МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1980

УДК 539.376+532.135

СМЕШАННОЕ ВАРИАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК ИЗ НЕЛИНЕЙНОГО НАСЛЕДСТВЕННО-СТАРЕЮЩЕГО МАТЕРИАЛА

М. А. ЗАДОЯН

(Ереван)

Формулируется вариационный принцип для пластин и оболочек из нелинейного наследственно-стареющего материала с учетом нелинейно-мгновенных деформаций, основанный на одновременном варьировании параметров деформаций и внутренних сил. Приближенные соотношения между параметрами деформаций и внутренних сил выводятся при помощи потенциалов пластичности и ползучести.

1. Совместный изгиб и растяжение призматического стержня. Рассмотрим призматический стержень, материал которого в одноосном напряженном состоянии описывается соотношением Н. Х. Арутюняна [1], обобщенным в [2–4] для учета нелинейно-мгновенных деформаций

$$\varepsilon=\psi(\sigma)+\int_{\tau_1}^{t} f(\sigma)K(t,\tau)\,d\tau \tag{1.1}$$

Здесь $\psi(\sigma)$ и $f(\sigma)$ подбираются из экспериментальных данных, $K(t, \tau)$ — ядро ползучести, учитывающее старение материала при постоянном во времени модуле мгновенной деформации, τ_1 — возраст материала.

В дальнейшем принимается

$$\psi(\sigma)=\mu_1\sigma-\mu_n\sigma^n, \qquad f(\sigma)=\beta_1\sigma+\beta_m\sigma^m \tag{1.2}$$

где μ_i, β_i, n, m — положительные параметры, численные значения которых определяются из экспериментальных данных. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что соотношения (1.1), (1.2) хорошо описывают напряженно-деформационное состояние в бетонных и полимерных элементах [1–6].

Пусть стержень находится под совместным воздействием изгибающих моментов M и осевых растягивающих сил T, приложенных на торцевых сечениях. Поперечное сечение, для простоты, принимаем прямоугольным с высотой h и шириной, равной единице. Сначала рассмотрим случай чистого изгиба ($T=0$). Следуя методу, изложенному в [7], принимаем линейный закон распределения деформаций и напряжений по высоте сечения

$$\varepsilon=\varkappa z, \qquad \sigma=\gamma z \tag{1.3}$$

где параметры $\varkappa$ и γ определяются из смешанного вариационного уравнения. Для нелинейно наследственно-ползучей среды обобщенное вариационное уравнение Рейсснера получено в [8], которое в данной задаче при учете нелинейно-мгновенных деформаций будет иметь вид

$$\delta\left\{\int_{-h/2}^{h/2}\left[\varepsilon\sigma-\int_0^\sigma\psi(\sigma)\,d\sigma-\sigma\int_{\tau_1}^t f(\sigma)K(t,\tau)\,d\tau\right]dz-M\varkappa\right\}=0 \qquad (1.4)$$

Производя варьирование ε и σ, используя допущение (1.2), (1.3), приходим к значению $\gamma=12M/h^3$ и к зависимости между кривизной и моментом

$$\varkappa=a_1M-a_nM^n+\int_{\tau_1}^t(b_1M+b_mM^m)K(t,\tau)\,d\tau$$

$$a_n=\frac{6^{n+1}\mu_n}{(n+2)\,h^{2n+1}},\qquad b_m=\frac{6^{m+1}\beta_m}{(m+2)\,h^{2m+1}} \qquad (1.5)$$

В случае только осевого растяжения ($M=0$) имеем $\varepsilon=e$, $\sigma=T/h$ и соотношение между удлинением и продольной силой будет

$$e=\frac{\mu_1}{h}T-\frac{\mu_n}{h^n}T^n+\int_{\tau_1}^t\left(\frac{\beta_1}{h}T+\frac{\beta_m}{h^m}T^m\right)K(t,\tau)\,d\tau \qquad (1.6)$$

При совместном действии M и T принимаем

$$\varepsilon=e+\varkappa z,\qquad \sigma=T/h+12Mz/h^3 \qquad (1.7)$$

Вводя матрицы параметров деформации $\omega=(e,\ \varkappa)$ и внутренних сил $Q=(T,\ M)$, физические соотношения при совместном изгибе и растяжении ищем через две потенциальные функции Φ и X

$$\omega=\frac{\partial\Phi}{\partial Q}+\int_{\tau_1}^t\frac{\partial X}{\partial Q}K(t,\tau)\,d\tau \qquad (1.8)$$

Здесь в подынтегральном выражении X и Q — функции от τ.

