МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1980

УДК 539.3

ВАРИАНТ АНИЗОТРОПНОЙ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА

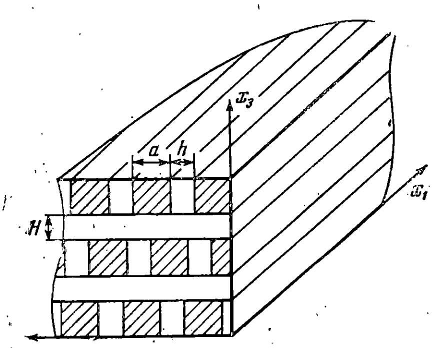
Л. П. ИСУПОВ

(Москва)

Возможны два пути построения теории, учитывающей структуру материала, т. е. включающей некоторые линейные параметры, характеризующие его строение. Первый путь состоит в обобщении классической теории упругости на основе введения наряду с обычными напряжениями моментных напряжений [1, 2]. Второй — заключается в получении уравнений неоднородной среды в результате структурного анализа и последующего перехода к сплошной среде [3] на основе предположения о том, что число структурных элементов достаточно велико и неоднородную среду можно заменить приближенно квазиоднородной анизотропной. В [3] на основе второго подхода излагаются общие методы получения уравнений теории армированных сред, в [4] получены уравнения для слоистой среды, в [5] — для волокнистого композита с малым показателем армирования. В [6, 7] тем же методом построен ряд моделей для изучения специфических динамических эффектов в структурированных средах.

В данной работе волокнистый композит моделируется ортотропной сплошной средой, плотность энергии деформации которой зависит от первых и вторых производных перемещений. Получен закон упругости для такой среды, с помощью принципа Лагранжа выведены уравнения равновесия в напряжениях и граничные условия, получены уравнения совместности кривизн и деформаций и система уравнений в перемещениях.

1. Рассмотрим однонаправленный волокнистый композит (фиг. 1). Будем считать, что композит состоит из волокнистых слоев, разделенных слоями податливой матрицы толщины H. При производстве современных волокнистых композитов в качестве основного элемента используется элементарный однонаправленный слой (препрег), что придает материалу слоистость и оправдывает принятое предположение. Волокнистый слой состоит из регулярно уложенных в один ряд волокон квадратного поперечного сечения со стороной a (сечение волокна заштриховано на фиг. 1), разделенных прослойками матрицы толщины h. Таким образом предполагается регулярность укладки волокон в слое и регулярность укладки слоев.



Фиг. 1

Переход к континуальной модели осуществляется следующим образом: рассматривается деформирование волокнистого слоя в его плоскости и на основе структурного анализа и перехода к сплошной среде осуществляется замена волокнистого слоя некоторым ортотропным слоем, плотность энергии деформации которого включает энергию изгиба волокон; затем рассматривается слоистый композит из жестких ортотропных слоев и мягких слоев матрицы и осуществляется переход к квазиоднородной сплошной среде.

При деформировании волокнистого слоя в его плоскости принимаются следующие предположения: волокна подчиняются гипотезе плоских сечений; перемещения распределены линейно по толщине прослойки матрицы; упругая энергия прослойки матрицы определяется средними по ее толщине деформациями.

Последняя гипотеза равносильна пренебрежению энергией изгиба прослойки матрицы. Погрешность этого допущения тем меньше, чем меньше толщина прослойки матрицы и чем больше разница упругих модулей волокна и матрицы.

Аналогичные гипотезы принимаются при анализе деформирования слоистого композита: жесткие ортотропные слои подчиняются гипотезе Кирхгофа — Лява; перемещения распределены линейно по толщине мягкого слоя; упругая энергия мягкого слоя определяется средними по толщине деформациями.

С использованием указанных предположений, а также условия непрерывности перемещений на границе волокна и матрицы определяется выражение для плотности упругой энергии деформации полученной сплошной среды [1]

$$\begin{gathered}U={}^1/_2\{B_{11}(u_{2,\,11})^2+B_{22}(u_{3,\,11})^2+B_{33}(u_{3,\,22})^2+2B_{23}u_{3,\,11}u_{3,\,22}+\\+B_{44}(u_{3,\,12})^2+B_{55}(u_{3,\,21})^2+C_{11}(u_{1,\,1})^2+C_{22}(u_{2,\,2})^2+C_{33}(u_{3,\,3})^2+\\+2C_{12}u_{1,\,1}u_{2,\,2}+2C_{13}u_{1,\,1}u_{3,\,3}+2C_{23}u_{2,\,2}u_{3,3}+C_{44}(u_{3,\,2}+u_{2,\,3})^2+\\+C_{55}(u_{3,\,1}+u_{1,\,3})^2+C_{66}(u_{1,\,2}+u_{2,\,1})^2\}\end{gathered} \tag{1.1}$$

где u_1, u_2, u_3 — перемещения, а индекс после запятой обозначает частную производную по соответствующей переменной.

