеграл энергии вида

$$[A_1+Mf'^2(\theta)]\theta^{\cdot 2}+A_1\psi^{\cdot 2}\sin^2\theta+2Mgf(\theta)=h=\text{const} \tag{4.5}$$

Исключая из уравнений (4.5) и (4.3) переменную

$$\psi^\cdot=(\beta-bH\cos\theta)/\sin^2\theta \tag{4.6}$$

получим уравнение

$$(d\theta/dt)^2[1+cf'^2(\theta)]\sin^2\theta=[\alpha^*-af(\theta)]\sin^2\theta-(\beta-bH\cos\theta)^2\equiv\Phi(\theta)$$
$$\alpha^*=h/A_1,\quad \beta=G_\zeta/A_1,\quad a=2Mg/A_1,\quad b=1/A_1,\quad c=M/A_1 \tag{4.7}$$

Уравнение (4.7) совпадает с уравнением (8) ([8], стр. 213), описывающим движение тела вращения по горизонтальной плоскости. После его интегрирования переменные ψ и φ найдутся квадратурами из уравнений (4.6) и

$$\varphi^\cdot=\left(H-\int\limits_{t_0}^{t}Q_4(t)\,dt\right)(A_3-I)^{-1}-\psi^\cdot\cos\theta \tag{4.8}$$

Следовательно, движение по плоскости гиростата с переменным гиростатическим моментом отличается от движения твердого тела по плоскости только характером вращения корпуса вокруг оси x_3.

При движении гиростата угол нутации θ колеблется между двумя вещественными корнями θ_1 и θ_2 полинома $\Phi(\theta)$. В частности, если эти корни совпадают $\theta_1=\theta_2$, то угол нутации будет оставаться постоянным $\theta=\theta_0$, как и величина угловой скорости прецессии $\psi^\cdot=\psi_0^\cdot$, определяемая формулой (4.6), а угловая скорость собственного вращения (4.8) будет переменной. Такое движение будет отличаться от регулярной прецессии лишь переменностью $\varphi^{\cdot}$, в связи с чем его естественно назвать квазирегулярной прецессией.

Квазирегулярная прецессия

$$\theta=\theta_0,\ \theta^{\cdot}=0,\ \psi^{\cdot}=\psi_0^{\cdot},\ H=H_0 \tag{4.9}$$

имеет место при условии

$$(H_0-A_1\psi_0^{\cdot}\cos\theta_0)\psi_0^{\cdot}\sin\theta_0+Mgf'(\theta_0)=0. \tag{4.10}$$

Если в возмущенном движении положить $\psi^{\cdot}=\psi_0^{\cdot}+\xi$, $\theta=\theta_0+\eta$, $\theta^{\cdot}=\eta^{\cdot}$, $H=H_0+\zeta$ и подставить эти величины в интегралы (4.5), (4.3) и (4.4), то получим интегралы уравнений возмущенного движения $V_i=\mathrm{const}$ ($i=1, 2, 3$).

Рассмотрением функции Ляпунова

$$\begin{gathered}V=V_1+2\psi_0^{\cdot}(V_3\cos\theta_0-V_2)+\lambda V_3^2=[A_1+Mf'^2(\theta_0)]\eta^{\cdot 2}+\\+[H_0\psi_0^{\cdot}\cos\theta_0-A_1\psi_0^{\cdot 2}(\cos^2\theta_0-\sin^2\theta_0)+\\+Mgf''(\theta_0)]\eta^2+2\psi_0^{\cdot}\sin\theta_0\eta\zeta+\lambda\zeta^2+A_1\xi^2\sin^2\theta_0+\ldots\end{gathered} \tag{4.11}$$

где λ — некоторая положительная постоянная, легко находим при $\theta_0\neq 0, \pi$ достаточное условие устойчивости

$$H_0\psi_0^{\cdot}\cos\theta_0-A_1\psi_0^{\cdot 2}(\cos^2\theta_0-\sin^2\theta_0)+Mgf''(\theta_0)>0 \tag{4.12}$$

движения (4.9) по отношению к переменным θ, $\theta^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, H. С учетом (4.10) условие (4.12) приводится к неравенству

$$A_1\psi_0^{\cdot 2}\sin^2\theta_0+Mg[f''(\theta_0)-f'(\theta_0)\operatorname{ctg}\theta_0]>0$$

Поступила 3 I 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гиростатов некоторого вида. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
2. *Herglotz G.* Vorlesung über Analytische Mechanik. Göttingen, 1941.
3. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. 2. М., Гостехтеоретиздат, 1948.
4. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применения, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
5. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., Гостехтеоретиздат, 1955.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
7. *Магнус К.* Гироскоп. М., «Мир», 1974.
8. *Аппель П.* Теоретическая механика, т. 2. М., Физматгиз, 1960.