МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1980

УДК 531.383

# ОБ ЭВОЛЮЦИИ РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКОГО К ВОЛЧКУ ЛАГРАНЖА

Л. М. МАРХАШОВ

*(Москва)*

Как известно, волчок Лагранжа при определенных начальных условиях допускает семейство регулярных прецессий. При изменении моментов инерции и координат центра масс на малые величины порядка $\varepsilon$ регулярная прецессия исчезает и при тех же начальных условиях возникают иные движения. Представляет интерес исследование характера этих движений и получения соответствующих количественных оценок [1].

Ранее подобные задачи исследовались и другими авторами. Р. И. Чертков для решения более общей задачи использовал метод Гамильтона – Якоби [1]. Однако общность подхода не позволила получить применительно к конкретной рассматриваемой здесь задаче достаточно простых формул в элементарных функциях. Такие формулы получены в предлагаемой заметке путем прямого интегрирования уравнений первого приближения. Отметим, что интегрирование такого рода уравнений является обязательным первым этапом в построении приближенных решений путем использования групп преобразований. В отличие от работы [2], где уравнения нулевого приближения по $\varepsilon$ были линейны, в данной работе они нелинейны. Поэтому получение решения представляет в последнем случае не вполне тривиальную задачу.

1. Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в гамильтоновой форме имеют вид

$$\varphi^{\cdot}=\frac{\partial H}{\partial p_1},\quad \psi^{\cdot}=\frac{\partial H}{\partial p_2},\quad \theta^{\cdot}=\frac{\partial H}{\partial p_3},\quad p_1^{\cdot}=-\frac{\partial H}{\partial \varphi},$$
$$p_2^{\cdot}=-\frac{\partial H}{\partial \psi},\quad p_3^{\cdot}=-\frac{\partial H}{\partial \theta} \tag{1.1}$$

В гамильтониане

$$H=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{A}(\chi\sin\varphi+p_3\cos\varphi)^2+\frac{1}{B}(\chi\cos\varphi-p_3\sin\varphi)^2+\frac{1}{C}p_1^2\right]+$$
$$+P(x_c\sin\theta\sin\varphi+y_c\sin\theta\cos\varphi+z_c\cos\theta),\qquad \chi=\frac{p_2-p_1\cos\theta}{\sin\theta}$$

$\varphi$, $\psi$, $\theta$, $p_1$, $p_2$, $p_3$ – углы Эйлера и сопряженные им импульсы.

Рассмотрим твердое тело, близкое к лагранжевому волчку. Положим: $B=A+\varepsilon$, $Px_c=a\varepsilon$, $Py_c=b\varepsilon$, $Pz_c=l$. Здесь $\varepsilon$ – малый параметр.

Раскладывая функцию Гамильтона в ряд по $\varepsilon$, получим в первом приближении

$$H=H_0+\varepsilon H_1,\qquad H_0=\frac{1}{2A}(\chi^2+p_3^2)+\frac{1}{2C}p_1^2+l\cos\theta$$
$$H_1=-\frac{1}{2A^2}(\chi\cos\varphi-p_3\sin\varphi)^2+a\sin\theta\sin\varphi+b\sin\theta\cos\varphi \tag{1.2}$$

[1] На это обратил внимание автора Г. К. Пожарицкий.

Начальные условия для регулярных прецессий удовлетворяют уравнениям

$$p_1=p_1^\circ,\quad p_2=p_2^\circ,\quad p_3=p_3^\circ=0,\quad l\sin\theta_0=\frac{\partial\chi_0}{\partial\theta}\frac{\chi_0}{A}\qquad(\theta=\theta_0)$$

Последнее условие может быть переписано в обычном виде

$$\omega_2[C\omega_1+(C-A)\,\omega_2\cos\theta_0]=l\qquad(\omega_1=\varphi_0^{\cdot},\quad\omega_2=\psi^{\cdot})$$

Решение возмущенной задачи в первом приближении при начальных условиях для координат и скоростей, отвечающих регулярной прецессии в невозмущенной задаче

$$\theta|_{t=0}=\theta_0,\quad\varphi|_{t=0}=\varphi_0,\quad\psi|_{t=0}=\psi_0,\ \theta^{\cdot}|_{t=0}=0,\quad\varphi^{\cdot}|_{t=0}=\omega_1,\quad\psi^{\cdot}|_{t=0}=\omega_2\tag{1.3}$$