Упругие постоянные определяются механическими характеристиками волокна и связующего и параметрами армирования

$$\begin{gathered}B_{11}=E^fv^fa^2/12,\quad B_{22}=[E^fv^f+E^mv^*(1-v^\circ)]a^2/12\\ B_{33}=E^mv^*a^2/[12(1-v^\circ)],\quad B_{23}=E^mv^*\nu a^2/12\\ B_{44}=B_{55}=E^mv^*a^2/[12(1-v^\circ)(1+\nu)]\\ C_{11}=E^fv^f+E^m[v^*(1-v^\circ)+(1-\nu)(1-v^*)/\eta]\\ C_{22}=E^m[v^*/(1-v^\circ)+(1-\nu)(1-v^*)/\eta]\\ C_{33}=E^m(1-\nu)/[\eta(1-v^*)],\quad C_{12}=E^m[\nu v^*+\nu(1-v^*)/\eta]\\ C_{13}=C_{23}=E^m\nu/\eta,\quad C_{44}=C_{55}=E^m/[2(1+\nu)(1-v^*)]\\ C_{66}=E^m[(1-v^*)+v^*/(1-v^\circ)]/[2(1+\nu)],\quad \eta=(1+\nu)(1-2\nu)\end{gathered} \tag{1.2}$$

где ν — коэффициент Пуассона матрицы, E^f, E^m — модули Юнга волокна и матрицы соответственно, v^f — объемная доля волокна в композите, v° — объемная доля волокна в волокнистом слое, v^* — объемная доля волокнистых слоев в композите. Показатели армирования связаны между собой: $v^f=v^\circ v^*$. В случае $(a+h)=g(a+H)$ имеем $v^*=(v^fg)^{1/2}$, $v^\circ=(v^f/g)^{1/2}$.

2. Определим тензор деформаций

$$\varepsilon_{ij}={}^1/_2(u_{i,\,j}+u_{j,\,i}) \tag{2.1}$$

[1] См. построение континуальной модели: Исупов Л. П. Континуальная модель волокнистого композита. ВИНИТИ АН СССР. Деп. № 1579–79.

и тензор, аналогичный тензору кривизн в моментной теории упругости [2]:

$$\varkappa_{kij}=u_{k,ij}, \quad \varkappa_{kij}=\varkappa_{kji} \tag{2.2}$$

В дальнейшем будем называть компоненты $\varkappa_{kij}$ кривизнами.

Введем следующие обычные σ_{ij} и моментные m_{kij} напряжения:

$$\sigma_{ij}=\partial U/\partial\varepsilon_{ij}, \quad m_{kij}=\partial U/\partial\varkappa_{kij} \tag{2.3}$$

Из (1.1) и (2.3) следует, что m_{kij} отличны от нуля при следующих значениях индексов: $k=2,\ i=j=1;\ k=3,\ i, j=1, 2$.

Подставляя выражение (1.1) в (2.3), получим закон упругости

$$\begin{gathered}
\sigma_{11}=C_{11}\varepsilon_{11}+C_{12}\varepsilon_{22}+C_{13}\varepsilon_{33}, \quad \tau_{23}=2C_{44}\varepsilon_{23} \\
\sigma_{22}=C_{12}\varepsilon_{11}+C_{22}\varepsilon_{22}+C_{23}\varepsilon_{33}, \quad \tau_{13}=2C_{55}\varepsilon_{13} \\
\sigma_{33}=C_{13}\varepsilon_{11}+C_{23}\varepsilon_{22}+C_{33}\varepsilon_{33}, \quad \tau_{12}=2C_{66}\varepsilon_{12} \\
m_{211}=B_{11}\varkappa_{211}, \quad m_{312}=B_{44}\varkappa_{312}, \quad m_{321}=B_{55}\varkappa_{321} \\
m_{311}=B_{22}\varkappa_{311}+B_{23}\varkappa_{322}, \quad m_{322}=B_{23}\varkappa_{311}+B_{33}\varkappa_{322}
\end{gathered} \tag{2.4}$$

3. Для вывода уравнений равновесия и граничных условий воспользуемся принципом Лагранжа

$$\delta(W-A)=0, \quad W=\iiint\limits_V U dV \tag{3.1}$$

где W — энергия деформации тела объема V, A — работа внешних сил.

