

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ВАРИАНТАХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ,
УЧИТЫВАЮЩЕЙ НАЧАЛЬНЫЕ МИКРОНАПРЯЖЕНИЯ

Ю. И. КАДАШЕВИЧ, В. В. НОВОЖИЛОВ

(Ленинград)

В [1] предложена теория пластичности, учитывающая начальные микронапряжения. По этой теории локальные поверхности текучести отличаются своим радиусом, но в исходном состоянии в силу существования начальных микронапряжений они не имеют своим центром начало координат. Приведенные в работе примеры показали хорошее качественное совпадение с опытными данными. Кроме того, было обращено внимание на возможность описания ряда явлений, которые классическая теория пластичности описать не могла.

В [2] показано, что при анализе сложных нагружений можно использовать понятие плоских поверхностей нагружения. Макроскопическая поверхность текучести при этом определяется как огибающая всех плоских поверхностей текучести. Сандерс показал, что существует область, в которой предсказания деформационной теории пластичности совпадают с результатами, вытекающими из его подхода. Было обнаружено, что по своим следствиям теория Сандерса близка к предсказаниям теории скольжения [3]. В [4] для плоского случая конкретизирован подход Сандерса и показано, что теории [3-6] идентичны. Внимание к таким теориям ослабло, и, насколько известно, публикаций в этом направлении давно не появлялось.

Представляет интерес, в связи с этим, рассмотреть и обсудить предельные варианты теории пластичности [1], когда локальные поверхности текучести становятся плоскими.

Исходными являются уравнения теории [1]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \tau_{ij} d\lambda, \quad \langle \varepsilon_{ij}^y \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle / 2G, \quad \tau_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle - s_{ij}, \quad \tau = \sqrt{\tau_{ij} \tau_{ij}} \quad (1)$$

$$s_{ij} = b \varepsilon_{ij}^p, \quad s = \sqrt{s_{ij} s_{ij}}, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \langle \varepsilon_{ij}^y \rangle + \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle, \quad \sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle$$

Здесь σ_{ij} — девиатор тензора локальных напряжений, ε_{ij} — девиатор тензора локальных деформаций, ε_{ij}^p — девиатор тензора локальных пластических деформаций, τ_{ij} — девиатор тензора локальных активных напряжений, s_{ij} — девиатор тензора локальных остаточных напряжений, $\langle \dots \rangle$ — знак осреднения.

Предполагается, что в исходном состоянии известны как случайное поле начальных микродеформаций ε_{ij}^{p0} , так и плотность распределения предела текучести τ .

Если предположить, что влиянием первого и третьего инвариантов напряжений на закономерности пластического деформирования можно пренебречь, то указанные соотношения рационально анализировать в пятимерном пространстве, предложенном А. А. Ильюшиным, что облегчает геометрическую интерпретацию последующих результатов [1].

Положение начальных локальных поверхностей текучести определяется уравнением

$$(\sigma_{ij} - s_{ij}^0)(\sigma_{ij} - s_{ij}^0) = \tau^2; \quad \langle s_{ij}^0 \rangle = 0 \quad (2)$$

Будем считать сначала, что в локальном законе течения каждому значению τ отвечает одно значение s_0 . Тогда огибающая всех поверхностей текучести будет поверхностью текучести Мизеса с радиусом $\tau - s_0$. Далее

в определяющих уравнениях устремим τ и s_0 к бесконечности, но так, чтобы $\tau - s_0 = \sigma_T = \text{const}$, где σ_T — макроскопический предел текучести материала.

В этом случае поверхности текучести станут плоскими, а их огибающая в начальном состоянии вновь определяет поверхность текучести в форме Мизеса.

Сделанное предположение упрощает картину пластических сдвигов и соответственно рассматриваемую теорию. Однако при этом в теории утрачивается взаимосвязь локальных скольжений и, тем самым, существенно преувеличивается влияние начальных микронапряжений на макроскопическую деформацию. Одни микроэлементы реагируют только на нагружение в прямом направлении, другие же — только на нагружение в противоположном. Тем не менее стоит проследить, к чему приведет такой подход, хотя бы для того, чтобы получить представление о теории Сандерса (а вместе с тем и теориях скольжения) в свете теорий, учитывающих микронеоднородность развития пластических деформаций.