Потенциальные функции приближенно зададим в виде выражения

$$\Phi=\frac{a_1}{2}R_1^2-\frac{a_n}{n+1}R_n^{n+1},\qquad X=\frac{b_1}{2}R_1^2+\frac{b_m}{m+1}R_m^{m+1}$$

$$R_n=\sqrt{M^2+\lambda_n^2T^2} \qquad (1.9)$$

где λ_n — постоянный параметр. Соотношения (1.8), (1.9) при $T=0$ совпадают с зависимостью (1.5) при чистом изгибе. Для того чтобы эти соотношения совпадали с (1.6) при одноосном растяжении, следует принять

$$\lambda_n=(n+2)^{1/n+1}h/6 \qquad (1.10)$$

Таким образом, вводя матричные обозначения для коэффициентов $A_n=(a_n\lambda_n^2,\ a_n)$, $B_n=(b_n\lambda_n^2,\ b_n)$ и для функций $\Psi(x)=A_1-A_nx^{n-1}$, $F(x)=B_1+B_mx^{m-1}$ получим соотношение между параметрами деформаций и внутренних сил при совместном изгибе и растяжении

$$\omega=\Psi(R_n)Q+\int_{\tau_1}^t F(R_n)QK(t,\tau)\,d\tau \qquad (1.11)$$

Эти приближенные соотношения можно использовать и в тех случаях, когда на стержень кроме T и M действуют также поперечные нагрузки

2. Соотношения между параметрами деформаций и внутренними силами для пластин и оболочек. Методом введения потенциальных функций ползучести в [7, 9] построены приближенные физические соотношения ползучести пластин и оболочек применительно к металлическим материалам. Здесь выводятся соотношения между параметрами деформаций и внутренними силами для пластин и оболочек из нелинейного наследственно-стареющего сжимаемого материала с учетом упругопластических мгновенных деформаций. Рассмотрим произвольную тонкую оболочку, материал которой в одноосном напряженном состоянии описывается зависимостью (1.1), а срединная поверхность отнесена к криволинейной ортогональной системе координат, координатные линии которых $\alpha_1=\text{const}$, $\alpha_2=\text{const}$ совпадают с линиями главных кривизн. Через R_{11} и R_{22} обозначим радиусы кривизны этих линий, а H_1 и H_2 — соответствующие параметры Ляме.

Пусть u_1 и u_2 — компоненты перемещения по α_1 и α_2, а w — прогиб точки серединной поверхности. Далее, T_{ij} и M_{ij} — внутренние усилия и внутренние моменты оболочки. Введем приведенные касательное усилие и крутящий момент [10, 11]:

$$T_{12}^\circ=T_{21}^\circ={}^1/_2(T_{12}+T_{21}-M_{12}/R_{11}-M_{21}/R_{22})$$
$$M_{12}^\circ=M_{21}^\circ={}^1/_2(M_{12}+M_{21}) \tag{2.1}$$

причем градус в дальнейшем везде опускается.

