

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИФРАКЦИЯ  
СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЙ  
НА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

А. Н. ГУЗЬ, В. Д. КУБЕНКО, Н. Н. ПАНАСЮК

(Киев)

Вопросу нестационарной дифракции плоских волн на сферической полости в упругой среде посвящен ряд публикаций [1-4].

В данной работе предложено решение задачи о действии нестационарной сферической волны на сферическую полость. Решение получено методом, предложенным в [5] и заключающимся в получении интегрального уравнения Вольтерра относительно искомым функций и численном его решении.

1. Неограниченная однородная изотропная упругая среда содержит сферическую полость радиуса  $R$ , отнесенную к сферической  $(r, \theta, \varphi)$  системе координат, начало которой совпадает с центром полости. На расстоянии  $d$  от центра полости находится точечный источник, возбуждающий в момент  $t=0$  сферическую затухающую продольную волну, имеющую на фронте в момент соприкосновения с полостью единичный скачок напряжений  $\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_\varphi$ . Падающая на полость продольная волна порождает поле отраженных продольных и поперечных волн. Решается задача об определении напряженного состояния полости.

Вследствие сферической симметрии вектор перемещений  $U(u, v, w)$  выражается через скалярный потенциал продольных волн  $\Phi$  и скалярную составляющую потенциала поперечных волн  $\psi$ :

$$U = \text{grad } \Phi + \text{rot} \left( e_\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \quad (1.1)$$

где  $e_\varphi$  — орт нормали к поверхности  $\varphi = \text{const}$ . Ненулевые компоненты тензора напряжений в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, & \sigma_\theta &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{1}{r} \left( u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_\varphi &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{1}{r} (u + v \text{ctg } \theta), & \tau_{r\theta} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( 2u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \text{ctg } \theta \right)$$

Потенциалы  $\Phi$  и  $\psi$  удовлетворяют волновым уравнениям

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \Delta \psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.3)$$

где  $c_1, c_2$  — скорости продольных и поперечных волн соответственно;  $\rho$  — плотность среды;  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе.

Введем безразмерные величины (отмеченные штрихом) по формулам

$$r' = \frac{r}{R}, \quad (u', v', w') = \frac{(u, v, w)}{R}, \quad t' = \frac{c_1 t}{R}, \quad (\sigma', \tau') = \frac{(\sigma, \tau)}{\sigma^0},$$

$$(\Phi', \Psi') = \frac{\rho c_1^2}{R^2 \sigma^0} (\Phi, \Psi)$$

где  $\sigma^0$  имеет размерность напряжения. Следует отметить, что в упругой среде напряжения не являются волновыми функциями, поэтому задать падающую сферическую волну посредством функции Хевисайда, умноженной на экспоненту, как делается, например, для сжимаемой жидкости или плоской волны напряжений, не удается.

Здесь волновой потенциал падающей волны для конкретных расчетов выбирается в виде

$$\Phi_+'(r', t') = \frac{1}{2} \frac{d'-1}{3\xi+2/\xi^2} e^{-\lambda'T} \frac{T^2}{r_1'} H(T) \quad (1.4)$$

$$\Psi_+'(r', t') = 0, \quad T = t' - r_1', \quad \xi = c_1/c_2,$$

$$\xi = \nu/(1-\nu)$$

где  $\lambda'$  — коэффициент затухания,  $H$  — функция Хевисайда,  $r_1$  — полярный радиус с полюсом в источнике,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Потенциалу (1.4) соответствуют напряжения в падающей волне

$$\sigma_r' + \sigma_\theta' + \sigma_\varphi' = \frac{d'-1}{r_1'} \left[ \frac{\lambda'^2}{2} T^2 - 2\lambda'T + 1 \right] e^{-\lambda'T} H(T). \quad (1.5)$$

Для иллюстрации на фиг. 1 представлено изменение напряжений  $\sigma' = \sigma_r' + \sigma_\theta' + \sigma_\varphi'$  на фронте волны при  $\lambda' = 1.5$  (сплошная линия),  $\lambda' = 1.0$  (штриховая) и  $\lambda' = 0.5$  (штрихпунктирная). На поверхности полости выполняются граничные условия

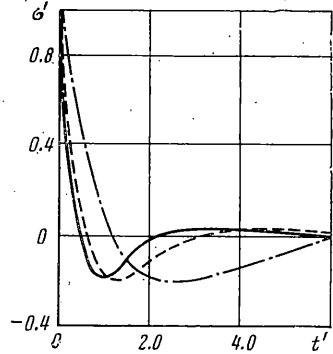
$$\sigma_{r'}' = -\sigma_{r'}', \quad \tau_{r'\theta'}' = -\tau_{r'\theta'}' \quad \text{при } r' = 1 \quad (1.6)$$

Волновые потенциалы отраженных волн на бесконечности должны стремиться к нулю. Начальные условия — нулевые. Знаком минус отмечены величины, соответствующие отраженным волнам.