Найдем вариацию упругой энергии δW:

$$\delta W=\iiint\limits_V \left(\frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}+\frac{\partial U}{\partial\varkappa_{kij}}\delta\varkappa_{kij}\right)dV=\iiint\limits_V(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}+m_{kij}\delta\varkappa_{kij})\,dV$$

В силу симметрии тензора σ_{ij}:

$$\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}={}^1/{}_2\sigma_{ij}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})=\sigma_{ij}\delta u_{i,j}$$

$$\delta W=\iiint\limits_V(\sigma_{ij}\delta u_{i,j}+m_{kij}\delta u_{k,ij})\,dV$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{gathered}
\delta W=\iiint\limits_V(m_{ikj,kj}-\sigma_{ij,j})\,\delta u_i dV+\iint\limits_S(\sigma_{ij}n_j-m_{ijk,j}n_k)\,\delta u_i dS+ \\
+\iint\limits_S m_{kij}n_j\delta u_{k,i}dS
\end{gathered} \tag{3.2}$$

где S — внешняя поверхность тела, n_j — компоненты вектора единичной нормали к поверхности.

Так как независимыми являются вариации самих перемещений и их нормальных производных, то необходимо преобразовать подынтегральное выражение в последнем поверхностном интеграле в (3.2). Выделим нормальную производную

$$\delta u_{k,i}=(D_i+n_iD)\,\delta u_k, \quad D_i=(\delta_{im}-n_in_m)\,\partial/\partial x_m$$

где δ_{im} — символы Кронекера, $D=n_m\partial/\partial x_m$ — оператор нормальной производной.

Подынтегральное выражение последнего интеграла в (3.2) можем преобразовать [8]:

$$n_jm_{kij}\delta u_{k,i}=n_jm_{kij}D_i\delta u_k+n_jm_{kij}n_iD\delta u_k \tag{3.3}$$

При этом первый член правой части (3.3)

$$n_j m_{kij} D_i \delta u_k = D_i (n_j m_{kij} \delta u_k) - n_j D_i m_{kij} \delta u_k - (D_i n_j) m_{kij} \delta u_k \tag{3.4}$$

Последние два члена в (3.4) содержат независимую вариацию. В свою очередь

$$D_i (n_j m_{kij} \delta u_k) = n_{m,m} n_i n_j m_{kij} \delta u_k + n_q e_{qpl} (e_{lmi} n_m n_j m_{kij} \delta u_k)_{,p} \tag{3.5}$$

где e_{ijk} — тензор Леви — Чивиты.

В том, что (3.5) представляет тождество на поверхности тела S, нетрудно убедиться, введя обозначение $n_j m_{kij} \delta u_k = A_i$ и записав (3.5) в векторном виде, учитывая, что $n_i n_i = 1$.

Интеграл по гладкой поверхности от последнего члена в (3.5) согласно теореме Стокса равен нулю. Если поверхность имеет ребро C, образованное пересечением двух частей S_1 и S_2 поверхности S, то по теореме Стокса имеем

$$\iint\limits_S n_q e_{qpl} (e_{lmi} n_m n_j m_{kij} \delta u_k)_{,p} dS = \oint\limits_C k_l [e_{lmi} n_m n_j m_{kij}]^* \delta u_k dC \tag{3.6}$$

где k_l — компоненты единичного вектора, касательного к C. Квадратные скобки со звездочкой в правой части (3.6) означают, что берется разность между значениями на S_1 и S_2 заключенной в них величины.

Объединяя все эти результаты, получим окончательно

$$\delta W = \iiint\limits_V (m_{ikj,kj} - \sigma_{ij,j}) \delta u_i dV + \iint\limits_S \{[\sigma_{ij} n_j - m_{ijk,j} n_k - n_j D_k m_{ikj} - \tag{3.7}$$

$$- (D_k n_j) m_{ikj} + n_{m,m} n_k n_j m_{ikj}] \delta u_i + (m_{ikj} n_j n_k) D \delta u_i\} dS +$$

$$+ \oint\limits_C k_l [e_{lmk} n_m n_j m_{ikj}]^* \delta u_i dC$$

В соответствии с (3.7) примем, что вариация работы внешних сил имеет вид

$$\delta A = \iiint\limits_V F_i \delta u_i dV + \iint\limits_S (P_i \delta u_i + M_i D \delta u_i) dS + \oint\limits_C E_i \delta u_i dC \tag{3.8}$$

где F_i — сила, отнесенная к единице объема; P_i — поверхностная сила; M_i — момент, отнесенный к единице внешней поверхности; E_i — сила, отнесенная к единице длины ребра C.