Из сформулированной теории вытекает, что поверхности текучести движутся независимо одна от другой, удаляясь от начала координат, как только точка в пространстве напряжений достигнет их границы.

Определяющие уравнения имеют весьма простой вид

$$\sum_{k=1}^5 (\sigma_k - b \varepsilon_k^p) \cos \varphi_k = \sigma_T, \quad \varepsilon_k^p = \varepsilon_i^p \cos \varphi_k, \quad \sum_{k=1}^5 \cos^2 \varphi_k = 1 \quad (3)$$

$$\varepsilon_k^p = \varepsilon_i^p \cos \varphi_k, \quad \varepsilon_i^p = \sum_{k=1}^5 \sigma_k \cos \varphi_k - \sigma_T \quad (4)$$

Для простоты ограничимся рассмотрением плоского случая; тогда имеем

$$b \varepsilon_1^p = \sigma_1 \cos \varphi + \sigma_2 \sin \varphi - \sigma_T, \quad \varepsilon_1^p = \varepsilon_i^p \cos \varphi, \quad \varepsilon_2^p = \varepsilon_i^p \sin \varphi$$

$$\varepsilon_1^{p0} = \varepsilon_2^{p0} = 0, \quad \langle \varepsilon_1^p \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon_1^p d\varphi, \quad \langle \varepsilon_2^p \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon_2^p d\varphi \quad (5)$$

Казалось бы, что основная трудность теперь состоит в суммировании всех локальных пластических деформаций для плоскостей текучести, вступивших в движение. Однако и эта задача легко разрешима, если учесть, что при заданном напряженном состоянии всегда можно найти те плоскости текучести, на которых пластические деформации еще не начали развиваться (или перестали развиваться). Так, например, при одноосном нагружении (т. е. в случае, когда в пространстве напряжений отлична от нуля только одна компонента) имеем $b \varepsilon_1^p = \sigma_1 \cos^2 \varphi - \sigma_T \cos \varphi$, $\sigma_1 \cos \varphi = \sigma_T$, где φ_0 — граничное значение угла φ , при котором плоскость текучести не перемещается.

Отсюда получим

$$\langle \varepsilon_1^p \rangle = \frac{\sigma_T}{2\pi b} \left(\frac{\varphi_0}{\cos \varphi_0} - \sin \varphi_0 \right), \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_T}{\cos \varphi_0} \quad (6)$$

Эти формулы выражают параметрическое задание кривой одноосного нагружения.

Уравнения (6) впервые предложены в [5]. Соответствующая им кривая $\varepsilon^p = f(\sigma)$ имеет весьма характерный вид. Начальный модуль упрочне-

ния равен бесконечности, и кривая выходит на следующую асимптоту: $\varepsilon^p = 1/4 b (\sigma - 4\sigma_T/\pi)$.

Если считать предел текучести σ_T зависящим от величины накопленной пластической деформации, то соотношения (5) примут вид

$$\varepsilon_i^p = \psi(\sigma_1 \cos \varphi + \sigma_2 \sin \varphi), \quad \varepsilon_1^p = \varepsilon_i^p \cos \varphi, \quad \varepsilon_2^p = \varepsilon_i^p \sin \varphi.$$

При одноосном монотонном нагружении имеем

$$\langle \varepsilon_1^p \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \psi \left[\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} \sigma_T(0) \right] \cos \varphi d\varphi, \quad \sigma = \frac{\sigma_T(0)}{\cos \varphi_0} \quad (7)$$

И эти соотношения вытекают из [5]. После одноосного нагружения соответствующая поверхность текучести имеет вид, отвечающий теории скольжения [3]. Существует довольно широкая зона нагружения, в которой предсказания этой теории и теории малых упругопластических деформаций тождественно совпадают.

Следует отметить, однако, что при циклических нагружениях такая теория не приводит к результатам, совпадающим с экспериментом, так как она не учитывает взаимное влияние локальных пластических деформаций и, как следствие, изменение положения одних плоскостей текучести в зависимости от движения других.

Очевидно следует показать, что теория скольжения и ее модификации содержатся как частный случай в общей теории [1], а также выяснить, при помощи каких упрощений они могут быть получены.