В качестве зависимостей между параметрами деформаций и перемещений срединной поверхности принимаем вариант геометрически нелинейных соотношений, предложенный [12] в рамках гипотезы Кирхгофа — Лява. Аналогично (1.7) принимаем

$$\varepsilon_{ij}=E_{ij}+K_{ij}z, \qquad \sigma_{ij}=T_{ij}/h+12M_{ij}z/h^3 \quad (i,\ j=1,\ 2) \tag{2.2}$$

Здесь $E_{ii}=e_{ii}$ — удлинения, $E_{ij}=2e_{ij}$ — сдвиги, $K_{ii}=\varkappa_{ii}$ — кривизна, $K_{ij}=2\varkappa_{ij}$ — кручение срединной поверхности оболочки, причем

$$e_{ii}=e_i+\frac{1}{2}\theta_i^2, \qquad \varkappa_{ii}=\varkappa_i-\frac{1}{2}\frac{\theta_j^2}{R_{ii}} \tag{2.3}$$

$$2e_{ij}=\rho_i+\rho_j+\theta_i\theta_j, \qquad 2\varkappa_{ij}=l_i+l_j+\frac{\rho_i}{R_{jj}}+\frac{\rho_j}{R_{ii}}$$
$$e_i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_{ii}}, \qquad \theta_i=-\frac{1}{H_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_{ii}} \tag{2.4}$$
$$\varkappa_i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\theta_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\theta_j, \qquad \rho_i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}u_i$$
$$l_i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\theta_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\theta_i \quad (i,j=1,2)$$

Полагая для пластин $H_1=H_2=1$ и $R_{11}=R_{12}=\infty$, из (2.3) и (2.4) будем иметь

$$e_i=\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}, \quad \theta_i=-\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}, \quad \rho_i=\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}, \quad \varkappa_i=\frac{\partial\theta_i}{\partial\alpha_i}; \quad l_i=\frac{\partial\theta_j}{\partial\alpha_i} \tag{2.5}$$

Тогда параметры деформаций плиты из (2.3) можно представить в виде соотношений

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j}+\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i}+\frac{\partial w}{\partial \alpha_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_j}\right),\qquad \varkappa_{ij}=-\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \tag{2.6}$$

Введем матрицы параметров деформаций $\Omega=(E_{ij}, K_{ij})$, $\omega=(e_{ij}, \varkappa_{ij})$ и внутренних сил $Q=(T_{ij}, M_{ij})$. Зависимость между параметрами деформаций и внутренними силами определим соотношением

$$\Omega=\frac{\partial \Phi}{\partial Q}+\int\limits_{\tau_1}^{t}\frac{\partial X}{\partial Q}K(t,\tau)\,d\tau \tag{2.7}$$

Здесь Φ и X — потенциальные функции, которые приближенно представим в виде

$$\Phi=\frac{a_1}{2}R_1^2-\frac{a_n}{n+1}R_n^{n+1},\qquad X=\frac{b_1}{2}R_1^2+\frac{b_m}{m+1}R_m^{m+1} \tag{2.8}$$

$$R_n=\sqrt{M_0^2+\lambda_n^2T_0^2},\qquad T_0^2=T_{11}^2-2\nu T_{11}T_{22}+T_{22}^2+2(1+\nu)T_{12}^2$$

$$M_0^2=M_{11}^2-2\nu M_{11}M_{22}+M_{22}^2+2(1+\nu)M_{12}^2$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Подставляя (2.8) в (2.7) и вводя обозначение $2Q_0=(T_{11}+T_{22}, M_{11}+M_{22})$, $\delta=(\delta_{ij}, \delta_{ij})$, приходим к соотношению между параметрами деформаций и внутренними силами оболочки

$$\omega=\Psi(R_n)[(1+\nu)Q-2\nu\delta Q_0]+\int\limits_{\tau_1}^{t}F(R_m)[(1+\nu)Q-2\nu\delta Q_0]K(t,\tau)\,d\tau \tag{2.9}$$

Рассмотрим оболочку с двухсторонними симметричными тонкими усиливающими покрытиями. Принимаем, что толщина покрытия Δ мала по сравнению с толщиной оболочки h, а материал является линейно-упругим с модулем сдвига G_1 и коэффициентом Пуассона ν_1. Деформация и напряжение в покрытиях будут

$$\varepsilon_{ij}=E_{ij}\pm{}^1/_2K_{ij}h,\qquad \sigma_{ij}=T_{ij}-T_{ij}^*/h\pm 6(M_{ij}-M_{ij}^*)/h^2 \tag{2.10}$$

где $Q^*=(T_{ij}^*, M_{ij}^*)$ — внутренние силы, приходящиеся на средний слой оболочки.