2. Применяя к (1.4) интегральные преобразования Лапласа по  $t'$  и используя теорему сложения сферических функций [6], представим потенциал  $\Phi_+'$  в координатах полости

$$\Phi_+'(r', \theta) = \frac{d'-1}{\sqrt{d'}} \frac{1}{3\xi+2/\xi^2} \frac{1}{(s+\lambda')^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{r'}} I_{n+1/2}(sr') K_{n+1/2}(sd') P_n(\cos \theta) \quad (2.1)$$

где  $s$  — параметр преобразования,  $L$  — индекс, обозначающий изображение,  $I_{n+1/2}(sr)$ ,  $K_{n+1/2}(sr)$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода,  $P_n$  — полином Лежандра.



Фиг. 1

Решение волновых уравнений (1.3) с учетом условий затухания имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi'^L &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) \sqrt{\frac{\pi}{2sr'}} K_{n+1/2}(sr') P_n(\cos \theta), \\ \Psi'^L &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s) \sqrt{\frac{\pi}{2sr'}} K_{n+1/2}(sr') P_n(\cos \theta)\end{aligned}\quad (2.2)$$

Здесь  $A_n, B_n$  — неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий. Для суммы напряжений имеет место зависимость

$$(\sigma_r' + \sigma_\theta' + \sigma_\varphi')^L = \left(3\xi + \frac{2}{\xi^2}\right) s^2 \Phi'^L, \quad \Phi'^L = \Phi_+'^L + \Phi_-'^L \quad (2.3)$$

Напряжения представим в виде рядов

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{rn} P_n(\cos \theta), \quad \tau_{r\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{r\theta n} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \\ \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_\varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_\varphi)_n P_n(\cos \theta)\end{aligned}\quad (2.4)$$

Тогда из соотношений (1.1), (1.2), (1.6), (2.1)–(2.4) получаем уравнение относительно суммы напряжений  $\sigma_\theta'^L + \sigma_\varphi'^L$  на поверхности (напряжение  $\sigma_r'^L$  равно нулю)

$$\begin{aligned}(\sigma_\theta' + \sigma_\varphi')_n^L F_2'^L &= H_1'^L, \quad F_1'^L = \frac{d'-1}{d'} \frac{s}{(s+\lambda)^3} \frac{2}{\xi^2} (2n+1) \times \\ &\times \left\{ -\frac{2(n-1)(n+2)}{\xi} s^2 K_{n-1/2}(s\xi) + \right. \\ &\left. + \left[ 2s^3 - \frac{2n(n-1)(n+2)}{\xi^2} s \right] K_{n+1/2}^*(s\xi) \right\} K_{n+1/2}^*(sd) \\ F_2'^L &= -\frac{4(n-1)(n+2)}{\xi^3} s^2 K_{n-1/2}^*(s) K_{n-1/2}^*(s\xi) - \\ &- \frac{4n(n-1)(n+2)}{\xi^4} s K_{n-1/2}^*(s) K_{n+1/2}^*(s\xi) + \frac{4}{\xi^2} s^3 K_{n-1/2}^*(s) K_{n+1/2}^*(s\xi) - \\ &- \frac{4(n+1)(n+2)(n-1)}{\xi^3} s K_{n+1/2}^*(s) K_{n-1/2}^*(s\xi) + \\ &+ \frac{2}{\xi} \left( \xi + \frac{2}{\xi^2} \right) s^3 K_{n+1/2}^*(s) K_{n-1/2}^*(s\xi) + \left[ \frac{2(n+2)(n+1)}{\xi^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2n(n+2)(\xi+2/\xi^2)}{\xi^2} \right] s^2 K_{n+1/2}^*(s) K_{n+1/2}^*(s\xi) + \left( \xi + \frac{2}{\xi^2} \right) s^4 K_{n+1/2}^*(s) K_{n+1/2}^*(s\xi).\end{aligned}$$

$$K_{n+1/2}^*(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{m!(n-m)!} \frac{1}{(2s)^m}$$

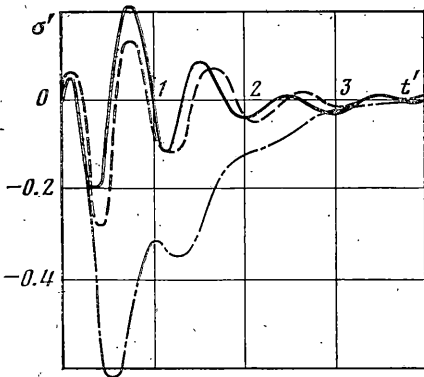
Применяя к соотношению (2.5) теорему о свертке оригиналов [7], из него получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода, которое для  $t' > d' - 1$  имеет вид

$$(\sigma_0 + \sigma_\varphi)_0 + \int_0^{t'} (\sigma_0 + \sigma_\varphi)(y) f_2(t'_1 - y) dy = \frac{d' - 1}{d'} \frac{2}{\xi^2} (2n + 1) \int_0^{t'_1} g_1(x) g_2(t'_1 - x) dx \quad (2.6)$$