оказывается следующим:

$$\theta=\theta_0+\varepsilon\Big\{C_1\cos\Omega t+C_2\sin\Omega t+\frac{1}{\Omega^2}\Big(p_\varphi\frac{l\cos\theta_0-A\omega_2^2}{A^2\,\omega_2\sin\theta_0}+p_\psi\frac{A\omega_2^2\cos\theta_0-l}{A^2\omega_2\sin\theta_0}+$$

$$+\frac{l\sin\theta_0}{2A^2}\Big)+\frac{1}{\Omega^2-\omega_1^2}\Big(\frac{A\omega_2^2-l\cos\theta_0}{A^2\omega_1\omega_2}-$$

$$-\frac{\cos\theta_0}{A}\Big)\,[b\cos(\omega_1t+\varphi_0)+a\sin(\omega_1t+\varphi_0)]+$$

$$+\frac{\sin\theta_0}{A(\Omega^2-4\omega_1^2)}\Big(\frac{l\cos\theta_0-A\omega_2^2}{4A\omega_1}\omega_2+\frac{l}{2A}+\omega_1\omega_2\Big)\cos(2\omega_1t+2\varphi_0)\Big\}$$

$$\theta^{\cdot}=\varepsilon\Big\{-C_1\Omega\sin\Omega t+C_2\Omega\cos\Omega t+\frac{\omega_1}{A(\Omega^2-\omega_1^2)}\Big(\frac{A\omega_2^2-l\cos\theta_0}{A\omega_1\omega_2}-\cos\theta_0\Big)\times$$

$$\times(a\cos(\omega_1t+\varphi_0)-b\sin(\omega_1t+\varphi_0))-\frac{2\omega_1\sin\theta_0}{A(\Omega^2-4\omega_1^2)}\times$$

$$\times\Big(\omega_2\frac{l\cos\theta_0-A\omega_2^2}{4A\omega_1}+\frac{l}{2A}+\omega_1\omega_2\Big)\sin(2\omega_1t+2\varphi_0)\Big\}$$

$$\varphi^{\cdot}=\omega_1+\varepsilon\Big\{\frac{\omega_2\cos\theta_0}{2A}-\frac{l}{2A^3\Omega^2}\Big(\frac{l}{\omega_2}\cos\theta_0-A\omega_2\Big)+\Big(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}+\frac{l^2}{A^3\Omega^2\omega_2^2}\Big)p_\varphi-$$

$$-\frac{p_\psi l}{A^2\Omega^2}-\Big[\frac{\sin\theta_0}{\omega_1}\Big(\frac{1}{C}+\frac{\cos^2\theta_0}{A\sin^2\theta_0}\Big)+$$

$$+\frac{1}{A^2(\Omega^2-\omega_1^2)\sin\theta_0}\Big(\frac{l}{\omega_2}\cos\theta_0-A\omega_2\Big)\Big(\frac{A\omega_2^2-l\cos\theta_0}{A\omega_1\omega_2}-\cos\theta_0\Big)\Big]\times$$

$$\times[b\cos(\omega_1t+\varphi_0)+a\sin(\omega_1t+\varphi_0)]+\Big[\frac{\omega_2\cos\theta_0}{2A}+$$

$$+\frac{\omega_2^2\sin^2\theta_0}{4\omega_1}\Big(\frac{1}{C}+\frac{\cos^2\theta_0}{A\sin^2\theta_0}\Big)-\frac{1}{A^3(\Omega^2-4\omega_1^2)}\Big(\frac{l}{\omega_2}\cos\theta_0-A\omega_2\Big)\times$$

$$\times\Big(\omega_2\frac{l\cos\theta_0-A\omega_2^2}{4\omega_1}+\frac{1}{2}+A\omega_1\omega_2\Big)\Big]\cos(2\omega_1t+2\varphi_0)-$$

$$-\frac{1}{A\sin\theta_0}\Big(\frac{l}{\omega_2}\cos\theta_0-A\omega_1C_1\cos\Omega t+C_2\sin\Omega t\Big)\Big\}$$

