

НЕКОТОРЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ,
СВЯЗАННЫЕ С КОНТАКТНЫМИ ЗАДАЧАМИ
ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ИШТВАН ПАЦЕЛЬТ

(Мишкольц, Венгрия)

Формулируется аналогия между задачами об оптимальном распределении нагрузки, обеспечивающей наибольшую жесткость тела, и контактной задачей для жесткого штампа, внедряющегося в упругое тело в той же области, где ищется распределение нагрузки.

Вдоль образующей одной из оболочек ищется такое изменение толщины, чтобы контактное усилие, передаваемое на другую оболочку, удовлетворяло различным критериям качества ($\min(W_{\max} - W_{\min})$, $\min(W_{\max})$, $\max \Pi$ и т. д.) с учетом некоторых линейных равенств относительно контактного давления, где W_{\max} , W_{\min} — максимальное и минимальное нормальные перемещения срединной поверхности оболочки, Π — потенциальная энергия. Используя метод конечных элементов (МКЭ) [1, 2], оптимизационные задачи сводятся к задачам линейного и квадратичного программирования [3].

Приводятся численные результаты примера оптимизационно-контактной задачи для тонкостенного цилиндра и оболочечной конструкции, состоящей из цилиндрических и конических оболочек.

Взаимодействие тел довольно часто осуществляется в виде контакта, причем трением и сцеплением между телами (в определенных условиях) можно пренебречь. Иногда требуется такое взаимодействие, при котором в определенной области одного из тел (или в различных областях обоих тел) абсолютное значение вектора перемещения или разница наибольших и наименьших перемещений стали бы наименьшими.

Будем предполагать, что эти требования (критерии качества) будут обеспечены подходящим выбором начального зазора (или натяга), причем изменение формы тел так мало, что его влиянием на перемещение, вычисленное для удаленных одно от другого тел, можно пренебречь. Такими примерами могут служить контактные задачи для тонкостенных оболочек, жестких штампов, внедряющихся в упругое тело.

Будем считать, что тела являются тонкостенными оболочками и критерий качества относится только к одной из оболочек. При этом решение оптимизационной задачи будем строить в два этапа.

Во-первых, определяется распределение контактного давления из критерия качества так, чтобы оно удовлетворяло также некоторым заданным алгебраическим уравнениям.

Во-вторых, с помощью найденного контактного давления из решения контактной задачи вычисляется начальный зазор; после чего легко определяется толщина той оболочки, для которой критерий качества не был сформулирован.

1. Аналогия. 1.1. В задаче об оптимальном распределении нагрузки требуется, чтобы распределенная на поверхности A_c нагрузка $p = -pn$ удовлетворяла условиям

$$\psi_s = \psi_s(q_s, p(x)) = 0 \quad (s=1, \dots, s) \quad (1.1)$$

$$p = p(x) \geq 0, \quad x \in A_c \quad (1.2)$$

где n — внешняя нормаль к поверхности A_c , q_s — известная величина, x — пространственная координата (x_1, x_2, x_3) .

Будем считать, что система имеет наибольшую жесткость (наименьшую податливость) в том случае, когда распределенная по A_c нагрузка такова, что потенциальная энергия Π становится наибольшей (дополнительно

ная работа Π_c — наименьшей); причем на тело кроме нагрузки p может действовать также другая известная система усилий.

Если известна функция влияния $H(x, x')$ (нормальное перемещение в точке x области A_c от единичной силы, действующей в точке x' в направлении внутренней нормали к поверхности A_c), то легко показать, что

$$\Pi = -\Pi_c = -\frac{1}{2} \int_{A_c} \int_{A_c} p(x) H(x, x') dA' dA - \int_{A_c} p f dA + \text{const} \quad (1.3)$$

где f — нормальное перемещение, вызванное известной нагрузкой (оно считается положительным в направлении $-\mathbf{n}$); dA — элемент поверхности, и задача об оптимальном распределении нагрузки сводится к задаче

$$\min \{ \Pi_c \mid p \geq 0, \psi_s = 0 \quad (s=1, \dots, s) \} \quad (1.4)$$

1.2. Пусть жесткий штамп, имеющий в плане форму A_c , под действием известной нагрузки внедряется в упругое тело, причем в начальном, ненагруженном состоянии между телами имеется зазор $h=h(x)$.