Используя закон Гука для плоского напряженного состояния, выражения (2.10), получим погонные внутренние силы, приходящиеся на срединный слой оболочки

$$\begin{gathered}Q^*=Q-D[(1-\nu_1)\omega+2\nu_1\delta\omega_0]\\ 2\omega_0=(e_{11}+e_{22},\ \varkappa_{11}+\varkappa_{22}),\quad D=(D_1,\ {}^1/_4D_1h^2),\quad D_1=4G_1\Delta/(1-\nu_1)\end{gathered} \tag{2.11}$$

Вводя потенциальные функции Φ^* и X^*, параметры деформаций определим через внутренние силы посредством соотношения

$$\Omega=\frac{\partial \Phi^*}{\partial Q}+\int\limits_{\tau_1}^{t}\frac{\partial X^*}{\partial Q}K(t,\tau)\,d\tau \tag{2.12}$$

$$\Phi^*=\frac{a_1}{2}R_1^{*2}-\frac{a_n}{n+1}R_n^{*(n+1)},\qquad X^*=\frac{b_1}{2}R_1^{*2}+\frac{b_m}{m+1}R_m^{*(m+1)} \tag{2.13}$$

$$R_n^*=\sqrt{M_0^{*2}+\lambda_n^2 T_0^{*2}},\quad T_0^{*2}=T_{11}^{*2}-2\nu T_{11}^* T_{22}^*+T_{22}^{*2}+2(1+\nu)T_{12}^{*2}$$

$$M_0^{*2}=M_{11}^{*2}-2\nu M_{11}^* M_{22}^*+M_{22}^{*2}+2(1+\nu)M_{12}^{*2}$$

Подставляя (2.13) в (2.12) и вводя обозначения $2Q_0^*=(T_{11}^*+T_{22}^*,\ M_{11}^*+M_{22}^*)$, получим окончательно зависимость между параметрами деформаций и внутренними силами для трехслойной оболочки

$$\omega=\Psi(R_n)[(1+\nu)Q^*-2\nu\delta Q_0^*]+\int_{\tau_1}^{t}F(R_m)[(1+\nu)Q^*-2\nu\delta Q_0^*]K(t,\tau)\,d\tau \tag{2.14}$$

В частном случае, когда усиливающее покрытие отсутствует $\Delta=0$ и $Q^*=Q$, получим соотношение для однородных пластин и оболочек (2.9).

3. Смешанное вариационное уравнение. В [13] применительно к металлическим материалам сформулирован смешанный вариационный принцип Рейсснера, основанный на одновременном варьировании полей скоростей деформаций ползучести и скоростей напряжений. Для трехмерной наследственно-ползучей среды такой вариационный принцип сформулирован в [8, 14, 15].

Здесь предлагается смешанное вариационное уравнение для трехслойных пластин и оболочек, средний слой которых обладает свойством нелинейного наследственно-стареющего материала.

С гладким криволинейным контуром Г срединной поверхности оболочки S свяжем местную систему координат (n, s). Пусть $\mathbf{p}$ — вектор распределенных сил, действующих на оболочку, $\mathbf{T}_*$ и $\mathbf{M}_*$ — векторы внешних погонных усилий и моментов, приложенных к граничному контуру, а $\mathbf{u}_*$ и $\boldsymbol{\theta}_*$ — векторы смещения углов поворотов нормального элемента контура, причем

$$\theta_n=-\frac{dw}{dn}+\frac{u_n}{R_{nn}}-\frac{u_s}{R_{ns}},\qquad \theta_s=-\frac{dw}{ds}+\frac{u_s}{R_{ss}}-\frac{u_n}{R_{ns}}$$

$$u_n=u_1\cos\varphi+u_2\sin\varphi,\qquad u_s=-u_1\sin\varphi+u_2\cos\varphi \tag{3.1}$$

где R_{nn}^{-1}, R_{ss}^{-1}, R_{ns}^{-1} — кривизны и кручение координатных линий, u_n и u_s — компоненты смещения точки контура Г, а φ — угол между α_1 и n.