$$\psi^{\cdot}=\omega_2+\varepsilon\left\{-\frac{\omega_2}{2A}+\frac{l}{2A^3\Omega^2}+\frac{\omega_2^2}{A\Omega^2}p_\psi-\frac{l}{A^2\Omega^2}p_\varphi+\left[\frac{\operatorname{ctg}\theta_0}{A\omega_1}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{A(\Omega^2-\omega_1^2)\sin\theta_0}\left(\frac{A\omega_2^2-l\cos\theta_0}{A^2\omega_1\omega_2}-\frac{\cos\theta_0}{A}\right)\left(\frac{l}{\omega_2}-A\omega_2\cos\theta_0\right)\right]\times$$

$$\times(b\cos(\omega_1t+\varphi_0)+a\sin(\omega_1t+\varphi_0))+\left[-\frac{\omega_2^2\cos\theta_0}{4A\omega_1}-\frac{\omega_2}{2A}+\frac{1}{A^3(\Omega^2-4\omega_1^2)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{l}{\omega_2}-A\omega_2\cos\theta_0\right)\left(\omega_2\frac{l\cos\theta_0-A\omega_2^2}{4\omega_1}+\frac{l}{2}+A\omega_1\omega_2\right)\right]\cos(2\omega_1t+2\varphi_0)+$$

$$\left.+\frac{1}{A\sin\theta_0}\left(\frac{l}{\omega_2}-A\omega_2\cos\theta_0\right)(C_1\cos\Omega t+C_2\sin\Omega t)\right\}.$$

Законы изменения углов $\varphi$ и $\psi$ получаются прямым интегрированием написанных выражений. Постоянные $p_\varphi$, $p_\psi$, $C_1$, $C_2$, $\Omega$ имеют следующие значения:

$$p_\varphi=a\sin\varphi_0+b\cos\varphi_0-\frac{\omega_2^2}{4\omega_1}\sin\theta_0\cos2\varphi_0,\qquad p_\psi=\omega_2\sin^2\theta_0\cos^2\varphi_0$$

$$C_1=-\frac{1}{\Omega_2}\left(p_\varphi\frac{l\cos\theta_0-A\omega_2^2}{A^2\omega_2\sin\theta_0}+p_\psi\frac{A\omega_2^2\cos\theta_0-l}{A^2\omega_2\sin\theta_0}+\frac{l\sin\theta_0}{2A^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{\Omega^2-\omega_1^2}\left(\frac{\cos\theta_0}{A}-\frac{A\omega_2^2-l\cos\theta_0}{A^2\omega_1\omega_2}\right)(b\cos\varphi_0+a\sin\varphi_0)-$$

$$-\frac{\sin\theta_0}{A(\Omega^2-4\omega_1^2)}\left(\omega_2\frac{l\cos\theta_0-A\omega_2^2}{4A\omega_1}+\frac{l}{2A}+\omega_1\omega_2\right)\cos2\varphi_0$$

$$C_2=\frac{2\omega_1\sin\theta_0}{A\Omega(\Omega^2-4\omega_1^2)}\left(\frac{l\cos\theta_0-A\omega_2^2}{4A\omega_1}\omega_2+\frac{l}{2A}+\omega_1\omega_2\right)\sin2\varphi_0+$$

$$+\frac{\omega_1}{A(\Omega^2-\omega_1^2)}\left(\frac{A\omega_2^2-l\cos\theta_0}{A\omega_1\omega_2}-\cos\theta_0\right)(b\sin\varphi_0-a\cos\varphi_0)$$

Частота $\Omega$ определяется формулой

$$A^2\Omega^2=A^2\omega_2^2-2Al\cos\theta_0+l^2\omega_2^{-2}\geqslant0$$

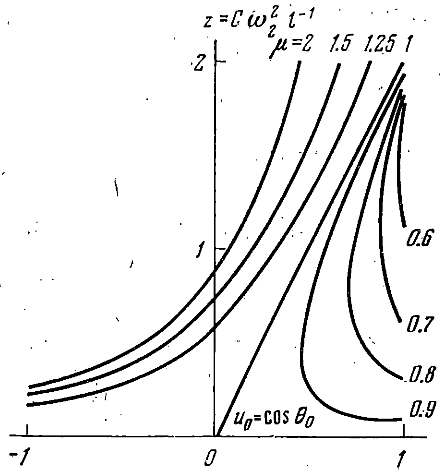
Из написанных формул видно, что угол $\theta$ совершает трехчастотные колебания с периодами $2\pi/\omega_1$, $2\pi/\Omega$, $2\pi/2\omega_1$, получающиеся простым сложением одночастотных колебаний. Аналогичные колебания накладываются на монотонно растущие (или убывающие) углы $\varphi$ и $\psi$. Скорость этого роста или убывания отличается от $\omega_1$ и $\omega_2$ (соответственно) на величины порядка $\varepsilon$, также определяемые указанными формулами. Эти формулы остаются справедливыми при тех начальных условиях, при которых частота $\Omega$ достаточно далека от резонансных значений $\Omega=\pm\omega_1$, $\Omega=\pm2\omega_1$.

