МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1980

УДК 539.37

# МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ОТ ЗАДАННЫХ НЕСОВМЕСТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

С. Е. БУГАЕНКО

Метод моделирования напряжений с выполнением предварительного «замораживания» деформаций в элементах модели и последующего «размораживания» всей модели известен [1] и используется уже длительное время. Его идея заключается в том, что модель составляют из элементов (монолитное соединение осуществляют склеиванием), в которых созданы и заморожены (зафиксированы) деформации, равные по величине и противоположные по знаку заданным; при последующем нагреве всей модели происходит размораживание этих деформаций, сопровождающееся возникновением в модели искомых напряжений и деформаций. При охлаждении модели до комнатной температуры эти деформации замораживаются и напряжения в модели определяют обычными приемами поляризационно-оптического метода.

Основное применение метод получил при моделировании термоупругих напряжений [2] и при создании затяга резьбовых соединений [3], имеются указания на возможность моделирования этим методом упругопластических задач [4], задач о посадке с натягом и некоторых других. Однако широкому практическому использованию метода препятствует то обстоятельство, что материал моделей в высокоэластическом состоянии (при температуре замораживания) практически несжимаем, и поэтому в элементах не могут быть созданы и заморожены дилатационные деформации. В связи с этим и из-за отсутствия теоретического обоснования метода до настоящего времени не ясны практические возможности метода и отсутствует эффективный алгоритм его реализации. Решенные к настоящему времени этим методом термоупругие задачи могут рассматриваться как примеры, где удалось в конкретных частных случаях подобрать подходящие девиаторные деформации взамен дилатационных.

Ниже дано исчерпывающее решение этих вопросов на базе аппарата теории упругости, развитого для задач при заданных несовместных деформациях.

1. Пусть $\mathbf{e}$ — тензор заданной (несовместной) деформации. Будем использовать представление

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma})+\mathbf{e} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma})$ — тензор, соответствующий той части тензора полной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, которая однозначно определяется по тензору напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ при помощи обобщенного закона Гука, при этом $\mathbf{r}(0)=0$.

Обозначим через $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$ векторы перемещения и поворота соответственно, при этом $\boldsymbol{\varepsilon}=\operatorname{def}\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\omega}=2^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{u}$. Пусть рассматриваемое тело $V$ поверхностно-$(N+1)$-связно. Введем в рассмотрение операторы Ink, $M_k$, $\mathrm{Mul}_k$ $(k=1, 2, \ldots, N)$. Оператор «несовместности» Ink, как известно [5], обладает свойством аннулировать всякий тензор $\boldsymbol{\varepsilon}=\operatorname{def}\mathbf{u}$. Операторы «многозначности»

$$M_k\boldsymbol{\varepsilon}\equiv\oint_{L_k}\operatorname{rot}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot d\mathbf{x},\quad \mathrm{Mul}_k\boldsymbol{\varepsilon}\equiv\oint_{L_k}(\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{x}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{\varepsilon})\cdot d\mathbf{x}\quad (k=1,2,\ldots,N) \tag{1.2}$$

являются циклическими интегралами [5]; их равенства нулю есть необходимые и достаточные условия однозначности векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{u}$ в поверхностно-$(N+1)$-связном теле. Интегрирование в (1.2) проводится по любой кривой из класса $L_k$ простых замкнутых кривых, не стягиваемых в точку и охватывающих только $k$-ю полость.

2. Пусть тело $V$ свободно от закреплений и действия внешних силовых факторов и его начальное состояние естественно. Обозначим через $\mathbf{n}$ внешнюю нормаль к границе $\Gamma$ тела. Сформулируем задачу в напряжениях. При заданном поле тензора $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ найти поля тензоров $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ и вектора $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{gathered}
\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})=0, \quad \mathbf{x}\in V\setminus\Gamma, \quad \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})=0, \quad \mathbf{x}\in\Gamma \\
\operatorname{Ink}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})=0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})=\operatorname{def}\mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in V \\
M_k\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})=0, \quad \operatorname{Mul}_k\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})=0, \quad \mathbf{x}\in V \quad {\scriptstyle (k=1,\,2,\,\ldots,\,N)} \\
\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma},\mathbf{e}\in C^2(V), \quad \mathbf{u}\in C^3(V)
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Из теоремы единственности для этой задачи может быть получена [6] следующая *теорема* (эквивалентности).