Известно [4], что решение контактной задачи можно получить различными вариационными методами. В данном случае будем искать минимум модифицированной (вследствие начального зазора) дополнительной работы с учетом уравнений, выражающих условия равновесия штампа. Считая известной функцию влияния $H(x, x')$, перемещение $f(x)$ и начальный зазор $h(x)$, можем написать, что минимизируемый функционал равен

$$\Pi_c \sim \frac{1}{2} \int_{A_c} \int_{A_c} p(x) H(x, x') p(x') dA' dA + \int_{A_c} p(f+h) dA \quad (1.5)$$

а дополнительные уравнения имеют вид¹

$$\begin{aligned} F_i &= F_i^0 - \int_{A_c} n_i^0 p dA = 0, \quad p_i = -n_i^0 p, \quad p \geq 0 \\ M_i &= M_i^0 - \int_{A_c} e_{itv} R^t n^v p dA = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

где F_i^0, M_i^0 — главный вектор и момент от действующей на штамп нагрузки, вычисленной относительно начальной точки координатной системы; \vec{R}^t — вектор положения; n_i^0, n_i — внешняя нормаль к штампу и упругому телу соответственно ($n_i^0 \approx -n_i$ при небольших начальных зазорах); e_{itv} — тензор Леви — Чивита.

Таким образом контактная задача сводится к решению следующей задачи:

$$\min \{ \Pi_c \mid p \geq 0, F_i = 0, M_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \} \quad (1.7)$$

В самом деле, введя в рассмотрение функционал $L = \Pi_c + \lambda_{(F)}^i F_i + \lambda_{(M)}^i M_i$, затем, варьируя его независимо по p и $\lambda_{(F)}^i, \lambda_{(M)}^i$ так, что первая вариация будет равна

$$\begin{aligned} \delta_p L &= \int_{A_c} \left[\int_{A_c} H(x, x') p(x') dA' + f(x) + h(x) - d(x) \right] \delta p(x) dA = \\ &= \int_{A_c} g(x) \delta p(x) dA \geq 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

¹ Здесь и ниже используются обозначения векторов и тензоров из [5].

$$d(x) = \lambda_{(F)}^i n_i(x) + e_{iuv} \lambda_{(M)}^u R^v(x) n^i(x)$$

$$\delta_\lambda L = \frac{\partial L}{\partial \lambda_{(F)}^i} \delta \lambda_{(F)}^i + \frac{\partial L}{\partial \lambda_{(M)}^i} \delta \lambda_{(M)}^i = 0 \quad (1.9)$$

получим условия контакта.

Так как при $p > 0$, δp может быть любым, то относительное перемещение между телами будет $g^i = g(x) = 0$ ($x \in A_c^c$); далее при $p = 0$, $\delta p \geq 0$, т. е. $g(x) \geq 0$, из чего следует, что имеется отрыв ($x \in A_c^o$): $A_c = A_c^c + A_c^o$. С другой стороны, из (1.9) имеем $F_i = 0$, $M_i = 0$.

Множители Лагранжа $\lambda_{(F)}^i, \lambda_{(M)}^i$ соответствуют векторам жестких смещений штампа вдоль оси координатной системы и поворотов вокруг тех же осей.

Из анализа задач (1.4) и (1.7) следует, что при нулевом начальном зазоре $\Pi_c = \Pi_c^*$ и при условиях ψ_s (см. (1.1)), совпадающих с уравнениями (1.6), справедлива следующая аналогия: задача о распределении оптимальной нагрузки, действующей на упругое тело над областью A_c , удовлетворяющей некоторым статическим условиям (1.6) и обеспечивающей наименьшую податливость системы, равносильна задаче о контакте того же упругого тела и жесткого штампа, имеющего в плане ту же форму A_c ; причем в начальном состоянии оба тела контактируют одно с другим по всей поверхности A_c , а действующая на штамп система усилий удовлетворяет условиям (1.6).

