МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1980

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЧАСТНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ, ГРАНИЦЫ КОТОРОЙ ВЕСЬМА СБЛИЖЕНЫ В УЗКОЙ ЗОНЕ

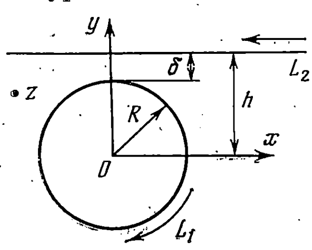
Д. И. ШЕРМАН

(Москва)

Вопрос о разработке метода рассмотрения задач теории потенциала и двумерной теории упругости для неодносвязной области с границами, круто сближенными в локальной узкой зоне, связан со значительными трудностями. Естественно, эти трудности серьезно усугубляются, когда речь идет о создании метода, который позволял бы проанализировать явление в узкой зоне, не решая задачи в целом[1]. В настоящее время известны лишь работы [1, 2], в которых приводится асимптотический анализ поля напряжений (в зоне концентрации) для двумерной упругой среды, ослабленной двумя круговыми отверстиями и подверженной действию нагрузки частного вида (последнее обстоятельство существенно сказалось на формировании привлеченной методики). Заметим, что глобальное решение той же задачи было в свое время дано Джаффери и Миндлиным [3, 4]. Подвергнув это решение специализированному интегральному преобразованию, Ю. А. Устинов получил свой результат.

1. Пусть задана полубесконечная двусвязная область S, ограниченная прямой L_2 и окружностью L_1 радиуса R с центром в начале координат.

Рассмотрим задачу об определении функции $u(x, y)$, гармонической в области S и исчезающей на бесконечности при заданных ее значениях на контурах L_2 и L_1, ограничивающих область (фигура). Введем функцию



$\varphi(z)$, регулярную в той же области S от переменного $z=x+iy$, и с вещественной частью, совпадающей с искомой $u(x, y)$; будем считать, что $\varphi(z)$ обращается в нуль на бесконечности.

Краевые условия задачи теперь запишутся следующим образом:

$$\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}=f_1(t)+2C_1 \text{ на } L_1 \qquad (1.1)$$

$$\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}=f_2(t) \qquad \text{на } L_2 \qquad (1.2)$$

где t — аффикс точки границы; $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — задаваемые вещественные функции переменного t, причем $f_2(\infty)=0$; C_1 — некая вещественная постоянная, подлежащая определению.

Введем на окружности L_1 чисто мнимую функцию $\omega(t)$, согласно условию

$$\varphi(t)-\overline{\varphi(t)}=2\omega(t) \text{ на } L_1 \qquad (1.3)$$

Почленно сложив краевые равенства (1.1) и (1.3), будем иметь

$$\varphi(t)=\omega(t)+{}^1/_2 f_1(t)+C_1 \text{ на } L_1 \qquad (1.4)$$

Это же (вспомогательное) краевое равенство запишем еще и так (постоянная C_1, фигурирующая в числителе дробной функции под знаком пер-

[1] Здесь имеется в виду именно такая постановка вопроса. Ее важность и перспективность отмечались в личных беседах с А. Л. Гольденвейзером.

вого интеграла справа, очевидно, выпадает из рассмотрения):

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{L_1\\ z\to t_0 \text{ извне } L_1}}\frac{\omega(t)+{}^1/_2 f_1(t)+C_1}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{L_1\\ z\to t_0 \text{ изнутри } L_1}}\frac{\omega(t)+{}^1/_2 f_1(t)+C_1}{t-z}dt \tag{1.5}$$

Введем в полубесконечной области S новую, регулярную в ней функцию $\varphi^*(z)$ по формуле

$$\varphi^*(z)=\varphi(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\omega(t)+{}^1/_2 f_1(t)}{t-z}dt \tag{1.6}$$

Ясно, что $\varphi^*(z)$, так же как и $\varphi(z)$, принимает в удаленной части области S сколь угодно малые по модулю значения. Из равенства (1.5) видно, что $\varphi^*(z)$ продолжима в круг, ограниченный L_1, и определяется там равенством

$$\varphi^*(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\omega(t)+{}^1/_2 f_1(t)}{t-z}dt+C_1 \tag{1.7}$$

Таким образом, введенная функция $\varphi^*(z)$ является регулярной во всей полуплоскости, ограниченной внешним (прямолинейным) контуром L_2.