Введем, как обычно, приведенные усилия

$$q_{n*}=T_{n*}-\frac{M_{s*}}{R_{ns}},\qquad q_{s*}=T_{s*}+\frac{M_{s*}}{R_{ss}},\qquad q_{3*}=T_{3*}+\frac{\partial M_{s*}}{\partial s} \tag{3.2}$$

которые совместно с моментом M_{n*} эквивалентны системе сил $(\mathbf{T}_*, \mathbf{M}_*)$.

Примем следующие обозначения:

$$H_1H_2V_i=\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(H_jT_{ii})+\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i^2T_{ij}}{\partial\alpha_j}-\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}T_{jj}+\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\frac{H_iM_{ij}}{R_{ii}}+$$

$$+\frac{1}{R_{jj}}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}M_{ij}+\frac{H_iH_jN_i}{R_{ii}}+H_iH_jp_i$$

$$V_3=\frac{T_{11}}{R_{11}}+\frac{T_{22}}{R_{22}}-\frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial H_2N_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial H_1N_2}{\partial\alpha_2}\right)-p_3$$

$$H_iH_jN_i=\frac{\partial H_jM_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i^2M_{ij}}{\partial\alpha_j}-\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}M_{jj}-H_iH_j\left[\left(T_{ii}-\frac{M_{jj}}{R_{jj}}\right)\theta_i+T_{ij}\theta_j\right]$$

$$q_n = T_{11}\cos^2\varphi + T_{12}\sin 2\varphi + T_{22}\sin^2\varphi + \frac{M_{12}}{2}\sin 2\varphi\,(R_{11}^{-1}+R_{22}^{-1}) - \frac{M_s}{R_{ns}}$$

$$q_s = \frac{1}{2}(T_{22}-T_{11})\sin 2\varphi + T_{12}\cos 2\varphi + M_{12}(R_{22}^{-1}\cos^2\varphi - R_{11}^{-1}\sin^2\varphi) + \frac{M_s}{R_{ss}}$$

$$q_3 = N_1\cos\varphi + N_2\sin\varphi + \frac{\partial M_s}{\partial s}$$

$$M_n = M_{11}\cos^2\varphi + M_{12}\sin 2\varphi + M_{22}\sin^2\varphi$$

$$M_s = \frac{1}{2}(M_{22}-M_{11})\sin 2\varphi + M_{12}\cos 2\varphi$$

Пусть на части контура Γ_Q заданы значения q_{n*}, q_{s*}, q_{s*}, M_{n*}, совокупность которых обозначим через q_*. На остальной части контура Γ_u заданы перемещения u_{n*}, u_{s*}, w_* и угол поворота θ_{n*}, совокупность которых обозначим через U_*. Совокупность этих величин без звездочки обозначим соответственно q и U.

Введем потенциальную функцию

$$L = \frac{D_1}{2}(e_0^2 + {}^1/_4\varkappa_0^2h^2) \tag{3.3}$$

$$e_0^2 = e_{11}^2 + 2\nu_1 e_{11}e_{22} + e_{22}^2 + 2(1-\nu_1)e_{12}^2$$

$$\varkappa_0^2 = \varkappa_{11}^2 + 2\nu_1\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{22}^2 + 2(1-\nu_1)\varkappa_{12}^2$$

Варьируем напряженно-деформированное состояние оболочки. В момент t параметрам деформаций ω сообщим вариацию $\delta\omega$, а внутренним силам Q — вариацию δQ, причем эти вариации считаем независимыми. Соответственно на граничном контуре будем иметь вариации δq и δU.