Из решений многих контактных задач хорошо известно, что в случае плоского штампа возникающее в упругом теле напряженное состояние в некоторых точках имеет сингулярность. Это указывает на то, что достижение наименьшей податливости системы отнюдь не означает, что напряженное состояние тела также «наилучшее», так как требование последнего приводит к локальным критериям качества (например, ищется наименьшее значение максимального значения интенсивности напряжений).

Аналогия имеет силу и тогда, когда снимается ограничение на знак p и когда распределенная по A_c нагрузка имеет также касательную составляющую. В этих случаях штамп припаян к телу, и при решении контактной задачи предполагается двухсторонняя связь между телами.

2. Оптимизационная задача для оболочек вращения. 2.1. Часто в машиностроении возникают такие задачи, когда в заданной области A_w одной из оболочек (пусть вторая) необходимо минимизировать (максимизировать) или выравнять какую-то кинематическую величину с выполнением некоторого условия, касающегося контактного давления p . Соответствующее давление будет обеспечиваться подходящим выбором толщины другой (первой) оболочки.

Критерии качества

$$K_1 = W_{\max} - W_{\min}, \quad K_1' = W_{\max}, \quad K_1'' = W_{\min} \quad (2.1)$$

в рамках линейной теории упругости линейно зависят от контактного давления, так как нормальное перемещение срединной поверхности второй оболочки $W^{(2)}(x)$ определяется формулой

$$W^{(2)}(x) = \int_{A_c} H(x, x') p(x') dA' + f(x), \quad x \in A_w \quad (2.2)$$

Здесь W_{\max}, W_{\min} — наибольшее и наименьшее нормальные перемещения второй оболочки в области A_w ; $f(x)$ — перемещение, независимое от p ; $H(x, x')$ — функция влияния.

Если требуется минимизировать среднеквадратичное отклонение нормальных перемещений в области A_w относительно заданного перемещения a , то критерий качества будет уже не локальным, а глобальным, и он будет равен

$$K_2 = \frac{1}{2} \int_{A_w} \left[\int_{A_c} H(x, x') p(x') dA' - a \right]^2 dA \quad (2.3)$$

Если требуется достичь наименьшей податливости для второй оболочки, то критерий качества будет $K_3 = \Pi_c$ (см. (1.3)).

Условия, накладываемые на p : с одной стороны — это, например, вытекающее из работы конструкции уравнение равновесия

$$\psi_1 = 2\pi \int_{A_c} r p dA - \frac{M_0}{\mu} = 0 \quad (2.4)$$

(r — радиус параллельного круга, M_0 — крутящий момент, μ — коэффициент трения), а с другой стороны, из односторонней связи следует, что $p \geq 0$.

Итак, исходя из критериев качеств (2.1) с учетом неравенств

$$W^+ = W_{\max} - W^{(2)}(x) \geq 0, \quad W^- = -W_{\min} + W^{(2)}(x) \geq 0 \quad (2.5)$$

и условий (2.4), $p \geq 0$, можно сформулировать различные оптимизационные задачи линейного программирования:

$$\min \left\{ \left[\begin{array}{l} K_1 \\ K_1' \end{array} \right] \mid \left[\begin{array}{l} W^+ \geq 0, \quad W^- \geq 0 \\ W^+ \geq 0 \end{array} \right], \psi_1 = 0, p \geq 0 \right\} \quad (2.6)$$

$$\max \{ K_1'' \mid W^- \geq 0, \psi_1 = 0, p \geq 0 \}$$

Задачу квадратичного программирования с учетом (2.3) и (1.3) можно записать в виде

$$\min \{ K_2 \mid \psi_1 = 0, p \geq 0 \}, \quad \min \{ K_3 \mid \psi_1 = 0, p \geq 0 \} \quad (2.7)$$

В неравенствах (2.5), фиксируя x в различных точках ($n=1, \dots, N$) и аппроксимируя контактное давление на основе метода конечных элементов [2], вместо задач (2.6), (2.7) получаем конечно-мерные задачи линейного и квадратичного программирования, которые легко решаются известными методами [3].