Выражение для $\varphi(z)$, извлекаемое из соотношения (1.6), подставим в исходное краевое условие (1.2). Получим краевое равенство вида

$$\varphi^*(t)+\overline{\varphi^*(t)}=\Omega(t_0) \text{ на } L_2 \tag{1.8}$$

где функция, содержащаяся справа, зависит, что существенно, от промежуточной неизвестной функции $\omega(t)$ и определяется соотношением (для простоты полагаем $f_2(t)=0$):

$$\Omega(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left[-\frac{\omega(t)+{}^1/_2 f_1(t)}{t-t_0}dt+\frac{-\omega(t)+{}^1/_2 f_1(t)}{\bar t-\bar t_0}\overline{dt}\right] \tag{1.9}$$

В соответствии с этим условие (1.8) запишем иначе:

$$\varphi^*(t_0)+\overline{\varphi^*(t_0)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left[-\frac{\omega(t)+{}^1/_2 f_1(t)}{t-t_0}dt+\right.$$

$$\left.+\frac{-\omega(t)+{}^1/_2 f_1(t)}{\bar t-\bar t_0}\overline{dt}\right] \text{ на } L_2 \tag{1.10}$$

Учитывая, что в этом равенстве $t_0=x_0+ih$ и $\bar t_0=t_0-2ih$, где x_0 — абсцисса точки прямолинейной границы, будем иметь (точка t принадлежит окружности L_1):

$$\frac{\overline{dt}}{\bar t-\bar t_0}=T(t,t_0)\,dt,\qquad T(t,t_0)=\left(t-\frac{R^2}{t_0-2ih}\right)^{-1}-\frac{1}{t} \tag{1.11}$$

При помощи последнего соотношения придадим предельному равенству (1.10) следующую форму:

$$\varphi^*(t_0)+\overline{\varphi^*(t_0)}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left\{\frac{\omega(t)+{}^1/_2 f_1(t)}{t-t_0}+\right.$$

$$\left.+\left[\omega(t)-\frac{1}{2}f_1(t)\right]T(t,t_0)\right\}dt \text{ на } L_2 \tag{1.12}$$

Для точки $t_0=x_0+ih$, расположенной на L_2, имеем

$$\left|\frac{R^2}{t_0-2ih}\right|=R\left|\frac{R}{x_0-ih}\right|=R\frac{R}{\sqrt{x_0^2+h^2}}<R$$

С другой стороны, и для любой точки $z=x+iy$, лежащей в полуплоскости с прямолинейной границей $L_2\,(y\leqslant h)$, находим

$$\left|\frac{R^2}{z-2ih}\right|=R\frac{R}{\sqrt{x^2+(2h-y)^2}}<R\frac{R}{\sqrt{x^2+h^2}}<R$$

Отсюда вытекает, что выражение

$$T(t,t_0)=\left(t-\frac{R^2}{t_0-2ih}\right)^{-1}-\frac{1}{t}$$

в (1.12) остается регулярным (поскольку $|t|=R$) в той же полуплоскости (оно продолжается в нее через переменную t_0 — формальной ее заменой на z).

Учитывая это, найдем на первом этапе для (регулярной везде в полуплоскости $y\leqslant h$) функции $\varphi^*(z)$ такое выражение (оно содержит неизвестную функцию $\omega(t)$):

$$\varphi^*(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left[\omega(t)-\frac{1}{2}f_1(t)\right]T(t,z)\,dt$$

$$T(t,z)=\left(t-\frac{R^2}{z-2ih}\right)^{-1}-\frac{1}{t} \tag{1.13}$$

При этом из выписанной формулы явствует, что функция $\varphi^*(z)$ удовлетворяет (как и предписывается (1.6)) условию $\varphi^*(\infty)=0$. В дальнейшем понадобятся значения функции $\varphi^*(z)$ и с ней сопряженной $\overline{\varphi^*(z)}$ на внутреннем контуре L_1. Выпишем формулу для второй из них, автоматически заменив входящие всюду в (1.13) величины их сопряженными значениями (и, помня, что плотность $\omega(t)$ — чисто мнимая, а $f_1(t)$ — вещественная величины):

$$\overline{\varphi^*(t_0)}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left[\omega(t)+\frac{1}{2}f_1(t)\right]\overline{T(t,t_0)\,dt}\ \text{на } L_1 \tag{1.14}$$

Формула (1.13) позволяет придать равенству (1.7) следующий более развернутый вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left\{\left[\omega(t)+\frac{1}{2}f_1(t)\right]\frac{1}{t-z}+\left[-\omega(t)+\frac{1}{2}f_1(t)\right]T(t,z)\right\}dt=C_1 \tag{1.15}$$

2. Будем считать δ/R (наряду с далее введенным параметром ε_0/R) весьма малой величиной и в связи с этим условимся везде в последующем пренебрегать величинами более высокого порядка малости (по сравнению с δ/R).