Составим для срединной поверхности оболочки обобщенный функционал Рейсснера

$$W = \iint_S \left[\omega Q + L - \Phi^* - \int_{\tau_1}^{t} \frac{\partial X^*}{\partial Q} Q(t)K(t,\tau)\,d\tau\right] dS - \\ - \iint_S \mathbf{pu}\,dS - \int_{\Gamma_u} q(U-U_*)\,ds - \int_{\Gamma_Q} q_* U\,ds \tag{3.4}$$

где ds — элемент контура Γ, $dS = H_1H_2\,d\alpha_1 d\alpha_2$ — элемент площади срединной поверхности оболочки.

Покажем, что вариационное уравнение $\delta W = 0$, где параметры деформаций и внутренние силы варьируются независимо, эквивалентно дифференциальным уравнениям равновесия оболочки, граничным условиям на контуре и соотношениям между параметрами деформаций и внутренними силами.

Действительно, варьируя функционал (3.4), получим

$$\iint_S \left[\omega\delta Q + Q\delta\omega - \frac{\partial\Phi^*}{\partial Q}\delta Q - \int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial X^*}{\partial Q}\delta Q(t)K(t,\tau)\,d\tau\right] dS - \\ - \iint_S \mathbf{p}\delta\mathbf{u}\,dS - \int_{\Gamma_u}(U-U_*)\delta q\,ds - \int_{\Gamma_u} q\delta U\,ds - \int_{\Gamma_Q} q_*\delta U\,ds = 0 \tag{3.5}$$

Подставляя в (3.5) выражения параметров деформаций через перемещения (2.3), (2.4), производя интегрирование по частям и применяя формулу Гаусса — Остроградского о преобразовании двукратного интеграла в контурный, получим

$$\iint\limits_{S} \left\{ V\delta u - \left[\Omega - \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q} - \int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{\partial X^*}{\partial Q} K(t,\tau)\, d\tau \right] \delta Q \right\} dS +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_u} (U - U_*)\, \delta q\, ds + \int\limits_{\Gamma_Q} (q - q_*)\, \delta U\, ds = 0 \tag{3.6}$$

Поскольку вариации произвольны, то из (3.6) следуют дифференциальные уравнения равновесия

$$V_i = 0 \qquad (i=1,\,2,\,3) \tag{3.7}$$

граничные условия на контуре

$$U = U_* \quad \text{на} \quad \Gamma_u, \qquad q = q_* \quad \text{на} \quad \Gamma_Q \tag{3.8}$$

и соотношение между параметрами деформаций и внутренними силами для трехслойной оболочки (2.12).

В работе [16] дается приложение предложенного вариационного метода для решения некоторых контактных задач нелинейной теории ползучести с неизвестной областью контакта.

4. Об учете неоднородности и анизотропии материалов. Пусть материал усиливающего покрытия оболочки линейно-упругий и неоднородно-ортотропный, направления анизотропии которого совпадают с координатными линиями. Принимаем, что покрытия находятся в плосконапряженном состоянии с модулями упругости $G'G_{ij}'$, где G' — характерный, а $G_{ij}'(\alpha_1, \alpha_2)$ — безразмерные модули упругости, $\nu_{ij}'(\alpha_1, \alpha_2)$ — коэффициенты Пуассона, причем $\nu_{ij}'=0$ при $i \neq j$ и $\nu_{11}'G_{11}'=\nu_{22}'G_{22}'$. Тогда, заменяя в (2.11) ν_1 и D матрицами

$$\nu' = (\nu_{ij}', \nu_{ij}'), \qquad D = \left(D_{ij}, \frac{1}{4} D_{ij} h^2 \right), \qquad D_{ij} = \frac{2\Delta G' G_{ij}'}{1 - \nu_{11}'\nu_{22}'\delta_{ij}}$$

получим выражение внутренней силы Q^*, приходящейся на средний слой оболочки.