Для тождественного равенства напряжений в решениях двух задач (2.1) для данного поверхностно-$(N+1)$-связного тела $V$ необходимо и достаточно, чтобы поля тензоров $\mathbf{e}'$ и $\mathbf{e}$ заданных деформаций удовлетворяли условиям

$$\begin{gathered}
\operatorname{Ink}(\mathbf{e}'-\mathbf{e})=0, \quad \mathbf{x}\in V \\
M_k(\mathbf{e}'-\mathbf{e})=0, \quad \operatorname{Mul}_k(\mathbf{e}'-\mathbf{e})=0, \quad \mathbf{x}\in V \quad {\scriptstyle (k=1,\,2,\,\ldots,\,N)}
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Два поля заданных деформаций $\mathbf{e}'$ и $\mathbf{e}$ будем называть эквивалентными по напряжениям, если их разность $\boldsymbol{\eta}=\mathbf{e}'-\mathbf{e}$ удовлетворяет условиям (2.2).

Легко убедиться, что для всякого поля шарового тензора $\mathbf{e}$ найдется эквивалентное ему по напряжениям поле тензора-девиатора $\mathbf{e}'$. Для этого достаточно рассмотреть представление (1.1) как решение задачи термоупругости для несжимаемого материала. Известно [7], что решение такой задачи существует. Тогда в (1.1) $\mathbf{e}$ — шаровой тензор, $\mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma})$ — тензор-девиатор, и так как в силу (2.1) $\boldsymbol{\varepsilon}$ удовлетворяет условиям (2.2), то $(-\mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}))$ и $\mathbf{e}$ эквивалентны по напряжениям.

3. Пусть заданный тензор $\mathbf{e}$ имеет отличную от нуля шаровую часть $\mathbf{g}e^\circ$ ($\mathbf{g}$ — единичный тензор). Найдем тензор-девиатор $\mathbf{e}'$, эквивалентный заданному по напряжениям.

Пусть тензор $\boldsymbol{\eta}=\mathbf{e}'-\mathbf{e}$ удовлетворяет условиям (2.2). Представим его в виде суммы $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^*+\mathbf{g}\eta^\circ$ девиаторной и шаровой частей, и положим $\eta^\circ=-e^\circ$. Тогда задача сводится к восстановлению тензора $\boldsymbol{\eta}$ по его шаровой части. В силу выполнения для него условий (2.2) решением является однозначный вектор $\mathbf{u}^\circ$, такой, что $\boldsymbol{\eta}=\operatorname{def}\mathbf{u}^\circ$. Он определяется из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{u}^\circ=3\eta^\circ$ через скалярный потенциал, что приводит к частному решению в виде потенциала объемных масс. Принимая во внимание, что $\eta^\circ=-e^\circ$, для компонент тензора $\boldsymbol{\eta}$ получаем выражение

$$\eta_{ij}(\mathbf{x})=\frac{3}{4\pi}\nabla_i\nabla_j\iiint\limits_V\frac{e^\circ(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}dV_{\mathbf{y}} \tag{3.1}$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — вектор-радиусы точек соответственно текущей и интегрирования, $\nabla_i$ — оператор ковариантного дифференцирования по координате $x^i$.

Определяемое выражением (3.1) тензорное поле $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям (2.2). Действительно, $\operatorname{Ink}\boldsymbol{\eta}=0$, так как $\boldsymbol{\eta}=\operatorname{def}\mathbf{u}^\circ$; $M_k\boldsymbol{\eta}=0$ ($k=1,2,\ldots,N$) в силу определения (1.2), так как $\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}=0$, что легко проверяется непосредственно; $\mathrm{Mul}_k\,\eta=0$ $(k=1,2,\ldots,N)$, так как потенциал объемных масс и его частные производные первого порядка являются функциями непрерывными и конечными во всем пространстве [8], и поэтому может быть применена формула Стокса.