Пусть переменная t_0 изменяется вдоль отрезка дуги окружности L_1 на весьма малом протяжении окрестности вершины $t_0=iR$ и симметрично относительно нее так, что точки этой дуги фиксируются комплексными координатами

$$t_0=R\exp[i(\pi/2\mp\alpha)]=iR\exp\mp i\alpha,\quad 0<\alpha\leqslant\alpha_0$$

где α_0 — также очень малое число. Те же аффиксы

$$t_0 = iR(\cos\alpha \mp i \sin\alpha) = iR(1 \mp i\alpha + O(\alpha^2)) =$$
$$= iR \pm R\alpha + \ldots = iR \pm \varepsilon + \ldots \tag{2.1}$$

причем $\varepsilon = R\alpha$ — малая длина дуги ($\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = R\alpha_0$) и многоточия обозначают опускаемые слагаемые более высокого порядка малости, нежели ε. (Далее необходимо неукоснительно придерживаться этого основного положения.)

Выделим весьма узкий прямоугольник с основанием $2\varepsilon_0$ и высотой δ, считая (что возможно) $2\varepsilon_0 \leqslant \delta$. Далее, положим $z - iR = \eta$, где η — малая по модулю величина с (отсчитываемой от $t_0 = iR$) неотрицательной чисто мнимой частью, не превосходящей по величине δ, и с вещественной частью, численно уступающей ε_0; при этом точка $z = iR + \eta$ не выходит за пределы прямоугольника. Принимая это во внимание, находим (не забывая о малости $|z - iR|$):

$$\frac{R^2}{z-2ih} = -\frac{R^2}{i(R+2\delta)}\left[1 - \frac{z-iR}{i(R+2\delta)}\right]^{-1} = (z-iR)\left(1 - 4\frac{\delta}{R} + \ldots\right) +$$
$$+ iR - 2i\delta\left(1 - 2\frac{\delta}{R} + \ldots\right) = z - 2i\delta + \ldots \tag{2.2}$$

так, что (с допускаемой точностью)

$$R^2/(z-2ih) = z - 2i\delta \tag{2.3}$$

или же (что то же самое)

$$R^2/(z-2ih) = t_0 - 2i\delta + (\eta \mp \varepsilon) \tag{2.4}$$

Как нетрудно заметить, величина модуля

$$\left|\frac{R^2}{z-2ih} - (z-2i\delta)\right| = \left|-\frac{(\eta-2i\delta)^2}{z-2ih}\right| \leqslant \frac{4\delta^2+\varepsilon_0^2}{R-2\delta}.$$

Ясно, что аналогичная (2.3) приближенная формула имеет место и для точек t_0 малой дуги окружности L_1 (при $z \to t_0$ величина $\eta \to \pm\varepsilon$)

$$R^2/(t_0-2ih) = t_0 - 2i\delta \text{ на } \gamma_{2\varepsilon_0} \tag{2.5}$$

В справедливости этого же равенства можно убедиться, слегка видоизменив только что проделанные выкладки. Действительно, имеем

$$\frac{R^2}{z-2ih} = \frac{R^2}{t_0-2ih}\,\frac{1}{[1+(\eta\mp\varepsilon)/(t_0-2ih)]} =$$
$$= \frac{R^2}{t_0-2ih} - (\eta\mp\varepsilon)\left(\frac{R}{t_0-2ih}\right)^2 + \ldots$$

Далее находим

$$\frac{R}{t_0-2ih} = \frac{i}{1+i(\pm\varepsilon-2i\delta)/R} = i + \frac{\pm\varepsilon-2i\delta}{R} + \ldots$$

и отсюда с должным приближением приходим к соотношению

$$\left(\frac{R}{t_0-2ih}\right)^2 = -\left[1 - 2i\frac{\pm\varepsilon-2i\delta}{R} + \ldots\right]$$

Возвращаясь к равенству, которое предшествует предпоследнему, будем иметь

$$\frac{R^2}{z-2ih}=\frac{R^2}{t_0-2ih}+(\eta\mp\varepsilon)-2i(\eta\mp\varepsilon)\frac{\pm\varepsilon-2i\delta}{R}+\ldots$$

или с принятой точностью счета

$$\frac{R^2}{z-2ih}=\frac{R^2}{t_0-2ih}+(\eta\mp\varepsilon) \tag{2.6}$$

Сопоставляя это равенство с (2.4), придем (с точностью до малых высшего порядка) к (2.5).

То же соотношение (2.5) легко устанавливается и непосредственно. В самом деле, имеем

$$\frac{R^2}{t_0-2ih}=\frac{R^2}{-iR\pm\varepsilon-2i\delta}=iR\left[1\pm\frac{\varepsilon}{iR}-\frac{2\delta}{R}+\ldots\right]=t_0-2i\delta+\ldots$$

что и совпадает с (2.5).