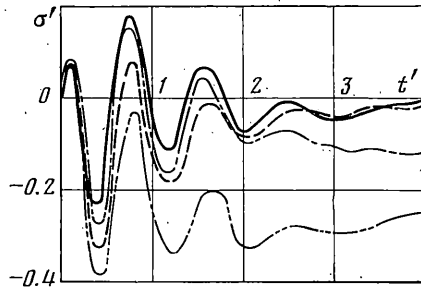
$$f_2(t_1 - y) = F_2'^L, \quad F_1'^L = \frac{d' - 1}{d'} \frac{2}{\xi^2} (2n + 1) g_1^L g_2^L$$

$$g_1^L = s / (s + \lambda')^3, \quad g_2^L = e^{-\lambda' t'} (\lambda' / 2 t'^2 + t')$$

Здесь  $t'_1 = 0$  соответствует моменту соприкосновения волны со сферой. При определении ядра  $f_2$  и составляющей  $g_2$  правой части пользуемся



Фиг. 2



Фиг. 3

табличным соответствием изображения  $s^{-m}$  оригиналу  $t^{m-1} / (m-1)!$

$$\frac{1}{s^d} K_{n+1/2}^*(s) = \int_0^\infty e^{-st'} \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)! t^{m+d-1}}{m!(n-m)!(m+d-1)! 2^m} dt$$

и свойством интегрирования оригиналов.

3. Интегральные уравнения (2.6) решались численно сведением к системе линейных алгебраических уравнений. Для этого отрезок интегрирования малым шагом разбиваем на равные отрезки, на каждом из которых искомая функция считается постоянной, что позволяет вынести ее из-под знака интеграла. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей, причем элементы матрицы в диагоналях, параллельных главной, равны друг другу. Поэтому для формирования алгебраической системы достаточно вычислить первый столбец матрицы и столбец свободных членов.

Алгоритм решения реализован на ЭВМ БЭСМ-6. При счете сохранено восемь членов ряда (2.4). Вычисления проведены для  $\nu = 0.3$ .

На фиг. 2 представлены значения сумм напряжений  $\sigma' = \sigma_0' + \sigma_\varphi'$  для лобовой точки полости ( $\theta = 0$ ) при значении  $\lambda' = 1.5$ . Сплошная линия соответствует случаю, когда источник расположен на расстоянии  $d' = 10$  от полости, штриховая —  $d' = 5$  и штрихпунктирная —  $d' = 2$ .

На фиг. 3 представлены результаты, полученные для  $d'=10$  (сплошная и штрихпунктирная) и  $d'=5$  (штриховая и штрих с двумя точками) при  $\lambda'=1.0$  и  $0.5$  соответственно.

Результаты, представленные на фиг. 2, 3, отнесены к сумме напряжений в падающей волне (фиг. 1).

Анализ числовых результатов показывает, что ряд вида (2.4), определяющий  $\sigma_\theta + \sigma_r$ , сходится быстро. Однако если для случая плоской волны [4] при больших  $t'$  основной вклад вносят члены  $n=0$  и  $2$ , то здесь все члены ряда являются осциллирующими функциями и значимость вклада каждого последующего члена уменьшается с ростом его номера.

Кривизна волнового фронта значительно сказывается на величинах максимальных напряжений и характере их перераспределения. Приближение источника к полости существенно влияет на величины напряжений, возникающих в лобовой точке полости. Как видно из фиг. 2, в случае источника, находящегося на расстоянии одного радиуса полости от ее лобовой точки, происходит значительный (в сравнении со случаем более удаленных источников) рост напряжений, что может вызвать откольные явления. Задача решалась также при удалении источника на расстояние  $d'=20$  и  $50$ . Сравнение результатов для  $d'=10$  и  $20$  дает различие в максимальных значениях напряжений порядка  $10\%$ . Соответствующие напряжения в остальных точках для  $d'=10$  и  $20$  практически совпадают. Для  $d'=20$  и  $50$  совпадение еще лучше. Это позволяет сделать вывод, что при удалении источника на расстояние, большее десяти радиусов, сферическую волну можно считать плоской.

Поступила 16 XI 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Huang H., Wang Y. F. Transient stress concentration by spherical cavity in an elastic medium. Trans. ASME. Ser. E., J. Appl. Mech., 1972, vol. 39, No. 4. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1972, № 4).
2. McLeary R. The interaction of a plane wave with a spherical cavity. Trans. ASME. Ser. E., J. Appl. Mech., 1969, vol. 36, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1969, № 3).
3. Norwood E. R., Miklowitz J. Diffraction of transient elastic waves by a spherical cavity. Trans. ASME. Ser. E, J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1967, № 3).
4. Панасюк Н. Н. Нестационарная дифракция плоской волны напряжений на сферической полости в упругой среде. В сб.: Волны в сплошных средах, Киев, «Наукова думка», 1978.
5. Кубенко В. Д. О решении задач дифракции нестационарных упругих волн на препятствиях цилиндрической и сферической формы. Докл. АН УССР, Сер. А, 1975, № 10.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1965.
7. Лаврентьев М. А., Шабар Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. М., «Физматгиз», 1958.