После определения давления p из кинематического условия контакта

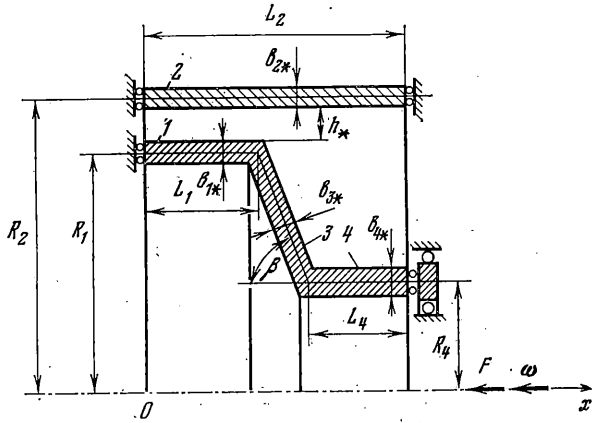
$$W^{(2)}(x) - W^{(1)}(x) + h(x) = 0, \quad x \in A_c \quad (2.8)$$

с учетом (2.2) можно вычислить зазор h . Здесь $W^{(1)}(x)$ определяется подобно $W^{(2)}(x)$ (см. (2.2), где $H \rightarrow H^{(1)}$, $f \rightarrow f^{(1)}$).

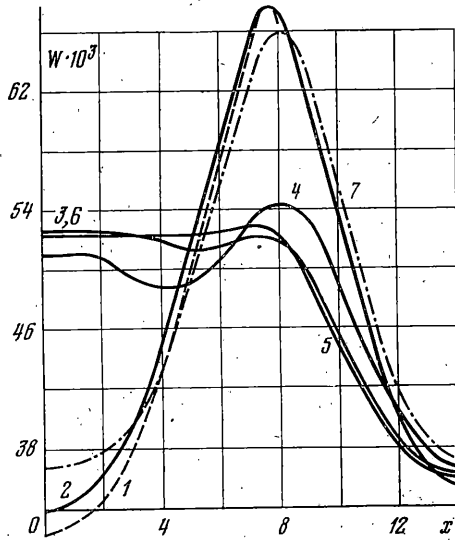
Затем, используя найденное значение h , легко получить толщину первой оболочки из следующего уравнения, полученного из простого геометрического соображения:

$$b_1 = b_{1*} + h_* - h, \quad x \in A_c \quad (2.9)$$

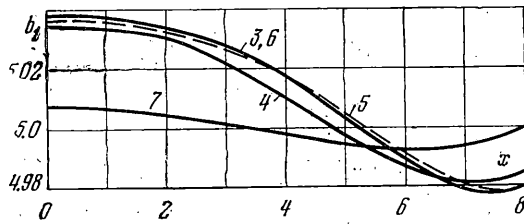
где h_* — зазор, вытекающей из геометрии упругой системы до оптимизации, b_{1*} — начальная толщина первой оболочки, с учетом которой было вычислено перемещение $f^{(1)}(x)$ и функция влияния $H^{(1)}(x, x')$.



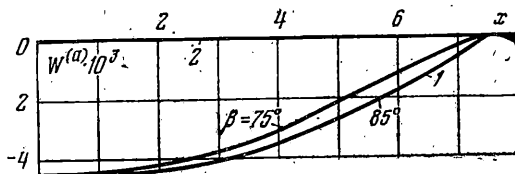
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

2.2. На основе технической теории оболочек [6] был проведен расчет в случае оболочечной конструкции, изображенной на фиг. 1. Геометрические параметры: $R_1=21.5$ см, $R_2=22$ см, $b_{i*}=0.5$ см ($i=1, \dots, 4$), $R_4=8$ см, $L_1=8$ см, $L_2=14$ см, $\beta=85^\circ$; упругие постоянные: модуль Юнга $E=2.06 \cdot 10^5$ Н/мм² и коэффициент Пуассона $\nu=0.3$; нагрузка $F=20$ кН и угловая скорость $\omega=300$ с⁻¹.