Посмотрим, как и в какой мере допустимо провести упрощение интегральных выражений в равенстве (1.14), не отходя от положенного в основу принципа, состоящего в сохранении лишь величин до первого порядка малости (влючительно). Абстрагируясь пока от (остающихся нетронутыми) плотностей $\omega(t)$ и $f(t)$, будем последовательно иметь

$$\frac{d\bar{t}}{\bar{t}-R^2/(\bar{t}_0+2ih)}=-\frac{dt}{t[1-tt_0/(R^2+2iht_0)]}=$$

$$=\left[-\frac{1}{t}+\left(t-\frac{R^2+2iht_0}{t_0}\right)^{-1}\right]dt \tag{2.7}$$

Учитывая формулу (2.1), придем к соотношению

$$\frac{R^2+2iht_0}{t_0}=2ih+\frac{R^2}{iR\pm\varepsilon}=(iR\pm\varepsilon)+2i\delta+\ldots=t_0+2i\delta+\ldots \tag{2.8}$$

На его основе из предшествующего равенства получаем

$$\frac{d\bar{t}}{\bar{t}-R^2/(\bar{t}_0+2ih)}=\left[\frac{1}{t-(t_0+2i\delta)}-\frac{1}{t}\right]dt \tag{2.9}$$

Стало быть, обе формулы (1.13) и (1.14) вследствие (2.5) и (2.9) трансформируются в следующие (на выделенной дуге окружности L_1):

$$\varphi^*(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left[-\omega(t)+\frac{1}{2}f(t)\right]\left[\frac{1}{t-(t_0-2i\delta)}-\frac{1}{t}\right]dt$$

$$\overline{\varphi^*(t_0)}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left[\omega(t)+\frac{1}{2}f(t)\right]\frac{dt}{t-(t_0+2i\delta)} \tag{2.10}$$

Произведем теперь разбиение в отдельности неизвестной функции $\omega(t)$ и задаваемой функции $f(t)$ соответственно на такие пары слагаемых

$$\omega(t)=\chi_e(t)-\chi_i(t),\ f(t)=h_e(t)-h_i(t)\ \text{на}\ L_1 \tag{2.11}$$

где функции $\chi_e(z)$ и $h_e(z)$ регулярны во внешности окружности L_1 и исчезают на бесконечности, а остальные $\chi_i(z)$ и $h_i(z)$ регулярны в смежном круге, ограниченном L_1. Отсюда, не забывая о принятом направлении обхода L_1 (см. фигуру), будем иметь

$$\chi_e(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\omega(t)}{t-z}dt,\qquad h_e(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

$$\chi_e(\infty)=h_e(\infty)=0 \tag{2.12}$$

для точки z, лежащей вне окружности L_1, и затем

$$\chi_i(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\omega(t)}{t-z}dt,\qquad h_i(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{f(t)}{t-z}dt \tag{2.13}$$

когда точка z расположена внутри L_1.

3. Краевые условия на контуре L_1, как задаваемое (1.1), так и посредствующее (1.3) (имеющее чисто служебное назначение), будем рассматривать преимущественно на выделенной малой дуге $\gamma_{2\varepsilon_0}$. При этом даваемые интегралами типа Коши представления для заключающихся в (1.13), (1.14) функции $\varphi^*(t)$ и сопряженной с ней $\overline{\varphi^*(t_0)}$ следует брать в надлежащей мере упрощенными (согласно предельным формулам (2.10)).

Рассмотрим вспомогательное уравнение (1.3). Подставив в него значение $\varphi(t_0)$ из (1.6), непосредственно получим

$$\varphi^*(t_0)-\overline{\varphi^*(t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\omega(t)\,d\left(\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}\right)+$$

$$+\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_1}f_1(t)\left[\frac{dt}{t-t_0}+\frac{\overline{dt}}{\bar t-\bar t_0}\right]=\omega(t_0) \tag{3.1}$$

Затем, учитывая формулы

$$\frac{\overline{dt}}{\bar t-\bar t_0}=\left(\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{t}\right)dt,\qquad d\left(\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}\right)=\frac{dt}{t}$$

приведем (3.1) к более обозримому виду

$$\varphi^*(t_0)-\overline{\varphi^*(t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left\{\frac{\omega(t)}{t}+f_1(t)\left[\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{2t}\right]\right\}dt=\omega(t_0) \tag{3.2}$$

Вычитая почленно одно из другого равенства (2.10), будем иметь (заметим повторно, что выписываемое соотношение справедливо лишь на той же дуге $\gamma_{2\varepsilon_0}$):

$$\varphi^*(t_0)-\overline{\varphi^*(t_0)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left\{\left[-\omega(t)+\frac{1}{2}f_1(t)\right]\left[\frac{1}{t-(t_0-2i\delta)}-\frac{1}{t}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\omega(t)+\frac{1}{2}f_1(t)\right]\frac{1}{t-(t_0+2i\delta)}\right\}dt \tag{3.3}$$

Ясно, что преобразованные указанным образом общие выражения для функции $\varphi^*(z)$ и с ней сопряженной $\overline{\varphi^*(z)}$ в выбранной узколокальной зоне не сохраняют в неприкосновенности всех присущих этим функциям глобальных свойств (т. е. всюду в полуплоскости, ограниченной L_2, и, в частности, внутри окружности L_1). Упрощенные для них выражения улавливают и подчеркивают в главном лишь их поведение на дуге $\gamma_{2\varepsilon_0}$.