Материал среднего слоя оболочки принимаем нелинейным наследственно-стареющим (1.1), обладающим неоднородно-ортотропным свойством, линии анизотропии которого также совпадают с координатными линиями. Принимаем для простоты, что коэффициенты Пуассона при деформации ползучести и упругой деформации одинаковы и равны $\nu_{ij}(\alpha_1, \alpha_2)$, причем $\nu_{ij}=0$ при $i \neq j$, а неоднородность и анизотропность при деформациях ползучести и упругих деформациях «подобны». Иначе говоря, полагаем для ядер ползучести $G_{ij}K_{ij}(t, \tau) = K(t, \tau)$, где $G_{ij}(\alpha_1, \alpha_2)$ — безразмерные модули мгновенных упругих деформаций, причем $\nu_{11}G_{11} = \nu_{22}G_{22}$. Тогда зависимости между параметрами деформации и внутренних сил можно определить по соотношениям (2.12), (2.13), где значения T_0^* и M_0^*, входящие в R_n^*, зададим выражениями

$$\begin{aligned} T_0^{*2} &= \frac{1}{G_{11}} T_{11}^{*2} - 2\frac{\nu_{11}}{G_{22}} T_{11}^* T_{22}^* + \frac{1}{G_{22}} T_{22}^{*2} + \frac{1}{G_{12}} T_{12}^{*2} \\ M_0^{*2} &= \frac{1}{G_{11}} M_{11}^{*2} - 2\frac{\nu_{11}}{G_{22}} M_{11}^* M_{22}^* + \frac{1}{G_{22}} M_{22}^{*2} + \frac{1}{G_{12}} M_{12}^{*2} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Подставляя (2.13), (4.1) в (2.12), приходим к соотношению (2.14), причем входящая в него постоянная ν заменяется матрицей $\nu=(\nu_{ij}, \nu_{ij})$.

Для обобщения смешанного вариационного уравнения (3.4) в обобщенном функционале Рейсснера (3.6) вместо (3.3) следует ввести потенциальную функцию

$$L={}^1/_2(e_0^2+{}^1/_4\varkappa_0^2h^2)$$

$$e_0^2=D_{11}e_{11}^2+2\nu_{11}D_{11}e_{11}e_{22}+D_{22}e_{22}^2+D_{12}e_{12}^2$$

$$\varkappa_0^2=D_{11}\varkappa_{11}^2+2\nu_{11}D_{11}\varkappa_{11}\varkappa_{22}+D_{22}\varkappa_{22}^2+D_{12}\varkappa_{12}^2$$

Дальнейший ход рассуждений для доказательства вариационного принципа остается неизменным.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 4 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.– Л., Гостехиздат, 1952.
2. *Leaderman H.* Elastic and creep properties of filamentous materials and other high polymers. Washington, Textile Foundation, 1943.
3. *Розовский М. И.* О нелинейных уравнениях ползучести и релаксации материалов при сложном напряженном состоянии. Ж. техн. физ., 1955, т. 25, вып. 13.
4. *Бондаренко В. М.* Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. Изд-во Харьковск. ун-та, 1968.
5. *Карапетян К. С.* Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформации ползучести. Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. наук, 1959, т. 12, № 4.
6. *Арутюнян Н. Х.* Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона. Инж. ж. МТТ, 1967, № 6.
7. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций, М., «Наука», 1966.
8. *Задоян М. А.* Смешанное вариационное уравнение нелинейно-ползучего тела и задача выпучивания призматического стержня. Изв. АН АрмССР. Механика, 1968, т. 21, № 2.
9. *Розенблюм В. И.* Приближенные уравнения ползучести тонкостенных оболочек. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
10. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1951.
11. *Лурье А. И.* Об уравнениях общей теории упругих оболочек. ПММ, 1951, т. 14, вып. 3.
12. *Шаповалов Л. А.* Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек. Инж. ж. МТТ, 1968, № 1.
13. *Sanders J. L., McComb H. G., Schlechte F. R.* A variational theorems for creep with applications to plates and columns. NACA, 1957, No. 1342.
14. *Задоян М. А.* О вариационных уравнениях теории ползучести. Докл. АН АрмССР, 1958, т. 26, № 5.
15. *Задоян М. А.* Вариационное уравнение Кастильяно нелинейно-наследственной теории ползучести. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 5.
16. *Задоян М. А.* Об одной контактной задаче нелинейной теории ползучести для плиты на упругом основании. Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, № 4.