Исключая частоту $\omega_1$ при помощи условия регулярной прецессии, получим соотношения между начальными условиями $\omega_2$ и $\theta_0$, отвечающие резонансам, в зависимости от параметра $\mu=A/C$:

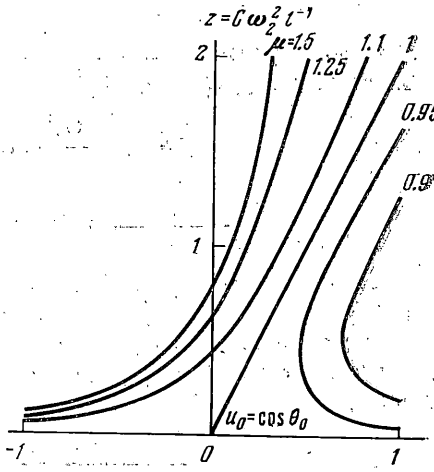
$$[1-(1-\mu)^2u_0^2]z^2+2u_0\left(1-\mu-\frac{1}{\mu}\right)z+\frac{1}{\mu^2}-1=0,\qquad u_0=\cos\theta_0$$

$$[1-4(1-\mu)^2u_0^2]z_0^2+2u_0\left(4-4\mu-\frac{1}{\mu}\right)z+\frac{1}{\mu^2}-1=0,\qquad z=\frac{C\omega_2^2}{l}$$

Резонансные кривые, построенные по этим зависимостям, изображены на фиг. 1 и 2. Для того чтобы при каждом фиксированном $\mu$ найденное приближенное решение было справедливым, начальные значения $\omega_2$ и $\theta_0$




Фиг. 1




Фиг. 2

не должны попадать в слишком близкую окрестность соответствующей резонансной кривой.

**2.** Кратко покажем, каким образом были получены результаты, изложенные в п. 1. Решение уравнений движения (1.1) с учетом разложения (1.2) будем искать в виде

$$\varphi=\omega_1+\varepsilon\varphi^*, \qquad \psi=\omega_2 t+\varepsilon\psi^*, \qquad \theta=\theta_0+\varepsilon\theta^* \tag{2.1}$$

$$p_1=p_1^0+\varepsilon p_1^*, \qquad p_2=p_2^0+\varepsilon p_2^*, \qquad p_3=\varepsilon p_3^*, \qquad p_i,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \theta_0=\text{const}$$

Подставив выражения (2.1) в уравнения (1.1), разложив в ряд по $\varepsilon$ правые части уравнений и сохранив в них лишь линейные по $\varepsilon$ члены, получим после ряда упрощений уравнения для возмущений

$$\varphi^{*\cdot}=-\frac{p_2^*\cos\theta_0}{A\sin^2\theta_0}+p_1^*\left(\frac{1}{C}+\frac{\cos^2\theta_0}{A\sin^2\theta_0}\right)-\frac{\theta^*}{A\sin\theta_0}\times$$

$$\times\left(\frac{l}{\omega_2}\cos\theta_0-A\omega_2\right)+\frac{\omega_2}{A}\cos\theta_0\cos^2(\omega_1 t+\varphi_0) \tag{2.2}$$

$$\psi^{*\cdot}=\frac{p_2^*}{A\sin^2\theta_0}-\frac{p_1^*\cos\theta_0}{A\sin^2\theta_0}+\frac{\theta^*}{A\sin\theta_0}\left(\frac{l}{\omega_2}-A\omega_2\cos\theta_0\right)-\frac{\omega_2\cos^2(\omega_1 t+\varphi_0)}{A}$$

$$\theta^{*\cdot}=\frac{p_3}{A}+\frac{\omega_2\sin\theta_0}{2A}\sin(2\omega_1 t+2\varphi_0)$$