Подставляя (3.7), (3.8) в (3.1) и приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим следующие уравнения равновесия:

$$m_{ikj,kj} - \sigma_{ij,j} - F_i = 0 \tag{3.9}$$

и граничные условия на поверхности S и ребре C

$$\sigma_{ij} n_j - m_{ikj,k} n_j - (D_k m_{ikj}) n_j - (D_k n_j) m_{ikj} + n_{m,m} m_{ikj} n_k n_j = P_i \tag{3.10}$$

$$m_{ikj} n_k n_j = M_i, \quad k_l [e_{lmk} n_m n_j m_{ikj}]^* = E_i \text{ на } C$$

Граничные условия (3.10) существенно упрощаются на координатных плоскостях, так как в этом случае $D_k \equiv 0$, $n_{m,m}=0$. Например, на плоскости $x_1=0$ будем иметь

$$\sigma_{1i}-m_{i1k,k}=P_i, \quad m_{i11}=M_i \tag{3.11}$$

При этом в соотношениях (3.11) по определению (2.3) $m_{i1k}=0$ при $i=1$.

4. Используя определение деформаций (2.1) и кривизн (2.2) через перемещения, нетрудно получить уравнения совместности. Деформации удовлетворяют обычным тождествам Сен-Венана

$$\varepsilon_{ik,jl}-\varepsilon_{kj,il}=\varepsilon_{il,jk}-\varepsilon_{lj,ik} \tag{4.1}$$

Исключая из (2.1), (2.2) компоненты перемещений, получим уравнения совместности кривизн и деформаций

$$\varkappa_{kij}=\varepsilon_{kj,i}+\varepsilon_{ik,j}-\varepsilon_{ji,k} \tag{4.2}$$

Чтобы получить уравнения в перемещениях, подставим (2.4), (2.1), (2.2) в уравнения равновесия (3.9). После несложных преобразований получим систему трех уравнений

$$\begin{gathered}
C_{11}u_{1,11}+C_{66}u_{1,22}+C_{55}u_{1,33}+(C_{12}+C_{66})u_{2,12}+(C_{13}+C_{55})u_{3,13}=0\\
-B_{11}u_{2,1111}+C_{22}u_{2,22}+C_{66}u_{2,11}+C_{44}u_{2,33}+(C_{12}+C_{66})u_{1,12}+(C_{23}+C_{44})u_{3,23}=0\\
-B_{22}u_{3,1111}-B_{33}u_{3,2222}-2(B_{23}+B_{44})u_{3,1122}+C_{33}u_{3,33}+C_{55}u_{3,11}+C_{44}u_{3,22}+\\
+(C_{13}+C_{55})u_{1,13}+(C_{23}+C_{44})u_{2,23}=0
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Общая структура уравнений (4.3) следующая: $M(u_1, u_2, u_3)+L(u_1, u_2, u_3)=0$, где M — дифференциальный оператор четвертого порядка, L — дифференциальный оператор второго порядка. Система уравнений (4.3) для ортотропного тела по своей структуре аналогична системе уравнений моментной теории упругости [2].

Из анализа выражений (1.2) для упругих постоянных следует, что коэффициенты при старших производных в уравнениях (4.3) содержат в качестве множителя малый параметр a^2. Среди решений уравнений такого типа при соответствующих граничных условиях существуют решения типа краевого эффекта, описывающие быстрое затухание моментных напряжений в композите.

5. В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе прямоугольной пластины синусоидальной нагрузкой.

Рассмотрим прямоугольную пластинку постоянной толщины b с размерами l_x, l_y. Систему координат x, y, z выберем таким образом, чтобы оси x и y лежали в срединной плоскости пластинки и совпадали с осями ортотропии, а ось z — перпендикулярна ее плоскости. Обозначим через u, v, w компоненты вектора перемещения вдоль осей x, y, z соответственно.

Низкая сдвиговая жесткость и прочность волокнистых композитов приводят к необходимости учета сдвигов по толщине пластины, которыми обычно пренебрегают в задачах изгиба изотропных пластин, используя гипотезу Кирхгофа. Поэтому здесь ограничимся предположением о постоянстве толщины пластинки в процессе деформирования, т. е. $\partial w/\partial z=0$.