Вновь обратимся к [1] и рассмотрим более общий вариант теории, связывающий положение плоских поверхностей текучести и локальных пластических деформаций

$$\cos \varphi \left[\sigma_1 - b\varepsilon_1^p - \int_0^{2\pi} c(\varphi, \varphi') \varepsilon_1^p d\varphi' \right] + \sin \varphi \left[\sigma_2 - b\varepsilon_2^p - \int_0^{2\pi} c(\varphi, \varphi') \varepsilon_2^p d\varphi' \right] = \sigma_T \quad (8)$$

$$\varepsilon_1^p = \varepsilon_i^p \cos \varphi, \quad \varepsilon_2^p = \varepsilon_i^p \sin \varphi, \quad \langle \varepsilon_1^p \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon_1^p d\varphi, \quad \langle \varepsilon_2^p \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon_2^p d\varphi$$

Ограничимся здесь вариантом, когда $c(\varphi, \varphi') = \text{const}$: тогда

$$\cos \varphi (\sigma_1 - b\varepsilon_1^p - m \langle \varepsilon_1^p \rangle) + \sin \varphi (\sigma_2 - b\varepsilon_2^p - m \langle \varepsilon_2^p \rangle) = \sigma_T^2$$

Вновь рассмотрим одноосное нагружение. Исследуем поведение тех плоскостей текучести, которые двигаются пассивно, т. е. не вызывают пластических деформаций. В этом случае

$$\cos \varphi (\sigma_1 - m \langle \varepsilon_1^p \rangle) + \sin \varphi = \sigma_T \quad (9)$$

По сравнению с теорией (3) здесь имеется член, вносящий существенные коррективы. Найдем огибающую семейства плоскостей (9). Она имеет вид $(\sigma_1 - m \langle \varepsilon_1^p \rangle)^2 + \sigma_2^2 = \sigma_T^2$.

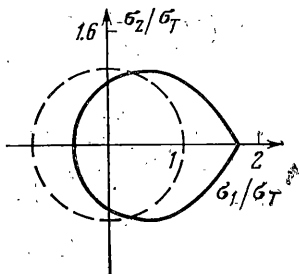
Касательные к этой поверхности образуют макроскопическую поверхность текучести. В результате макроскопическая поверхность текучести (в целом) принимает вид, изображенный на фигуре. На этой поверхности имеется угловая точка, но существенно менее выраженная, чем в варианте.

определяемом соотношениями (3).

При монотонном нагружении

$$\langle \varepsilon_1^p \rangle = \frac{\sigma_T}{2\pi b} \left(\frac{\varphi_0}{\cos \varphi_0} - \sin \varphi_0 \right), \quad \sigma = \frac{\sigma_T}{\cos \varphi_0} + m \langle \varepsilon_1^p \rangle$$

При последующем нагружении противоположного знака дополнительные пластические деформации происходят за счет другой группы плоскостей нагружения. Это и есть одна из характерных особенностей рассматриваемого уточненного варианта теории пластичности Сандерса, состоящая в том, что в различных направлениях ответственными за пластическую деформацию могут быть разные плоскости текучести, но их перемещение теперь в пространстве напряжений взаимосвязано одно с другим.



Циклическое мягкое нагружение с амплитудой $\sigma = \pm \sigma_0$ приводит к исчезающей петле гистерезиса, т. е. материал ведет себя как циклически упрочняющийся.

Из всего изложенного следует, что предельные варианты теории [1] (в частности, приведенная модификация теории Сандерса) могут быть полезны для инженерных расчетов.

Поступила 5 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. О влиянии начальных микронапряжений на макроскопическую деформацию поликристаллов. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
2. Sanders J. L. Jr. Plastic stress-strain relations based on linear loading functions. Proc. 2nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. Michigan, 1954. New York, ASME, 1955. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1956, № 3.)
3. Batdorf S. B., Budiansky B. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip. NASA, 1949, Techn. Note No 1871. (Рус. перев.: Механика, Сб. перев., 1962, № 1).
4. Клюшников В. Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
5. Клюшников В. Д. О возможном пути построения соотношений пластичности. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.
6. Работнов Б. Н. Модель, иллюстрирующая некоторые свойства упрочняющегося пластического тела. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.