$$p_1^{*\cdot}=-\frac{\omega_2^2}{2}\sin^2\theta_0\sin(2\omega_1 t+2\varphi_0)+b\sin\theta_0\sin(\omega_1 t+\varphi_0)-a\sin\theta_0\cos(\omega_1 t+\varphi_0)$$

$$p_3^{*\cdot}=-\frac{\theta^*}{A}\left(A^2\omega_2^2-2Al\cos\theta_0+\frac{l}{\omega_2^2}\right)-\frac{1}{A\sin\theta_0}\left[p_1^*\left(A\omega_2-\frac{l}{\omega_2}\cos\theta_0\right)+\right.$$

$$\left.+p_2^*\left(\frac{l}{\omega_2}-A\omega_2\cos\theta_0\right)\right]+\frac{l}{A}\sin\theta_0\cos^2(\omega_1 t+\varphi_0)-$$

$$-[a\sin(\omega_1 t+\varphi_0)+b\cos(\omega_1 t+\varphi_0)]\cos\theta_0$$

Исходные уравнения движения имеют циклический интеграл (интеграл моментов)

$$p_2 \equiv p_2^0 + \varepsilon p_2^* = A\psi^{\cdot} \sin^2\theta + C(\psi^{\cdot}\cos\theta + \varphi^{\cdot})\cos\theta +$$
$$+\varepsilon(\psi^{\cdot}\sin\theta\cos\varphi - \theta^{\cdot}\sin\varphi)\sin\theta\cos\varphi = \text{const}$$

Отсюда с учетом (2.1) найдем $p_2^* \equiv p_\psi = \omega_2 \sin^2\theta_0 \cos^2\varphi_0 = \text{const}$. Интегрируя уравнение для $p_1^*$ из (2.2), получим

$$p_1^* \equiv p_\varphi + \frac{\omega_2^2}{4\omega_1}\sin^2\theta_0 \cos(2\omega_1 t + 2\varphi_0) -$$
$$-\frac{\sin\theta_0}{\omega_1}[a\sin(\omega_1 t + \varphi_0) + b\cos(\omega_1 t + \varphi_0)] \tag{2.3}$$

Зависимость постоянной $p_\varphi$ от начальных условий найдем из соотношений $p_1 = C\psi^{\cdot}\cos\theta + C\varphi^{\cdot}$, (1.3) и (2.1).

Продифференцировав уравнение для $\theta^*$ из (2.2) и подставив в его правую часть выражения для $p_3^{*\cdot}$ из (2.2) и (2.3), получим легко интегрируемое уравнение для угла нутации

$$\begin{aligned}
\theta^{*\cdot\cdot} + \Omega^2\theta^* = {} & \frac{l\cos\theta_0 - A\omega_2^2}{A^2\omega_2\sin\theta_0}\Bigg[p_\varphi + \frac{\omega_2^2}{4\omega_1}\sin^2\theta_0\cos(2\omega_1 t + 2\varphi_0) - \\
& -\frac{\sin\theta_0}{\omega_1}[b\cos(\omega_1 t + \varphi_0) + a\sin(\omega_1 t + \varphi_0)]\Bigg] + \\
& + \frac{p_\psi}{A^2\sin\theta_0}\left(A\omega_2\cos\theta_0 - \frac{l}{\omega_2}\right) + \frac{l\sin\theta_0}{2A^2} - \\
& - \frac{\cos\theta_0}{A}[a\sin(\omega_1 t + \varphi_0) + b\cos(\omega_1 t + \varphi_0)] + \\
& + \left(\frac{l\sin\theta_0}{2A^2} + \frac{\omega_1\omega_2}{A}\sin\theta_0\right)\cos(2\omega_1 t + 2\varphi_0)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Легко проверить, что выражение в скобках неотрицательно. Далее интегрируется (2.3), а затем первые два уравнения (2.2). Возникающие при интегрировании уравнения (2.4) произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$ определяются начальными условиями $\theta^*|_{t=0} = \theta^{*\cdot}|_{t=0} = 0$.

Поступила 2 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чертков Р. И.* Метод Якоби в динамике твердого тела. Л., Судпромгиз, 1960.
2. *Мархашов Л. М.* Примеры исследования окрестности стационарных режимов в колебательных механических системах с малым параметром. ПММ, 1979, т. 43, вып. 2.