Проинтегрировав третье из уравнений (3.9) по толщине пластинки с учетом граничного условия $\sigma_{33}=-q$ при $z=b/2$ и перейдя к перемещениям, получим следующую систему уравнений изгиба пластинки с учетом сдвигов:

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+C_{55}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(C_{12}+C_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=0$$

$$-B_{11}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+C_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+C_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+C_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+(C_{12}+C_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0 \tag{5.1}$$

$$-b\left[B_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+B_{33}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+2(B_{23}+B_{44})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}\right]+$$

$$+b\left(C_{55}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+C_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\int\limits_{-b/2}^{b/2}\left(C_{55}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+C_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}\right)dz=-q$$

Используя (3.11), получим следующие граничные условия шарнирного опирания:

при $x=0,\ x=l_x$

$$w=0,\qquad m_{311}=B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

$$v=0,\quad \sigma_{11}=C_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{12}\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad m_{211}=B_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \tag{5.2}$$

при $y=0,\ y=l_y$

$$w=0,\qquad m_{322}=B_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

$$u=0,\qquad \sigma_{22}=C_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{22}\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{5.3}$$

Условие отсутствия касательных усилий на поверхности пластинки $z=\pm b/2$ имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0 \tag{5.4}$$

Рассмотрим синусоидальную нагрузку (здесь и далее по повторяющимся индексам не суммировать):

$$q=q_{mn}\sin\alpha_m x\sin\alpha_n y,\qquad \alpha_m=m\pi/l_x,\qquad \alpha_n=n\pi/l_y \tag{5.5}$$

Решение будем искать в виде

$$u=\Phi_{mn}(z)\cos\alpha_m x\sin\alpha_n y,\qquad v=\Psi_{mn}(z)\sin\alpha_m x\cos\alpha_n y, \tag{5.6}$$

$$w=W_{mn}\sin\alpha_m x\sin\alpha_n y$$

где $\Phi_{mn}(z)$, $\Psi_{mn}(z)$ — искомые функции, W_{mn} — искомая постоянная. При этом сразу удовлетворяются граничные условия (5.2), (5.3). Подставив (5.6) в первые два уравнения (5.1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\partial^2\Phi_{mn}/\partial z^2=K_{1mn}\Phi_{mn}+K_{2mn}\Psi_{mn},\qquad \partial^2\Psi_{mn}/\partial z^2=K_{3mn}\Phi_{mn}+K_{4mn}\Psi_{mn} \tag{5.7}$$

$$K_{1mn}=\frac{C_{11}\alpha_m^2+C_{66}\alpha_n^2}{C_{55}},\qquad K_{2mn}=\frac{(C_{12}+C_{66})\alpha_m\alpha_n}{C_{55}}$$

$$K_{3mn}=\frac{(C_{12}+C_{66})\alpha_m\alpha_n}{C_{44}},\qquad K_{4mn}=\frac{B_{11}\alpha_m^4+C_{22}\alpha_n^2+C_{66}\alpha_m^2}{C_{44}}$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$p^4-(K_{1mn}+K_{4mn})p^2+K_{1mn}K_{4mn}-K_{2mn}K_{3mn}=0$$

Для реальных материалов, у которых $K_{1mn}K_{4mn}-K_{2mn}K_{3mn}>0$, это уравнение имеет действительные корни

$$p_1^2=K_{1mn}\frac{1+s_{mn}}{2}+K_{4mn}\frac{1-s_{mn}}{2},\qquad s_{mn}=\left[1+\frac{4K_{2mn}K_{3mn}}{(K_{1mn}-K_{4mn})^2}\right]^{1/2}$$

$$p_2^2=K_{1mn}\frac{1-s_{mn}}{2}+K_{4mn}\frac{1+s_{mn}}{2}$$

С учетом условий (5.4) решение системы (5.7) запишем в форме

$$\Phi_{mn}(z)=(A_{1mn}\operatorname{sh}p_1z+A_{2mn}\operatorname{sh}p_2z)W_{mn}$$

$$\Psi_{mn}(z)=\left(A_{1mn}\frac{\gamma_{1mn}}{K_{2mn}}\operatorname{sh}p_1z+A_{2mn}\frac{\gamma_{2mn}}{K_{2mn}}\operatorname{sh}p_2z\right)W_{mn}$$