Графики $W^{(1)}$ (кривая 1) и $W^{(2)}$ (кривая 2) на фиг. 2 относятся к контактной задаче при $h_* = 0$: давление p на малых областях заменялось его «результатирующими» распределенными вдоль окружностей перерезывающими усилиями (дискретный элемент [2]); функции влияния, $f(x)$ и $f^{(1)}(x)$ вычислялись в «точках» с координатами $x_i = (i-1)L_1/(k-1)$, $k=33$, $0 \leq x_i \leq L_2$. Видно, что контакт имеется только в районе $x=L_1$ при $i=31, 32$, что свидетельствует о перенапряженности этого района (на фиг. 2 перемещения W даны в мм, а значения x — в см). В области $A_W = (R_2, L_2)$ параметр $\Delta W = W_{\max} - W_{\min} = 0.034$ мм. Ставится задача уменьшить его подходящим выбором толщины первой оболочки¹. При оптимизациях значение $M_0/\mu = 48.28$ см·кН было определено из решения контактной задачи при $h_* = 0$.

Кривые 3, 4, 5 для K_1, K_2, K_3 и кривые 6, 7 для K_1', K_1'' были вычислены при помощи тех же названных критериев качеств. Соответствующие им значения ΔW равны: 0.0165, 0.019, 0.0169, 0.0165 и 0.0295 (мм), т. е., как и ожидалось, ΔW стало наименьшим при K_1 и K_1' и наибольшим — при K_1'' . В интервале $0 \leq x \leq 50$ мм при K_3 нормальное перемещение является постоянным (следствие аналогии п. 1). Кривая K_2 была получена при $a=f(\omega)$, где $f(\omega)$ — нормальное перемещение, полученное из вращения с угловой скоростью ω .

Из сравнения кривых 4, 5 видно, что выравнивание по K_2 гораздо хуже, чем по K_3 .

На фиг. 3 изображено изменение толщины первой оболочки в мм. Хорошо видно, что изменение толщины ($b_1 - b_{i*}$) незначительно и его влиянием на перемещение $W^{(1)}(x)$ практически можно пренебречь.

2.3. Часто в практике машиностроения дискообразную деталь надо зафиксировать на вал «фрикционным закреплением» типа оболочечной конструкции, изображенной на фиг. 1.

Теперь будет рассмотрен случай, когда второе тело можно считать абсолютно жестким. Если в начальном состоянии зазор был равен нулю, то закрепляющее устройство (при данных первого примера) после нагружения будет касаться деталей в очень узкой области (фиг. 4; $W^{(a)}$ даны в мм, а значения x — в см). Так как конструкции первого и второго примеров являются крайними для трехмерной дискообразной детали, то в любом случае надо изменить толщину первой оболочки для обеспечения контакта по всей области A_c , или надо конструировать другое устройство, работающее на ином принципе. С увеличением β закрепляющий момент M_0/μ также увеличивается: $M_0/\mu = 51.5$ см·кН при $\beta = 75^\circ$ и $M_0/\mu = 172.5$ см·кН при $\beta = 85^\circ$.

Автор благодарит Институт проблем механики АН СССР за предоставленную возможность проведения исследований по данной тематике во время научной командировки в 1977 г.

Поступила 25 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Zienkiewicz O. C. The finite element method in engineering science. London, McGraw-Hill, 1974.
2. Páczelt I., Herpai B. Some remarks on the solution of contact problems of elastic shells. Arch. Budowy maszyn, 1977, vol. 24, No. 2, p. 187–202.
3. Kunzi H. P., Krelle W. Nichtlineare Programmierung. Berlin, Springer Verlag, 1962.
4. Kalker J. J. Aspects of contact mechanics. In: mechanics of the contact between deformable bodies. Delf. Univ. Press, 1975, p. 1–25.
5. Лурье А. И. Теория упругости. М., «Наука», 1970.
6. Чергина В. С. Статика тонкостенных оболочек вращения. М., «Наука», 1968.

¹ Такое требование может возникать в машиностроении при изготовлении тонких цилиндрических деталей с повышенным требованием к точности.