Равенство (3.2) принимает на этой же дуге следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\left\{\left[-\omega(t)+\frac{1}{2}f_1(t)\right]\left[\frac{1}{t-(t_0-2i\delta)}-\frac{2}{t}\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\omega(t)+\frac{1}{2}f_1(t)\right]\frac{1}{t-(t_0+2i\delta)}+\frac{f_1(t)}{t-t_0}\right\}dt=\omega(t_0) \qquad (3.4)$$

Обратившись к упомянутому разбиению функций $\omega(t)$ и $f_1(t)$ (фиксируемому равенствами (2.11), (2.12) и (2.13)), найдем одно за другим соотношения такого рода

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\omega(t)\frac{dt}{t-(t_0-2i\delta)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\chi_i(t)\frac{dt}{t-(t_0-2i\delta)}=-\chi_i(t_0-2i\delta)$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\omega(t)\frac{dt}{t-(t_0+2i\delta)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\chi_e(t)\frac{dt}{t-(t_0+2i\delta)}=\chi_e(t_0+2i\delta)$$
$$\frac{1}{4\pi i}\int_{L_1}f_1(t)\frac{dt}{t-(t_0-2i\delta)}=-\frac{1}{4\pi i}\int_{L_1}h_i(t)\frac{dt}{t-(t_0-2i\delta)}=\frac{1}{2}h_i(t_0-2i\delta)$$
$$\frac{1}{4\pi i}\int_{L_1}f_1(t)\frac{dt}{t-(t_0+2i\delta)}=\frac{1}{4\pi i}\int_{L_1}h_e(t)\frac{dt}{t-(t_0+2i\delta)}=\frac{1}{2}h_e(t_0+2i\delta) \qquad (3.5)$$
$$\frac{1}{\pi i}\int_{L_1}\frac{f_1(t)}{t-t_0}dt=h_i(t_0)+h_e(t_0)$$

В силу этих соотношений придадим предельному равенству (3.4) такой вид на $\gamma_{2\varepsilon_0}$:

$$-\chi_i(t_0-2i\delta)+\chi_e(t_0+2i\delta)+\frac{1}{2}\left[h_i(t_0-2i\delta)+h_e(t_0+2i\delta)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[h_i(t_0)+h_e(t_0)\right]+\frac{1}{\pi i}\int_{L_1}\left[\omega(t)-\frac{1}{2}f_1(t)\right]\frac{dt}{t}=\chi_e(t_0)-\chi_i(t_0) \qquad (3.6)$$

Используя далее формулы конечных приращений $\chi_i(t_0-2i\delta)=\chi_i(t_0)-2i\delta\chi_i'(t_0)$, $\chi_e(t_0+2i\delta)=\chi_e(t_0)+2i\delta\chi_e'(t_0)$ и им подобные для функций $h_i(t_0-2i\delta)$ и $h_e(t_0+2i\delta)$, приведем (3.6) к следующей форме:

$$[\chi_i(t_0)+\chi_e(t_0)]_{t_0}'=\frac{1}{2}[h_i'(t_0)-h_e'(t_0)]+\frac{1}{2i\delta}\left[-(h_i(t_0)+h_e(t_0))\right]-$$
$$\left.-\frac{1}{\pi i}\int_{L_1}\left(\omega(t)-\frac{1}{2}f_1(t)\right)\frac{dt}{t}\right] \text{ на } \gamma_{2\varepsilon_0} \qquad (3.7)$$

По всей видимости, не представляется возможным получить отсюда сколь-либо приемлемую прозрачную информацию о поведении на $\gamma_{2\varepsilon_0}$ посредствующей функции $\omega(t)$, тесно связанной с искомой $\varphi(t)$ элементарным соотношением (1.4).

Переходим, поэтому, к первому (основному) краевому условию[1] (1.1).

---

[1] Оно было наряду с (1.3) введено в обращение при построении формул (1.6) и (1.7), а затем на базе условия (1.2) и функции $\varphi^*(z)$. Однако выполнение этих операций само по себе (без использования в необходимой мере равенства (1.7)) не обеспечивает соблюдения (1.1).