Эквивалентное по напряжениям заданному полю тензора $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ искомое поле тензора-девиатора $\mathbf{e}'(\mathbf{x})$ представляется в виде

$$\mathbf{e}'(\mathbf{x})=\mathbf{e}(\mathbf{x})+\eta(\mathbf{x}) \tag{3.2}$$

где $\eta(\mathbf{x})$ определяется выражением (3.1). Следует заметить, что представление (3.1) для $\eta$ не является единственным и получено с точностью до совместного тензора-девиатора. Кроме того, в частных случаях и при симметрии поля заданного тензора выражение для $\eta$ может упрощаться по сравнению с (3.1). В плоском случае, как известно, потенциал объемных масс в (3.1) должен быть заменен на логарифмический.

На основании полученных выше результатов можно заключить, что рассматриваемый метод моделирования напряжений не имеет принципиальных ограничений, связанных с несжимаемостью материала модели в высокоэластическом состоянии.

Для реализации метода в элементах модели следует создавать и замораживать не заданные $\mathbf{e}(\mathbf{x})$, а эквивалентные им по напряжениям деформации $\mathbf{e}'(\mathbf{x})$, определяемые по формуле (3.2).

*Рассмотрим пример.* Пусть тело $V$ находится под действием одномерного поля теплового расширения $\alpha T=\mathrm{A}(x^1)\equiv\mathrm{A}^{(1)}$, где $\alpha$ — коэффициент теплового расширения материала, $T$ — температура. Тогда $e_{ij}(x^1)=g_{ij}\mathrm{A}^{(1)}$ и соответственно $e^\circ(x^1)=\mathrm{A}^{(1)}$. В данном случае вместо использования формулы (3.1) проще непосредственно найти частное решение уравнения $\operatorname{div}\mathbf{u}^\circ=-3\mathrm{A}^{(1)}$. Будем искать решение в форме $\mathbf{u}^\circ=\operatorname{grad}\varphi(x^1)$. Тогда

$$\varphi=-3\int dx^1\int A^{(1)}\,dx^1,\qquad \eta_{ij}=-3g_{i1}g_{j1}A^{(1)}$$

В соответствии с (3.2) получаем $e_{ij}'=(g_{ij}-3g_{i1}g_{j1})\mathrm{A}^{(1)}$, т. е. $e_{11}'=-2\mathrm{A}^{(1)}$, $e_{22}'=e_{33}'=\mathrm{A}^{(1)}$, $e_{ij}'=0$ $(i\neq j)$, что совпадает с результатом [9], полученным другим способом.

Поступила 1 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА


1. *Варданян Г. С., Пригоровский Н. И.* Моделирование термоупругих напряжений в поляризационно-оптическом методе. Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1962, № 4.
2. Метод фотоупругости, т. 3. (Под ред. Г. Л. Хесина). М., Стройиздат, 1975.
3. *Бугаенко С. Е.* Моделирование в замораживаемых моделях затяга резьбовых соединений. Машиноведение, 1970, № 1.
4. *Ахметзянов М. X.* Методика поляризационно-оптического исследования задач пластичности и ползучести на упругих моделях. Тр. V Всес. конф. по поляризационно-оптическому методу исследования напряжений. Изд-во ЛГУ, 1966.
5. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
6. *Бугаенко С. Е.* Задачи с дополнительными деформациями и их моделирование. Прикл. механ., 1978, т. 14, № 9.
7. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М., «Мир», 1974.
8. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.— Л., Гостехиздат, 1946.
9. *Пригоровский Н. И., Бронов В. М., Бугаенко С. Е.* Механическое моделирование температурных напряжений в конструкциях. Тр. VII Всес. конф. по поляризационно-оптическому методу исследования напряжений, т. 3. Таллин, Изд-во АН ЭССР, 1971.