$$A_{1mn}=\frac{K_{2mn}\alpha_n-\gamma_{2mn}\alpha_m}{p_1(\gamma_{2mn}-\gamma_{1mn})\operatorname{ch}{}^1/_2p_1b},\qquad A_{2mn}=\frac{K_{2mn}\alpha_n-\gamma_{1mn}\alpha_m}{p_2(\gamma_{1mn}-\gamma_{2mn})\operatorname{ch}{}^1/_2p_2b}$$

$$\gamma_{1mn}=p_1^2-K_{1mn},\quad \gamma_{2mn}=p_2^2-K_{1mn}$$

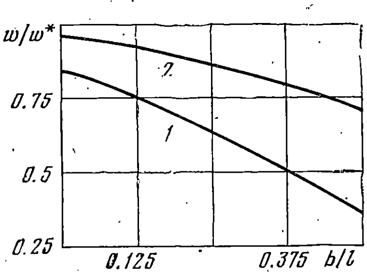
Из третьего уравнения (5.1) находим постоянную W_{mn}:

$$W_{mn}=q_{mn}/Q_{mn} \tag{5.8}$$

$$Q_{mn}=\Big\{b[B_{22}\alpha_m^4+B_{33}\alpha_n^4+2(B_{23}+B_{44})\alpha_m^2\alpha_n^2+C_{55}\alpha_m^2+C_{44}\alpha_n^2]+$$
$$+2\alpha_mC_{55}\left(A^*_{1mn}\operatorname{th}\frac{p_1b}{2}+A^*_{2mn}\operatorname{th}\frac{p_2b}{2}\right)+$$
$$+2\alpha_nC_{44}\left(A^*_{1mn}\frac{\gamma_{1mn}}{K_{2mn}}\operatorname{th}\frac{p_1b}{2}+A^*_{2mn}\frac{\gamma_{2mn}}{K_{2mn}}\operatorname{th}\frac{p_2b}{2}\right)\Big\}$$

$$A^*_{1mn}=A_{1mn}\operatorname{ch}(p_1b/2),\qquad A^*_{2mn}=A_{2mn}\operatorname{ch}(p_2b/2)$$

На фиг. 2 приведены кривые, характеризующие влияние моментных напряжений на прогиб квадратной пластинки под синусоидальной нагрузкой. Здесь w — прогиб в середине квадратной пластинки толщины b с размером l, вычисленный по (5.8), w^* — прогиб в центре такой же пластинки, вычисленный без учета в уравнениях моментных членов. Материал пластинки характеризуется следующими параметрами: $E^f/E^m=100$ (при этом $C_{11}/C_{22}=17.5$), $\nu=0.35$, $\nu^f=0.5$ ($b/a=3$ — кривая *1*, $b/a=6$ — кривая *2*).



Фиг. 2

На основе решения приведенной задачи может быть построено решение для пластинки под произвольно распределенной нагрузкой с помощью разложения $q(x, y)$ в двойной тригонометрический ряд Фурье.

Решение задачи об изгибе пластинки дает принципиальную возможность экспериментального определения дополнительных упругих постоянных на основе изгибных испытаний пластин.

Автор глубоко благодарен Ю. Н. Работнову за рекомендации и замечания по работе.

Поступила 6 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mindlin R. D., Tiersten H. F.* Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Ration. Mech. Analysis, 1962, vol. 11, No. 5. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1964, № 4.)
2. *Koiter W. T.* Couple-stresses in the theory of elasticity. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., Ser. B, 1964, vol. 67, No. 1. (Рус. перев., Механика. Сб. перев.: 1965, № 3.)
3. *Болотин В. В.* Основные уравнения теории армированных сред. Механика полимеров, 1965, № 2.
4. *Болотин В. В.* Об изгибе плит, состоящих из большого числа слоев. Изв. АН СССР. ОТН, Механ. и машиностр., 1964, № 1.
5. *Болотин В. В.* О теории армированных тел. Изв. АН СССР. ОТН, Механика, 1965, № 1.
6. *Sun S. T., Achenbach J. D., Herrmann G.* Continuum theory for a laminated medium. J. App. Mech., Ser. E, 1968, vol. 35, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., 1968, т. 35, № 3.)
7. *Achenbach J. D., Herrmann G.* Dispersion of free harmonic waves in fiber-reinforced composites. AIAA J., 1968, vol. 6, No. 10. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 10.)
8. *Toupin R. A.* Elastic materials with couple-stresses. Arch. Ration. Mech. Analysis, 1962, vol. 11, No. 5.