Выпишем в подробностях (опять-таки на дуге $\gamma_{2\varepsilon_0}$) условие (1.1), основываясь при этом на той же совокупности формул, что была использована при выводе (3.7):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{L_1\\ z\to t_0 \text{ извне } L_1}}\left\{\left[-\omega(t)+\frac{1}{2}f_1(t)\right]\left[\frac{1}{t-(t_0-2i\delta)}-\frac{1}{t}\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\omega(t)+\frac{1}{2}f_1(t)\right]\frac{1}{t-(t_0+2i\delta)}\right\}dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\omega(t)+{}^1/{}_2 f_1(t)}{t-z}dt+$$

$$+\overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{L_1\\ z\to t_0 \text{ извне } L_1}}\frac{\omega(t)+{}^1/{}_2 f_1(t)}{t-z}dt}=f_1(t_0)+2C_1 \text{ на } \gamma_{2\varepsilon_0} \qquad (3.8)$$

Имеет смысл, расчленяя поэтапно обработку этого соотношения, в первую очередь привести, по возможности, к элементарной форме находящуюся слева последнюю пару слагаемых.

Непосредственно имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{L_1\\ z\to t_0 \text{ извне } L_1}}\frac{\omega(t)+{}^1/{}_2 f_1(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2}\left[\omega(t_0)+\frac{1}{2}f_1(t_0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\omega(t)+{}^1/{}_2 f_1(t)}{t-t_0}dt$$

$$\overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{L_1\\ z\to t_0 \text{ извне } L_1}}\frac{\omega(t)+{}^1/{}_2 f_1(t)}{t-z}dt}=\frac{1}{2}\left[-\omega(t_0)+\frac{1}{2}f_1(t_0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left[\omega(t)-\frac{1}{2}f_1(t)\right]\left(\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{t}\right)dt$$

Сложив почленно эти равенства, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{L_1\\ z\to t_0 \text{ извне } L_1}}\frac{\omega(t)+{}^1/{}_2 f_1(t)}{t-z}dt+\overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{L_1\\ z\to t_0 \text{ извне } L_1}}\frac{\omega(t)+{}^1/{}_2 f_1(t)}{t-z}dt}=$$

$$=\frac{1}{2}f_1(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_1}\left\{\omega(t)\left[\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{2t}\right]+\frac{1}{4t}f_1(t)\right\}dt \qquad (3.9)$$

Последнее соотношение позволяет придать формуле (3.8) следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left\{\left[-\omega(t)+\frac{1}{2}f_1(t)\right]\frac{1}{t-(t_0-2i\delta)}-\right.$$

$$\left.-\left[\omega(t)+\frac{1}{2}f_1(t)\right]\frac{1}{t-(t_0+2i\delta)}\right\}dt+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_1}\omega(t)\frac{dt}{t-t_0}=\frac{1}{2}f_1(t_0)+2C_1 \qquad (3.10)$$

на дуге $\gamma_{2\varepsilon_0}$

Каждый из интегралов, фигурирующих в этом равенстве, выразим в более удобной и доступной обозрению форме. Учитывая разбиения функций $\omega(t)$ и $f_1(t)$, и положение точек $z=t_0-2i\delta$ и $z=t_0+2i\delta$ соответственно внутри и вне окружности L_1, последовательно найдем:

$$-\chi_i(t_0-2i\delta)-\chi_e(t_0+2i\delta)+\chi_i(t_0)+\chi_e(t_0)+$$
$$+{}^1/_2[h_i(t_0-2i\delta)-h_e(t_0+2i\delta)]={}^1/_2 f_1(t_0)+2C_1 \quad \text{на} \quad \gamma_{2\varepsilon_0} \tag{3.11}$$

При выводе этого соотношения была использована также формула

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\omega(t)}{t-t_0}dt=\chi_i(t_0)+\chi_e(t_0) \quad \text{на} \quad L_1 \tag{3.12}$$

Имеем разложения вида (где по-прежнему всюду сохраняем малые величины первого порядка)

$$-\chi_i(t_0-2i\delta)-\chi_e(t_0+2i\delta)+\chi_i(t_0)+\chi_e(t_0)=2i\delta(\chi_i'(t_0)-\chi_e'(t_0))+\ldots$$
$${}^1/_2[h_i(t_0-2i\delta)-h_e(t_0+2i\delta)]=-{}^1/_2[h_e(t_0)-h_i(t_0)]-$$
$$-i\delta[h_i'(t_0)+h_e'(t_0)]+\ldots=-{}^1/_2 f_1(t_0)-i\delta[h_i'(t_0)+h_e'(t_0)]+\ldots$$

Принимая во внимание разбиение $\omega(t)$ в (2.11) на пару составляющих и, кроме того, учитывая оба выписанных последних соотношения, придадим промежуточному условию (3.11) следующую форму (оно выписывается с достаточным приближением):

$$\omega'(t_0)=-\frac{1}{2}[h_i'(t_0)+h_e'(t_0)]-\frac{1}{2i\delta}[f_1(t_0)+2C_1] \quad \text{на} \quad \gamma_{2\varepsilon_0} \tag{3.13}$$

или же в силу (1.4) еще такую

$$\varphi'(t_0)=-h_i'(t_0)-\frac{1}{2i\delta}[f_1(t_0)+2C_1] \quad \text{на} \quad \gamma_{2\varepsilon_0} \tag{3.14}$$

Однако лишь после нахождения постоянной C_1 можно вывести окончательное суждение о характере асимптотики, свойственной выражению (3.14).

Следует иметь в виду, что задаваемая вещественная функция $f_1(t)$ представима на L_1 рядом Фурье

$$f_1(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\left(\frac{t}{R}\right)^k+\bar{a}_k\left(\frac{R}{t}\right)^k\right]$$

где a_0 — вещественная, а остальные a_k — вообще говоря, комплексные постоянные.

Весьма важно в разбираемом конкретном случае найти C_1 непосредственно из равенства (1.15), минуя осложнения, связанные с глобальным рассмотрением трактуемой задачи теории потенциала, т. е. в соответствии с тем, как это предусматривается исходной постановкой вопроса. На первый взгляд, этому препятствует входящая в (1.15) пара интегралов типа Коши с подлежащей определению плотностью $\omega(t)$. Один из этих интегралов содержит под своим знаком независимую переменную z, а другой заключает в себе иную переменную, выражаемую дробно-линейно через ту же z; последняя, изменяясь вместе с z, остается (наряду с нею) внутри той же окружности L_1. Выясним, не становятся ли обе названные переменные фактически одинаковыми по значению в некоей фиксированной точке того же круга; ясно, что аффиксом этой точки (если таковая существует) должен служить корень квадратного уравнения

$$z=R^2/(z-2ih), \quad z_{1,2}=i[(R+\delta)\mp\sqrt{2R\delta+\delta^2}] \tag{3.15}$$

Очевидно, первый корень, по модулю меньший R

$$z_1=i[(R+\delta)-\sqrt{2R\delta+\delta^2}] \tag{3.16}$$

расположен в круге, ограниченном L_1. Имеем

$$z_1=iR\left[1-\sqrt{2}\sqrt{\frac{\delta}{R}}+\frac{\delta}{R}-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\delta}{R}\right)^{3/2}+\ldots\right] \tag{3.17}$$

где через многоточие обозначены слагаемые, первое из которых имеет порядок малости $O(\delta/R)^{5/2}$.

Полагая в (1.15) переменную $z=z_1$, найдем (из этого равенства выпадают, взаимно сокращаясь, интегралы типа Коши, зависящие от $\omega(t)$):

$$C_1-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\omega(t)\frac{dt}{t}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}f_1(t)\left(\frac{1}{t-z_1}-\frac{1}{2t}\right)dt \tag{3.18}$$

Отделяя в этом соотношении вещественную и мнимую части, получим

$$C_1=\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}f_1(t)\frac{dt}{t-z_1}-\frac{1}{4\pi i}\int_{L_1}f_1(t)\frac{dt}{t} \tag{3.19}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\omega(t)\frac{dt}{t}=i\,\mathrm{Im}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}f_1(t)\frac{dt}{t-z_1} \tag{3.20}$$

Отсюда, учитывая принятое разбиение (2.11), находим

$$2C_1=h_i(z_1)+\overline{h_i(z_1)}+a_0 \tag{3.21}$$

Далее, в предположении, что функция $h_i(z)$ остается регулярной и в некоторой малой окрестности точки $t=iR$, справедливо разложение

$$h_i(z_1)=h_i(iR)-i\sqrt{2}R\sqrt{\frac{\delta}{R}}h_i'(iR)+$$

$$+iR\frac{\delta}{R}[h_i'(iR)+iRh_i''(iR)]+O\left(\frac{\delta}{R}\right)^{3/2} \tag{3.22}$$

и, стало быть, предшествующее равенство можно представить в такой развернутой форме

$$2C_1=[h_i(iR)+\overline{h_i(iR)}+a_0]+p\sqrt{\frac{\delta}{R}}+q\frac{\delta}{R}+O\left(\frac{\delta}{R}\right)^{3/2} \tag{3.23}$$

$$p=-i\sqrt{2}R[h_i'(iR)-\overline{h_i'(iR)}]=$$

$$=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[i(2n+1)(a_{2n+1}-\overline{a_{2n+1}})-(2n+2)(a_{2(n+1)}+\overline{a_{2(n+1)}})]$$

$$q=iR\{[h_i'(iR)-\overline{h_i'(iR)}]+iR[h_i''(iR)+\overline{h_i''(iR)}]\}=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{(2n+2)^2 (a_{2n+2} + \overline{a_{2n+2}}) - i[(2n+1)(a_{2n+1} - \overline{a_{2n+1}}) -$$

$$- (2n+2)(2n+3)(a_{2n+3} - \overline{a_{2n+3}})]\}$$

Наконец, как легко видеть

$$f_1(t_0) + 2C_1 = [f_1(t_0) - f_1(iR)] + [f_1(iR) + h_i(iR) + \overline{h_i(iR)} + a_0] +$$

$$+ p\sqrt{\frac{\delta}{R}} + q\frac{\delta}{R} + O\left(\frac{\delta}{R}\right)^{3/2} \tag{3.24}$$

Из формулы (3.14) следует, что

$$h_e(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k \left(\frac{R}{t}\right)^k, \quad h_i(t) = -a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R}\right)^k \tag{3.25}$$

Кроме того, надо не упускать из вида условие (оно соблюдается благодаря свойству, приданному заданной функции)

$$|f_1(t_0) - f_1(iR)| < B\varepsilon_0' \quad (\varepsilon_0' \leqslant \varepsilon_0) \tag{3.26}$$

где B — некоторая фиксированная положительная константа.

Затем отметим еще очевидное равенство

$$f_1(iR) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [\eta_n (a_{2n} + \overline{a_{2n}}) + i(a_{2n+1} - \overline{a_{2n+1}})], \quad \eta_0 = \frac{1}{2}, \quad \eta_n = 1 \quad (n>0) \tag{3.27}$$

и тождественно выполняющееся соотношение

$$f_1(iR) + h_i(iR) + \overline{h_i(iR)} + a_0 = 0 \tag{3.28}$$

в связи с чем формула (3.24) заметно упрощается и приобретает вид

$$f_1(t_0) + 2C_1 = [f_1(t_0) - f_1(iR)] + p\sqrt{\frac{\delta}{R}} + q\frac{\delta}{R} + O\left(\frac{\delta}{R}\right)^{3/2} \text{ на } \gamma_{2\varepsilon_0}. \tag{3.29}$$

Формула (3.13) запишется при этом в такой форме

$$\omega'(t_0) = -\frac{1}{2i}\frac{p/R}{\sqrt{\delta/R}} + P(t_0) \text{ на } \gamma_{2\varepsilon_0} \tag{3.30}$$

$$P(t_0) = -\frac{f_1(t_0) - f_1(iR)}{2i\delta} - \frac{1}{2}[h_i'(t_0) + h_e'(t_0)] - \frac{1}{2i}\frac{q}{R} + O\left(\frac{\delta}{R}\right)^{1/2}$$

Для производной же искомой функции находим

$$\varphi'(t_0) = -\frac{1}{2i}\frac{p/R}{\sqrt{\delta/R}} + Q(t_0) \text{ на } \gamma_{2\varepsilon_0} \tag{3.31}$$

$$Q(t_0) = \frac{f_1(t_0) - f_1(iR)}{2i\delta} - h_i'(t_0) - \frac{1}{2i}\frac{q}{R} + O\left(\frac{\delta}{R}\right)^{1/2} \tag{3.32}$$

Как видно, функции $P(t_0)$ и $Q(t_0)$ остаются по модулю ограниченными при уменьшении величины δ.

Последняя пара равенств и фиксирует окончательный вид асимптотического выражения для $\varphi'(t_0)$. Главный член в асимптотическом разложении выпадает, если постоянная p обращается в нуль (что, например, имеет место, когда коэффициенты Фурье функции $f_1(t)$ с нечетными индексами суть вещественные, а с четными индексами — чисто мнимые величины). В этом случае поведение $\varphi'(t_0)$ в узколокальной зоне определяется лишь функцией, изменяющейся по своему абсолютному значению в конечных пределах.

Поступила 5 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Устинов Ю. А.* Расчет напряжений в круговом кольце. Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1964, № 1.
2. *Устинов Ю. А.* Концентрация напряжений в полуплоскости и плоскости с круговыми отверстиями при растяжении. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 1.
3. *Jeffery G. B.* Plane stress and plane strain in bipolar coordinates. Transact. Roy. Soc. London, Ser. A, 1921, vol. 221, p. 265.
4. *Mindlin R. D.* Stess distribution around a hole hear the edge of a plate under tension. Proc. Soc. Exptl Stress Analysis, 1948, vol. 5, No. 2, p. 56.